第42卷　第4期　　首都师范大学学报(自然科学版)　　No.4
2021年8月　　Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition)　　Aug.,2021

一类特殊二阶锥绝对值方程问题解的区间估计*

赵敬云**，苗新河

（天津大学数学学院，天津　300350）

摘要:本文采用区间算法处理一类特殊二阶锥绝对值方程问题,确定解的估计区间所在的范围,根据该范围将二阶锥绝对值方程转化为普通区间方程组进行求解.理论分析和数值实验表明该方法是可行有效的.

关键词:二阶锥;绝对值方程;区间算法

中图分类号:O242.2　　**DOI**:10.19789/j.1004-9398.2021.04.001

0　引　言

绝对值方程问题是一类与线性互补问题有着紧密联系的优化问题.由于互补理论在工程学、运筹学和博弈论等众多领域有着广泛的应用背景,绝对值方程问题受到了国内外专家学者们的密切关注,因此其研究具有一定的理论意义和价值.二阶锥绝对值方程问题是一类在二阶锥框架下的绝对值方程问题,与二阶锥线性互补问题有着紧密联系的优化问题.本文考虑二阶锥绝对值方程(second-order-cones absolute value equations, SOCAVE)问题,公式为

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}|, \tag{1}$$

式中$\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{n}$,$|\boldsymbol{x}|$表示二阶锥意义下$\boldsymbol{x}$的绝对值.通常意义下,二阶锥$\mathscr{K}^{n}$是若干单个二阶锥的笛卡尔乘积:$\mathscr{K}^{n} = \mathscr{K}^{n_1} \times \mathscr{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathscr{K}^{n_r}$,$(n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n)$,其中$\mathscr{K}^{n_i} = \left\{\left(x_1, x_2\right) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n_i - 1} : \left\|x_2\right\| \leqslant x_1\right\}$,$\|\cdot\|$表示欧式范数.考虑到笛卡尔积的性质,所有的分析同样适用于多个二阶锥乘积的情形.为方便分析,本文只考虑单个二阶锥的情况,即$r = 1$.

在欧氏空间$\mathbf{R}^n$中,一般标准的绝对值方程(absolute value equations, AVE)具有如下形式:$\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}|$.当矩阵$\boldsymbol{A}$可逆时,可等价转化成问题(1)的形式.AVE问题最初是由Rohn[1]引入的概念,随后被众多学者所关注并相继投身于此方面的研究中,像线性规划、二次规划、双矩阵博弈等问题都可以看成求解绝对值方程问题[2-6]. Mangasarian和Meyer[2]给出了绝对值方程解的存在性和唯一性的充分条件;在文献[3-7]中,也分别探讨了绝对值方程问题与线性互补问题之间的关系.此外,关于绝对值方程问题的求解,已出现多种求解方法,如:广义牛顿法[5,8]、光滑牛顿法[9]、符号标记法[10]. Hladík[11]利用解的区间近似估计了绝对值方程的解,还有多种方法求解绝对值方程,详细可见文献[7,11-12].另外,在二阶锥框架下:Hu等[13]研究了二阶锥绝对值方程等价于一类二阶锥线性互补问题,并提出求解二阶锥绝对值方程问题的广义牛顿法;Miao等[14-15]进一步探讨了求解二阶锥绝对值方程问题的光滑牛顿法.在本文中,将推广Hladík[11]的思想,在二阶锥框架下,采用区间方法来近似估计绝对值方程问题(1)的解.同时,本文也进行了数值实验来比较这些方法在计算时间和估计质量方面的差异,通过具体数值算例来验证算法的可行有效性.

1　基础知识

本小节主要介绍一些有关二阶锥的基本概念和相关结论,为后面的分析提供理论基础,更多相关内容可参见文献[16-17].

对于欧氏空间$\mathbf{R}^n$中任意的2个向量$\boldsymbol{x}=\left(x_1, \boldsymbol{x}_2\right)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$和$\boldsymbol{y} = \left(y_1, \boldsymbol{y}_2\right) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$,$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的内积定义为$<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> := x_1 y_1 + <\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2> = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$. $\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的若当乘积定义为

收稿日期:2020-06-28

* 国家自然科学基金项目(11471241)

** 通信作者:zhaojingyun1104@163.com

$$\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ y_1\boldsymbol{x}_2 + x_1\boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix},$$

