DOI:10.19789/j.1004-9398.2022.03.003
文献引用:赵临龙. Burgers方程的广义精确解[J].首都师范大学学报(自然科学版),2022,43(3):14-16. ZHAO L L. Generalized exact solutions of Burgers equation[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2022,43(3):14-16.

Burgers方程的广义精确解*

赵　临　龙**

(安康学院数学与统计学院，陕西 安康　725000)

摘要:为了解决Burgers方程的精确解,本文沿用将Burgers方程转化Riccati方程求其精确解的方法,利用Riccati方程不变量的关系,给出Riccati方程精确解的解形式,并且将原文Burgers方程转化为特殊的Riccati方程,推广到一般形式的Riccati方程,给出Burgers方程的广义精确解.结果表明Burgers方程的广义精确解将进一步扩大其方程的应用范围.

关键词:Burgers方程;Riccati方程;精确解

中图分类号:O175.2

Generalized exact solutions of Burgers equation*

ZHAO Linlong**

(School of Mathematics and Statistics, Ankang University, Ankang Shaanxi　725000)

Abstract: In order to solve the exact solution of Burgers equation, this paper uses the method of transforming Burgers equation into Riccati equation to find its exact solution, uses the relationship between the invariants of Riccati equation, gives the solution form of the exact solution of Riccati equation, and transforms the original Burgers equation into a special Riccati equation, which is extended to the general Riccati equation. The generalized exact solution of Burgers equation is given. The results show that the generalized exact solution of Burgers equation will further expand the application range of Burgers equation.

Keywords: Burgers equation; Riccati equation; exact solution

CLC: O175.2

0　引　言

1948年,欧美学者Johannes Burgers首先用模型

$$u_t + uu_x = \alpha u_{xx} \tag{1}$$

(其中$\alpha>0$为耗散系数)描述流体中的湍流,该方程为描述对流-耗散流之间相互影响的原始模型.这个方程被人们以Johannes Burgers的名字命名为“Burgers方程”[1].

Burgers方程模型在等离子物理、非线性光学、量子理论和通信技术等领域占有重要的地位和作用,引起数学和物理学专家的高度关注,寻求方程(1)的精确解一直是一个重要的研究课题.2005年,石玉仁等[2]将双曲函数法进行扩展,找到了变系数Burgers方程在一定条件下的若干精确解;2007年,谢元喜[3]基于Hopf-Cole变换法和试探函数法的基本思想,引入变量变换,最终将Burgers方程化为Euler方程,利用数学软件给出相应的精确解;2017年,林府标[4]利用李群理论中的伸缩变换群,将

收稿日期:2021-04-28
* 陕西省科技厅研究项目(2022JM-050);陕西省一流课程建设项目(2020-156)
** 通信作者:859041422@qq.com

Burgers方程化为Riccati方程,给出特殊的Riccati方程的解;2019年,蒋桂凤[5]利用试探函数法,将Burgers方程化为Riccati方程,针对特殊的Riccati方程给出相应的解形式.

目前虽然已经提出了许多方法,但需要深入探讨的问题依然很多.一种有效方法是将Burgers方程转化为Riccati方程求其精确解,但由于Riccati方程的不可积性,使该问题又成为新的探讨问题.现对相关文献中转化的Riccati方程所给出的特殊解,进行讨论给出其广义的解,以扩大Burgers方程的应用范围.

文献[6]将Burgers方程(1)的求解,化为求以下Riccati方程的精确解

$$-\omega u+\frac{1}{2}ku^2-\alpha k^2\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=A, \tag{2}$$

式中:k、ω分别表示波数和圆频率,A为积分常数.取A=0,方程(2)转化为Bernoulli方程,并且将其化为一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}-\frac{\omega}{\alpha k^2\xi}z+\frac{1}{2\alpha k\xi}=0, \tag{3}$$

式中:ω、k为常数,然后由方程(3)的解,给出方程(2)的解为

$$u=-\alpha k\left[1+\tanh\frac{1}{2}(kx-\omega t)\right], \tag{4}$$

$$\text{或}\quad u=-\alpha k\left[1+\coth\frac{1}{2}(kx-\omega t)\right]. \tag{5}$$

现在,对于$A\neq 0$,讨论Riccati方程(2)的精确解.

