第42卷 第5期 首都师范大学学报(自然科学版) No.5
2021年10月 Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition) Oct.,2021

L^2空间至L^2空间的算子刻画

汪成咏, 王序岩

(北京交通大学数学系, 北京 100044)

摘要:本文主要目的是将已知的$L^p\left(\mathbf{R}^n\right)$到$L^p\left(\mathbf{R}^n\right)$的与平移可交换的有界线性算子,通过卡尔德隆提出的空间分解定理和奇异积分理论,推广到L^2空间上,并由缓增分布函数类的方式定义出L^2空间到L^2空间的有界线性算子的具体表示形式,并给出相应证明.

关键词:L^2空间;有界线性算子的研究;缓增分布

中图分类号:O177.1;O177.2 **DOI**:10.19789/j.1004-9398.2021.05.004

0 引 言

向量值函数的相关问题讨论是1957年由Hille和Phillips在*Functional Analysis and Semi-Groups*[1](泛函分析与半群)中首次提出,并进行了简单的推广.之后的学者在此基础上进一步研究确定了这个函数在n维空间中的构成和基本特性,并证明了可积和可微性.但是由于这种函数的特殊性,导致很多性质难以直接从特殊状况推广到一般状况,如对于向量值函数奇异积分算子的有界性研究.所以对一些相对特殊的函数空间内的有界线性算子的研究就显得格外重要,这便是本文的核心研究意义.

向量值函数空间上的算子理论一直是泛函分析的一个重要课题,算子理论作为基础数学的一个重要分支,是函数论学者热衷于研究的一个方向,并且形成了一整套严谨的理论体系.Stein和Weiss曾经在《欧式空间上的Fourier分析引论》[2]中讨论过广义函数情况下L^2空间至L^2空间上的算子结构,却尚未有人给出向量值函数空间下的相关算子结构,本文讨论了相关问题,并给出了具体结构及证明.

1 预备知识

设$\mathscr{H}_1$与$\mathscr{H}_2$是2个可分Hilbert空间,以$B\left(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2\right)$表示从$\mathscr{H}_1$到$\mathscr{H}_2$的有界线性算子的全体构成的完备赋范线性空间.$K$是从$\mathbf{R}^n$到$B\left(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2\right)$的算子值函数,假定$K$是强可测的.$f\left(\boldsymbol{x}\right)$是从$\mathbf{R}^n$到$\mathscr{H}_1$的强可测函数,则$K\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)f\left(\boldsymbol{y}\right)$是$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^{2n}$到$\mathscr{H}_2$的强可测函数.

命题1.1 设$\mathscr{H}$是Hilbert空间,$\left\{\boldsymbol{e}_n\right\}$是$\mathscr{H}$的标准正交基,$T$是从$\mathscr{H}$到$\mathscr{H}$的线性算子.则$T$是有界线性算子的充分必要条件是:存在$\mathscr{H}$的一个向量列$\boldsymbol{\sigma}_n$使得对任意$\boldsymbol{\varphi}\in\mathscr{H}$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma}_n\right)\right|^2<+\infty,$$

且

$$T\left(\boldsymbol{\varphi}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma}_n\right)\boldsymbol{e}_n.$$

证明:必要性:设T是有界线性算子,则$\left(T\left(\boldsymbol{\varphi}\right),\boldsymbol{e}_n\right)$是$\mathscr{H}$上的有界线性泛函.由Riesz表现定理[3],存在$\boldsymbol{\sigma}_n\in\mathscr{H}$,使得

$$\left(T\left(\boldsymbol{\varphi}\right),\boldsymbol{e}_n\right)=\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma}_n\right)\ \left(\forall\boldsymbol{\varphi}\in\mathscr{H}\right),$$

由标准正交基的性质,必要性显然.