式中$\circ$表示若当乘积的运算符号.基于此概念,若当乘积意义下的单位元素为 $\boldsymbol{e} = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$.此外,$\boldsymbol{x}^2$表示$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}$;$\sqrt{\boldsymbol{x}}$表示$\boldsymbol{x} \in \mathscr{K}^n$的平方根向量,即$\sqrt{\boldsymbol{x}} \circ \sqrt{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.由此表达形式,SOCAVE问题(1)中的绝对值$|\boldsymbol{x}|$可定义为

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}}.$$

为了进一步明确$|\boldsymbol{x}|$的表达式,需要用到元素$\boldsymbol{x}$谱分解的概念.对于任意的向量$\boldsymbol{x} = (x_1, \boldsymbol{x}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$,关于二阶锥$\boldsymbol{K}^n$,元素$\boldsymbol{x}$的谱分解为

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2, \tag{2}$$

式中$\lambda_i = x_1 + (-1)^i\left\|\boldsymbol{x}_2\right\|$ $(i = 1, 2)$称为$\boldsymbol{x}$的谱特征值;$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$称为$\boldsymbol{x}$的Jordan谱分解基,$\boldsymbol{u}_i$取值为

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1, (-1)^i\dfrac{\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}}{\left\|\boldsymbol{x}_2\right\|}\right)^{\mathrm{T}}, & \left\|\boldsymbol{x}_2\right\| \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(1, (-1)^i\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}, & \left\|\boldsymbol{x}_2\right\| = 0, \end{cases} \tag{3}$$

式中$\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^{n-1}$是满足条件$\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$的任意向量,且易证$\boldsymbol{u}_i$为二阶锥$\mathscr{K}^n$上的向量.

引理1.1[15] 对任意的$\boldsymbol{x} = \left(x_1, \boldsymbol{x}_2\right) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$,则其特征向量$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$满足:

$$\boldsymbol{u}_1 \circ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u}_i \circ \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i \quad (i = 1, 2).$$

对任意的向量$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$,若令$\boldsymbol{x}_+$表示$\boldsymbol{x}$到二阶锥$\mathscr{K}^n$上的投影,$\boldsymbol{x}_-$表示$-\boldsymbol{x}$到二阶锥的对偶锥$(\mathscr{K}^n)^*$上的投影.因为二阶锥是自对偶的,即$\mathscr{K}^n = (\mathscr{K}^n)^*$,基于二阶锥的特殊结构,结合$\boldsymbol{x}$谱分解形式和投影的性质,可得$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_+ - \boldsymbol{x}_-$,并且投影$\boldsymbol{x}_+$,$\boldsymbol{x}_-$的表达式可分别表示为:

$$\boldsymbol{x}_+ = (\lambda_1)_+\boldsymbol{u}_1 + (\lambda_2)_+\boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{x}_- = (-\lambda_1)_+\boldsymbol{u}_1 + (-\lambda_2)_+\boldsymbol{u}_2,$$

式中$(\alpha)_+ = \max\{0, \alpha\}, \alpha \in \mathbf{R}$.此外,可得到问题(1)中$\boldsymbol{x}$的绝对值也可定义为$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}_+ + \boldsymbol{x}_-$.事实上,在二阶锥框架下,$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}_+ + \boldsymbol{x}_-$与$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x}}$的定义形式是等价的.结合投影表达形式和谱分解形式,则绝对值$|\boldsymbol{x}|$具有如下形式

$$|\boldsymbol{x}| = \left|\lambda_1\right|\boldsymbol{u}_1 + \left|\lambda_2\right|\boldsymbol{u}_2. \tag{4}$$

为了方便讨论,对于元素$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$,本文用符号“$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$”或“$\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{x}$”表示为“$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathscr{K}^n$”.由元素的谱分解和二阶锥的特性,则有下面的结论.

定理1.1 若$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$具有相同的Jordan谱分解基且$|\boldsymbol{y}| \geqslant |\boldsymbol{x}|$,则$-|\boldsymbol{y}| \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant |\boldsymbol{y}|$.

证明:因为$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$具有相同的Jordan谱分解基,不妨设$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{y} = \mu_1\boldsymbol{u}_1 + \mu_2\boldsymbol{u}_2$,所以$|\boldsymbol{x}| = \left|\lambda_1\right|\boldsymbol{u}_1 + \left|\lambda_2\right|\boldsymbol{u}_2$, $|\boldsymbol{y}| = \left|\mu_1\right|\boldsymbol{u}_1 + \left|\mu_2\right|\boldsymbol{u}_2$.由$|\boldsymbol{x}| \leqslant |\boldsymbol{y}|$,则易得$\left|\lambda_1\right| \leqslant \left|\mu_1\right|$,$\left|\lambda_2\right| \leqslant \left|\mu_2\right|$.从而可得,$-\left|\mu_1\right| \leqslant \lambda_1 \leqslant \left|\mu_1\right|$和$\left|\mu_2\right| \leqslant \lambda_2 \leqslant \left|\mu_2\right|$,

即$-|\boldsymbol{y}| \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant |\boldsymbol{y}|$.