1 Riccati方程可积性理论

1998年,赵临龙[7]提出Riccati的不变量概念,并且利用不变量概念,相继给出Riccati的解法[7-9].

定义[9] 对于Riccati方程

$$y'=P(x)y^2+Q(x)+R(x),\quad (P(x)R(x)\neq 0), \tag{6}$$

称$I_1=P(x)R(x)$,$I_2=\dfrac{P'(x)}{P(x)}+Q(x)$为方程(6)的不变量.

定理[9] 在方程(6)中,如果存在常数α、β、γ,以及函数$y_0(x)$和可导函数$G(x)$(其中$G(x)\neq 0$),满足不变量关系:

$$I_1=P(x)R(x)=\alpha\gamma G^2(x), \tag{7}$$

$$I_2=\frac{P'(x)}{P(x)}+Q(x)=\frac{G'(x)}{G(x)}+\beta G(x), \tag{8}$$

则方程(6)经线性变换

$$y=(\alpha G(x)/P(x))z, \tag{9}$$

化成积分形式

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\alpha z^2+\beta z+\gamma}=\int G(x)\mathrm{d}x+c\quad(c\text{为任意常数}). \tag{10}$$

2 Riccati方程(2)解情形分析

现将方程(2)化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{2\alpha k\xi}u^2-\frac{\omega}{\alpha k^2\xi}u-\frac{A}{\alpha k^2\xi}, \tag{11}$$

式中:ω、k、A为常数.

令$a=\dfrac{1}{2\alpha k}>0$,$b=-\dfrac{\omega}{\alpha k^2}<0$,$c=-\dfrac{A}{\alpha k^2}$,则方程(11)成为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{a}{\xi}u^2+\frac{b}{\xi}u+\frac{c}{\xi}\quad(\text{其中}a、b、c\text{为常数}). \tag{12}$$

对于Riccati方程(12),由于

$$I_1=P(x)R(x)=\frac{ac}{\xi^2}=\alpha\gamma G^2(x), \tag{13}$$

$$I_2=\frac{P'(x)}{P(x)}+Q(x)=-\frac{1}{\xi}+\frac{b}{\xi}=\frac{G'(x)}{G(x)}+\beta G(x), \tag{14}$$

在方程(13)中,取$\alpha=a$,$\gamma=c$,$G(x)=\dfrac{1}{\xi}$,则在方程(14)中,有

$$I_2=\frac{P'(x)}{P(x)}+Q(x)=\frac{-1}{\xi}+\frac{b}{\xi}=\frac{-1}{\xi}+\frac{\beta}{\xi}, \tag{15}$$

于是,$\beta=b$, (16)

从而,$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}z}{az^2+bz+c}=\int\frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi+B$, (17)

式中:a、b、c、B为常数.

(1)当 $\Delta=b^2-4ac=0$,即 $4ac=b^2>0(a>0,c>0)$时,有:

$$\frac{-1}{\sqrt{a}\,z+\sqrt{c}}=\ln\xi+B\quad(a>0,c>0), \tag{18}$$

$$z=-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}\,(\ln\xi+B)}, \tag{19}$$

于是,由方程(9)变换关系$u=(\alpha G(x)/P(x))z$,得到方程(11)的解为

$$u=\left(\frac{a}{\xi}/\frac{a}{\xi}\right)z=-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}\,(\ln\xi+B)}. \tag{20}$$