充分性:考虑

$$T_N\left(\boldsymbol{\varphi}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma}_n\right)\boldsymbol{e}_n,$$

则T_N是$\mathscr{H}$上一列有界线性算子.条件$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma}_n\right)\right|^2<+\infty$保证$T_N$在$\mathscr{H}$上处处强收敛于$T$,由Banach-Steinhaus定理[4]可知T是有界线性算子.

将$L^p\left(\mathbf{R}^n\right)$到$L^p\left(\mathbf{R}^n\right)$的与平移可交换的有界线性算子的刻画推广到$\mathscr{H}$值函数空间上来.

引理1.1[5] 设$1\leqslant p\leqslant\infty$,$f\in L^p\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$按$L^p\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$范数有全部直到$n+1$阶的偏导数,则存在$g\in C\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$,

收稿日期:2020-10-20

使得 $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ 对几乎所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 成立.且存在常数 $C > 0$ 使得

$$\left|g(0)\right| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \left\|\partial^\alpha f\right\|_p,$$

L^2 空间是平方可积函数类[6],更接近于 n 维欧氏空间,具有 n 维欧氏空间许多类似的几何性质.

为了给出 L^2 到 L^2 空间上的算子的具体表示形式,引入 $\mathscr{H}$ 值Schwartz类[7]记为 $S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$,对于 $S\left(\mathbf{R}^n\right)$ 上的缓增分布 u,$\varphi(\boldsymbol{x}) \in S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$,$\xi \in \mathscr{H}$,则 $\left(\varphi(\boldsymbol{x}), \xi\right) \in S\left(\mathbf{R}^n\right)$,$u\left[\left(\varphi(\boldsymbol{x}), \xi\right)\right]$ 满足

$$\left|u\left[\left(\varphi(\boldsymbol{x}), \xi\right)\right]\right| \leqslant C|\xi| \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n} \left|\boldsymbol{x}^\beta \partial^\alpha \varphi(\boldsymbol{x})\right|,$$

由 Riesz 表现定理[3],存在唯一的向量记为 $u\left(\varphi(\boldsymbol{x})\right) \in \mathscr{H}$,使得

$$u\left[\left(\varphi(\boldsymbol{x}), \xi\right)\right] = \left(u\left(\varphi(\boldsymbol{x})\right), \xi\right),$$

且

$$\left|u\left(\varphi(\boldsymbol{x})\right)\right| \leqslant C \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n} \left|\boldsymbol{x}^\beta \partial^\alpha \varphi(\boldsymbol{x})\right|,$$

于是 u 定义了由 $S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 到 $\mathscr{H}$ 的连续线性映射.

定义 $S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 的 $\mathscr{H}$ 值缓增分布[8]如下:

定义 1.1　由 $S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 的 $\mathscr{H}$ 的连续线性映射称为 $S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 的 $\mathscr{H}$ 值缓增分布.

命题 1.2　设 u 是由 $S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 到 $\mathscr{H}$ 的线性映射,则 u 是 $\mathscr{H}$ 值缓增分布的充要条件是存在常数 $C > 0$ 及非负整数 m 使得

$$\left|u\left(\varphi(\boldsymbol{x})\right)\right| \leqslant C \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n} \left|\boldsymbol{x}^\beta \partial^\alpha \varphi(\boldsymbol{x})\right|,$$

于是 $\mathscr{H}$ 值缓增分布的平移、旋转、膨胀、自变量反号、Fourier 变换、与 $S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 内函数的卷积、与 $S\left(\mathbf{R}^n\right)$ 内函数的乘积等运算都可建立起来.