定理1.2 若矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ 0 & p\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$,则$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{Ax}$、$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}|$、$\left|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}|\right|$以及$|\boldsymbol{Ax}|$都具有相同的Jordan谱分解基.

证明:设$\boldsymbol{x}=(x_1, \boldsymbol{x}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$,则$\boldsymbol{Ax}=(\alpha x_1, p\boldsymbol{x}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$.根据谱分解的表达式(2),通过直接计算可知$\boldsymbol{x}$、$|\boldsymbol{x}|$、$\boldsymbol{Ax}$以及$|\boldsymbol{Ax}|$具有相同的Jordan谱分解基.同理,$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}|$、$\boldsymbol{Ax}$以及$\left|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}|\right|$也具有相同的Jordan谱分解基.由此,命题得证.

定理1.3 对于$\boldsymbol{A}x$型向量,若$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ 0 & p\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$,若令$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{Ax} = \gamma_1\boldsymbol{u}_1 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2$,则$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$,

式中$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha + p}{2} & \dfrac{\alpha - p}{2} \\ \dfrac{\alpha - p}{2} & \dfrac{\alpha + p}{2} \end{bmatrix}$.

证明:由$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\dfrac{\boldsymbol{x}_2}{\left\|\boldsymbol{x}_2\right\|} \end{bmatrix}$,

故$\boldsymbol{Ax} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha(\lambda_1 + \lambda_2) \\ p(\lambda_2 - \lambda_1)\dfrac{\boldsymbol{x}_2}{\left\|\boldsymbol{x}_2\right\|} \end{bmatrix}$.结合$\boldsymbol{Ax} = \gamma_1\boldsymbol{u}_1 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 \\ (\gamma_2 - \gamma_1)\dfrac{\boldsymbol{x}_2}{\left\|\boldsymbol{x}_2\right\|} \end{bmatrix}$,可得出:$\begin{cases} \alpha(\lambda_1 + \lambda_2) = \gamma_1 + \gamma_2 \\ p\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) = \gamma_2 - \gamma_1 \end{cases}$.

解之得$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{(\alpha + p)\lambda_1 + (\alpha - p)\lambda_2}{2} \\ \gamma_2 = \dfrac{(\alpha - p)\lambda_1 + (\alpha + p)\lambda_2}{2} \end{cases}$.因而$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$,式中$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha + p}{2} & \dfrac{\alpha - p}{2} \\ \dfrac{\alpha - p}{2} & \dfrac{\alpha + p}{2} \end{bmatrix}$.

2 SOCAVE(1)解的区间估计

在二阶锥框架下，欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量并不是都具有相同的Jordan谱分解基，这也造成标准AVE问题的有些结论在SOCAVE问题中是不成立的．要想把Hladík[11]的思想推广到SOCAVE问题，本文研究一类特殊的SOCAVE问题，即矩阵 $B=\begin{bmatrix}\alpha & O^{\mathrm{T}}\\ 0 & pI\end{bmatrix}$．此外，设 $|A|$ 表示为 A 的绝对值矩阵，即矩阵中每一个元素取绝对值；A_{i*} 表示 A 的第 i 行；A 的谱半径为 $\rho(A)=\max\{|\lambda|:\lambda\epsilon C\text{是}A\text{的特征值}\}$；$\|A\|_\infty=\max\limits_{i=1,\cdots,n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$；$\tilde{e}=[1,1]^{\mathrm{T}}$．

定义2.1　设 $A_1=[a_{ij}^{(1)}]$，$A_2=[a_{ij}^{(2)}]$ 以及 $A=[a_{ij}]$，则区间矩阵定义为 $[A_1,A_2]=\{A\in\mathbf{R}^{n\times n}:a_{ij}^{(1)}\leqslant a_{ij}\leqslant a_{ij}^{(2)},\forall i,j\}$，记为 $A:=[A_1,A_2]$；区间向量定义为 $[b_1,b_2]=\{b\in\mathbf{R}^n:b_1\leqslant b\leqslant b_2\}$，记为 $b:=[b_1,b_2]$；向量 $a\leqslant b$ 表示对任意的 i，都有 $a_i\leqslant b_i$．