(2)当$\Delta=b^2-4ac>0$,即$4ac<b^2(a>0)$时,有

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\left(\int\left(\frac{1}{(\sqrt{a}\,z+b/(2\sqrt{a}))-\sqrt{\Delta}/(2\sqrt{a})}-\right.\right.$$

$$\int\left(\frac{1}{(\sqrt{a}\,z+b/(2\sqrt{a}))+\sqrt{\Delta}/(2\sqrt{a})}\right)\mathrm{d}z=\ln\xi+B, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\frac{(\sqrt{a}\,z+b/(2\sqrt{a}))-\sqrt{\Delta}/(2\sqrt{a})}{(\sqrt{a}\,z+b/(2\sqrt{a}))+\sqrt{\Delta}/(2\sqrt{a})}=\ln\xi+B, \tag{22}$$

$$z=-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\frac{B\xi^{\sqrt{\Delta}}}{1-B\xi^{\sqrt{\Delta}}}, \tag{23}$$

于是,由方程(9)变换关系:$u=(\alpha G(x)/P(x))z$,得到方程(11)的解为

$$u=-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\frac{B\xi^{\sqrt{\Delta}}}{1-B\xi^{\sqrt{\Delta}}}. \tag{24}$$

(3)当 $\Delta=b^2-4ac<0$,即 $4ac>b^2>0(a>0,c>0)$时,有

$$\int\left(\frac{\mathrm{d}z}{(\sqrt{a}\,z+b/(2\sqrt{a}))^2+(\sqrt{-\Delta}/(2\sqrt{a}))^2}\right)=\ln\xi+B, \tag{25}$$

$$\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a}\,z+b/(2\sqrt{a})}{\sqrt{-\Delta}/(2\sqrt{a})}\right)=\ln\xi+B, \tag{26}$$

$$z=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\tan\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln\xi+B\right], \tag{27}$$

于是,由方程(9)变换关系 $u=(\alpha G(x)/P(x))z$,得到方程(11)的解为

$$u=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\tan\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln\xi+B\right]. \tag{28}$$

3　结　果

综上,给出Riccati方程(11)解的情形.

情形1　当 $4ac=b^2>0(a>0,c>0)$,则

$$u=-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}\,(\ln\xi+B)}\quad(a、c、B\text{为常数}). \tag{29}$$

情形2　当 $4ac<b^2(a>0)$,则

$$u=-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\frac{B\xi^{\sqrt{\Delta}}}{1-B\xi^{\sqrt{\Delta}}}\quad(a、b、c、B\text{为常数}). \tag{30}$$

情形3　当 $4ac>b^2>0(a>0,c>0)$,则

$$u=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\tan\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln\xi+B\right]\quad(a、b、c、B\text{为常数}). \tag{31}$$

可见,利用Riccati方程(11)求解Burgers方程(1)关键取决于Riccati方程(11)的可积性.因此,对于Riccati方程(11)的研究仍然是一个很值得探讨的问题.

参 考 文 献

[1] 林府标.Burgers方程的一类自相似解[J].数学的实践与认识,2016,46(9):241-246.

[2] 石玉仁,吕克璞,段文山,等.变系数Burgers方程的精确解[J].兰州大学学报(自然科学版),2005,41(4):107-111.

[3] 谢元喜.Burgers方程的直接解法[J].华东师范大学学报(自然科学版),2007(3):89-92.

[4] 林府标.利用Riccati方程求解Burgers方程[J].数学的实践与认识,2017,47(21):260-264.

[5] 蒋桂凤.Burgers方程及广义Burgers方程的精确解[J].大学数学,2019,35(4):100-103.

[6] 杨先林.Burgers方程的精确解[J].动力学与控制学报,2006(4):308-311.

[7] 赵临龙.Riccati微分方程一个新的可积条件[J].科学通报,1998,43(1):107-109.

[8] 赵临龙.二次Riccati方程不变量解法的进一步研究[J].首都师范大学学报(自然科学版),2019,40(4):12-15+40.

[9] 赵临龙.常微分方程研究新论[M].西安:西安地图出版社,2000.

(责任编辑:马田田)