设 u 是 $\mathscr{H}$ 值缓增分布,$\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$,$a > 0$,$\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\right) \in \mathbf{Z}_+^n$,$\varphi(\boldsymbol{x}) \in S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$,则

(1)$\left(\tau_h u\right)(\varphi) = u\left(\tau_{-h}\varphi\right)$,其中 $\left(\tau_h \varphi\right)(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})$;

(2)$\tilde{u}(\varphi) = u(\tilde{\varphi})$,其中 $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \varphi(-\boldsymbol{x})$;

(3)$\left(\delta_a u\right)(\varphi) = u\left(a^{-n} \delta_{a^{-1}} \varphi\right)$,其中 $\left(\delta_a \varphi\right)(\boldsymbol{x}) = \varphi(a\boldsymbol{x})$;

(4)$\left(\partial^\alpha u\right)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u\left(\partial^\alpha \varphi\right)$;

(5)$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})$;

(6)$(u * \varphi)(\boldsymbol{x}) = u\left(\tau_x \tilde{\varphi}\right)$;

(7)设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可逆线性变换,则 $(Au)(\varphi) = \left|\det A\right|^{-1} u\left(A^{-1}\varphi\right)$,其中 $(A\varphi)(\boldsymbol{x}) = \varphi(A\boldsymbol{x})$;

(8)取 $\mathscr{H}$ 的标准正交基 $\left\{\boldsymbol{e}_n\right\}$,对于任意 $\boldsymbol{\omega} \in \mathscr{H}$,定义 $\boldsymbol{\omega}$ 关于基底 $\left\{\boldsymbol{e}_n\right\}$ 的共轭为

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \sum_n \left(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{\omega}\right) \boldsymbol{e}_n,$$

共轭是一种半对合的等距变换.对 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{H}$,有 $\left(\overline{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\sigma}\right) = \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\omega}\right)$,定义

$$\overline{u}(\varphi) = \overline{u(\overline{\varphi})}.$$

(9)若 $\sigma(\boldsymbol{x}) \in S\left(\mathbf{R}^n\right)$,定义 $(u\sigma)(\varphi) = u(\sigma\varphi)$ 作为 u 与 σ 的乘积.

例　对于 $f \in L^p\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)\left(1 \leqslant p \leqslant \infty\right)$,$\varphi(\boldsymbol{x}) \in S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$,定义

$$f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\varphi(\boldsymbol{x}), \overline{f(\boldsymbol{x})}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

则 f 可视为 $S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 上数值缓增分布.如果 f 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathscr{H}$ 的强可测函数,且存在常数 $c > 0$ 及自然数 $m > 0$ 使得 $\left|f(\boldsymbol{x})\right| \leqslant c|\boldsymbol{x}|^m$,则称 f 为缓增长函数.对每一缓增长函数,由本例中积分定义的是数字缓增分布.对于 $S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 上数值缓增分布,上面所列的9种运算仍然是实用的.

在定义了 $\mathscr{H}$ 值缓增分布[9]之后,将 $L^p\left(\mathbf{R}^n\right)$ 到 $L^p\left(\mathbf{R}^n\right)$ 的与平移可交换的有界线性算子的刻画,推广至 $\mathscr{H}$ 值函数空间.

2　主要结果

定理 2.1　设 $\mathscr{H}$ 是可分Hilbert空间,$\mathscr{H}$ 值缓增分布 $u \in \left(L^2, L^2\right)$ 的充分必要条件是,存在 $b \in L^\infty\left(\mathbf{R}^n, B(\mathscr{H}, \mathscr{H})\right)$,使得 $\hat{u} = b$.在这种情形,$\|b\|_\infty$ 是算子 T: $L^2\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right) \bigcap S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right) \to L^2\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 的范数,其中 $T(\varphi) = u * \varphi$,对 $\varphi(x) \in S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 成立,且 $(u * \varphi)^\wedge = \hat{u}\hat{\varphi}$.

证明:(1)考虑从 $L^2\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$ 到 $L^2\left(\mathbf{R}^n\right)$ 的有界线性算子 T,假设 T 是与平移可交换的算子.对于 $\mathscr{H}$ 的标准正交基 $\left\{\boldsymbol{e}_n\right\}$,考虑从 $L^2\left(\mathbf{R}^n\right)$ 到 $L^2\left(\mathbf{R}^n\right)$ 与平移可交换的有界线性算子 $T\left(f(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_n\right)$,则存在 $S\left(\mathbf{R}^n\right)$ 上的缓增分布 $\boldsymbol{\sigma}_n$ 使得对任意 $\varphi \in S\left(\mathbf{R}^n\right)$,及 $b_n(\boldsymbol{x}) \in L^\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$,有

$$T\left(\varphi(\cdot) \boldsymbol{e}_n\right) = \sigma_n * \varphi,$$

$$\left(\sigma_n * \varphi\right)^\wedge = b_n \hat{\varphi},$$

对于任意 $\varphi(\boldsymbol{x}) \in S\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}\right)$,则内积 $\left(\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_n\right) \in S\left(\mathbf{R}^n\right)$.则由上面的分析可知:

$$T\left(\left(\varphi(\cdot), \boldsymbol{e}_n\right) \boldsymbol{e}_n\right) = \sigma_n * \left(\varphi(\cdot), \boldsymbol{e}_n\right),$$

$$\left(\sigma_n*\left(\varphi(\cdot),e_n\right)\right)^{\wedge}=b_n\left(\hat{\varphi},e_n\right)=\left(\hat{\varphi},\overline{b_n}e_n\right).$$

故

$$T\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\varphi(\cdot),e_n\right)e_n\right)=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n*\left(\varphi(\cdot),e_n\right),$$

$$\left[T\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\varphi(\cdot),e_n\right)e_n\right)\right]^{\wedge}=\sum_{n=1}^{N}\left(\sigma_n*\left(\varphi(\cdot),e_n\right)\right)^{\wedge},$$

$$=\sum_{n=1}^{N}b_n\left(\hat{\varphi},e_n\right)=\left(\hat{\varphi},\sum_{n=1}^{N}\overline{b_n}e_n\right). \tag{1}$$

于是由Plancherel定理[2]，有

$$\left\|T\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\varphi(\cdot),e_n\right)e_n\right)\right\|_2=$$

$$\left\{\int_{\mathbf{R}^n}\left|\left(\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}),\sum_{n=1}^{N}\overline{b_n(\boldsymbol{x})e_n}\right)\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\|T\|\|\varphi\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)},$$

由$S\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$在$L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$中的稠密性[10]，可知对任意$f\in L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$，

$$\left\|T\left(\sum_{n=1}^{N}\left(f(\cdot),e_n\right)e_n\right)\right\|_2=$$

$$\left\{\int_{\mathbf{R}^n}\left|\left(\hat{f}(\boldsymbol{x}),\sum_{n=1}^{N}\overline{b_n(\boldsymbol{x})e_n}\right)\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\|T\|\|f\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}.$$

令$\xi(\boldsymbol{x})=\sum_{n=1}^{N}\overline{b_n(\boldsymbol{x})}e_n/\left|\sum_{n=1}^{N}\overline{b_n(\boldsymbol{x})}e_n\right|$，当$\left|\sum_{n=1}^{N}\overline{b_n(\boldsymbol{x})}e_n\right|>0$时；$\xi(\boldsymbol{x})=0$，当$\left|\sum_{n=1}^{N}\overline{b_n(\boldsymbol{x})}e_n\right|=0$时．对于任意$\sigma(\boldsymbol{x})\in L^2\left(\mathbf{R}^n\right)$，则$\sigma(\boldsymbol{x})\xi(\boldsymbol{x})\in L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$，且$\left\|\sigma(\boldsymbol{x})\xi(\boldsymbol{x})\right\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}\leqslant\|\sigma\|_2$．于是取$f\in L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$使得$\hat{f}(\boldsymbol{x})=\sigma(\boldsymbol{x})\xi(\boldsymbol{x})$，得到

$$\left\{\int_{\mathbf{R}^n}\left|\sigma(\boldsymbol{x})\right|^2\sum_{n=1}^{N}\left|b_n(\boldsymbol{x})\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\|T\|\|\sigma\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n\right)}. \tag{2}$$

在$\|\sigma\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n\right)}\leqslant 1$的条件下对式(2)取上确界，得

$$\left\|\left\{\sum_{n=1}^{N}\left|b_n(\boldsymbol{x})\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{\infty}\leqslant\|T\|, \tag{3}$$

令$N\to\infty$，对公式(3)取极限，有

$$\left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n(\boldsymbol{x})\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{\infty}\leqslant\|T\|, \tag{4}$$

令$b(\boldsymbol{x})=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\boldsymbol{x})e_n$，则由(4)，$b(\boldsymbol{x})\in L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$，且

$$\|b\|_{L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}=\left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n(\boldsymbol{x})\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{\infty}\leqslant\|T\|,$$

由式(1)有

$$\left(T(\varphi)\right)^{\wedge}(\boldsymbol{x})=\left(\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}),\overline{b(\boldsymbol{x})}\right), \tag{5}$$

且

$$\|T\|=\|b\|_{L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}. \tag{6}$$

(2)设$T:L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)\to L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$与平移可交换的有界线性算子．对于$\mathscr{H}$的标准正交基$\left\{e_n\right\}$[11]，考虑从$L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)\to L^2\left(R^n\right)$的有界线性算子$\left(Tf,e_n\right)$，则其是与平移可交换的．由上文可知，存在$\sigma_n\in L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$使得

$$\left(Tf,e_n\right)^{\wedge}=\left(\widehat{f},\sigma_n\right),$$

于是

$$\left\{\sum_{n=1}^{N}\left(Tf,e_n\right)e_n\right\}^{\wedge}=\sum_{n=1}^{N}\left(\widehat{f},\sigma_n\right)e_n.$$

由Plancherel定理[2]，

$$\left\{\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{n=1}^{N}\left|\left(\hat{f}(\boldsymbol{x}),\sigma_n(\boldsymbol{x})\right)\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}\left(Tf,e_n\right)e_n\right\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)} \tag{7}$$

$$\leqslant\left\|T(f)\right\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}\leqslant\|T\|\|f\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)},$$

令$N\to\infty$，由单调收敛定理[12]

$$\|Tf\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}=\left\{\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\hat{f}(\boldsymbol{x}),\sigma_n(\boldsymbol{x})\right)\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\|T\|\|f\|_{L^2\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}, \tag{8}$$

定义$B(\mathscr{H},\mathscr{H})$值算子函数列

$$b_N(x)(\varphi)=\sum_{n=1}^{N}\left(\varphi,\sigma_n(x)\right)e_n,$$

由式(7)得算子范数$\left|b_N(x)\right|\in L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n\right)$，且

$$\left\|b_N\right\|_{L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}\leqslant\|T\|,$$

则存在$\mathbf{R}^n$的零测度子集E，使得$\left|b_N(\boldsymbol{x})\right|\leqslant\|T\|$对一切$\boldsymbol{x}\in E^c$，$N\geqslant 1$都成立．

由命题1.1可知，由

$$b(\boldsymbol{x})(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi,\sigma_n(\boldsymbol{x})\right)e_n.$$

定义$B(\mathscr{H},\mathscr{H})$值算子函数$b(\boldsymbol{x})$，使得$b(\boldsymbol{x})\in L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$，且$b(\boldsymbol{x})$是$b_N(\boldsymbol{x})$的强极限[13]，

$$(Tf)^{\wedge}(\boldsymbol{x})=b(\boldsymbol{x})\left(\hat{f}(\boldsymbol{x})\right), \tag{9}$$

$$\|b\|_{L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}\leqslant\|T\|,$$

反向不等式$\|b\|_{L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}\geqslant\|T\|$显然成立．于是

$$\|b\|_{L^{\infty}\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)}=\|T\|. \tag{10}$$

至此，定理2.1的必要性证毕．

注2.1 设$\mathscr{H}_1$与$\mathscr{H}_2$是可分Hilbert空间，则可对于$S\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}_1\right)$上$\mathscr{H}_2$值缓增分布的定义及其基本性质、运算仍与$S\left(\mathbf{R}^n,\mathscr{H}\right)$上的情形相仿．对于

$L^p\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}_1\right)$到$L^q\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}_2\right)$与平移可交换的有界线性算子的表现定理,定理的结论在这种情形下仍成立.

注 2.2　本定理的证明参考了Stein和Weiss[2]关于$L^p\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}_1\right)$到$L^q\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}_2\right)$的算子的相关证明,是$L^p\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}_1\right)$到$L^q\left(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}_2\right)$的算子的一种延伸与推进.

3　结束语

本文对向量值函数空间上的一类有界线性算子进行了刻画,得到了向量值函数的奇异积分里的一个新的算子方面的结论.向量值函数空间上的有界线性算子,随着空间维数的降低,其性质和结构会越来越复杂,本文给出的是$L^2\left(\mathbf{R}^n\right)$空间上的有界线性算子,并希望未来可以给出$L^1\left(\mathbf{R}^n\right)$空间上的有界线性算子的具体结构和性质及其证明.文章主要不足之处在于虽然很确定最终的结论是正确的,但是中间的证明过程略显冗杂,理论上应该有更加简便一点的证明方法,希望可以给出更好的证明过程.

参 考 文 献

[1] HILLE E,PHILLIPS R S.泛函分析与半群[M].吴智泉,王振鹏,刘隆复,译.上海:上海科学技术出版社,1957.

[2] STEIN E M,WEISS G L.欧氏空间上的Fourier分析引论[M].张阳春,译.上海:上海科学技术出版社,1987.

[3] KOUMOULLIS G. On the Radon-Nikodym Theorem[J]. American Mathematical Monthly,2008,6:115.

[4] JUNG W,METZGER R,MORALES C A,et al. A distance between bounded linear operators[J]. Topology and its Applications,2020,284:107359.

[5] 林庆泽.乘法算子在导数Hardy空间上的严格奇异性[J].乐山师范学院学报,2019,34(12):14-17.

[6] 施咸亮,陈洁.紧框架中的Korovkin型定理[J].中国科学(数学),2013,43(11):1131-1144.

[7] CALDERON A P. An atomic decomposition of distributions in parabolic hp spaces[J]. Advances in Mathematics,1977,25:216-225.

[8] CALDERON A P,TORCHINSKY A. Parabolic maximal functions associated with a distribution[J]. Advances in Mathematics,1975,16(1):1-64.

[9] CALDERON A P,TORCHINSKY A. Parabolic maximal functions associated with a distribution Ⅱ[J]. Advances in Mathematics,1977,24(1):101-171.

[10] CALDERON A P,ZYGMUND A. On the existence of certain singular integrals[J]. Acta Mathematica,1952,88(1):85-139.

[11] RIVIERE N M,SAGHER Y. Interpolation between L^∞ and H^1,the real method[J]. Functional Analysis,1973,14(4):401-409.

[12] STEIN E M. Singular integrals and differentiability properties of functions[M]. New Jersey:Princeton University Press,1970:1-24.

[13] STEIN E M. Harmonic analysis:real-variable methods,orthogonality,and oscillatory integrals[M]. New Jersey:Princeton University Press,1993.

Operator characterization of L^2 space to L^2 space

WANG Chengyong, WANG Xuyan

(Department of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing　100044)

Abstract: This paper mainly aims to extend the known bounded linear operators, translational and commutative, from $L^p\left(\mathbf{R}^n\right)$ to $L^p\left(\mathbf{R}^n\right)$ to the L^2 space through the space decomposition theorem and singular integral theory proposed by Calderon, defining the specific expression form of bounded linear operators from the L^2 space to the L^2 space by the slowly increasing distribution function class, which was verified.

Keywords: L^2 space; study of bounded operators; temperate distributions

(责任编辑:马田田)