定义2.2　中点矩阵 A_c 定义为 $A_c=\frac{1}{2}(A_1+A_2)$，半径矩阵 A_Δ 定义为 $A_\Delta=\frac{1}{2}(A_2-A_1)$，中点向量为 $b_c=\frac{1}{2}(b_1+b_2)$，半径向量为 $b_\Delta=\frac{1}{2}(b_2-b_1)$．

定义2.3　区间线性方程组问题为：$Ax=b:=\{Cx=d:C\in A,d\in b\}$．

2.1 Bauer-Skeel型区间界

对于SOCAVE问题（1），如果矩阵 B 满足 $\|B\|_\infty\sqrt{n}<1$，根据文献[16]中的定理4.2，可知SOCAVE问题（1）存在唯一解．此外，x，b 和 $B|x|$ 会具有相同的Jordan谱分解基，不妨设

$$x=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,\ b=\delta_1u_1+\delta_2u_2\ \text{且}\ B|x|=v_1u_1+v_2u_2.$$

若记 $\lambda:=(\lambda_1,\lambda_2)^{\mathrm{T}}$，$\bar{b}:=(\delta_1,\delta_2)^{\mathrm{T}}$ 且 $v:=(v_1,v_2)^{\mathrm{T}}$，则谱特征值向量 λ，$\bar{b}$ 以及 v 满足下面的结论．

定理2.1　对于SOCAVE问题(1)，若 $\|B\|_\infty\sqrt{n}<1$，则向量 λ、$\bar{b}$ 以及 v 满足：

$$-(I-|M|)^{-1}|M|\cdot|\bar{b}|\leqslant\lambda-\bar{b}\leqslant(I-|M|)^{-1}|M|\cdot|\bar{b}|.\tag{5}$$

证明：对于SOCAVE问题(1)：$x-b=B|x|$，若 $\|B\|_\infty\sqrt{n}<1$，则问题(1)存在唯一解，且 x，b 和 $B|x|$ 具有相同的Jordan谱分解基．令

$$x=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,\ b=\delta_1u_1+\delta_2u_2\ \text{且}\ B|x|=v_1u_1+v_2u_2,$$

因为 $x-b=(\lambda_1-\delta_1)u_1+(\lambda_2-\delta_2)u_2$，所以 $\lambda_1-\delta_1=v_1$，$\lambda_2-\delta_2=v_2$．

若记 $\lambda:=(\lambda_1,\lambda_2)^{\mathrm{T}}$，$\bar{b}:=(\delta_1,\delta_2)^{\mathrm{T}}$ 且 $v:=(v_1,v_2)^{\mathrm{T}}$，结合定理1.3，于是有

$$\big(I-|M|\big)\begin{bmatrix}|\lambda_1-\delta_1|\\|\lambda_2-\delta_2|\end{bmatrix}\leqslant|M|\begin{bmatrix}|\delta_1|\\|\delta_2|\end{bmatrix}.$$

因为 $\|B\|_\infty\sqrt{n}=\max\{|\alpha|,|p|\}\sqrt{n}<1$，所以 $\rho(|M|)=\max\{|\alpha|,|p|\}<1$．进而矩阵 $I-|M|$ 是非奇异的，故 $(I-|M|)^{-1}$ 也是非奇异的．又由 $(I-|M|)^{-1}=\sum_{k=0}^\infty|M|^k>O$，因此，

$$\begin{bmatrix}|\lambda_1-\delta_1|\\|\lambda_2-\delta_2|\end{bmatrix}\leqslant(I-|M|)^{-1}|M|\cdot\begin{bmatrix}|\delta_1|\\|\delta_2|\end{bmatrix},$$

即　$-(I-|M|)^{-1}|M|\cdot|\bar{b}|\leqslant\lambda-\bar{b}\leqslant(I-|M|)^{-1}|M|\cdot|\bar{b}|$．命题得证．

基于定理2.1，若令 $(I-|M|)^{-1}|M|\cdot|\bar{b}|\coloneqq m=(m_1,m_2)^{\mathrm{T}}$，则 $\bar{b}-m\leqslant\lambda\leqslant\bar{b}+m$．由此可知 $x-b=B|x|$ 的解所在的区间为：

$$x^{\mathrm{BS}}:=[(\delta_1-m_1)u_1+\big(\delta_2-m_2\big)u_2,\ (\delta_1+m_1)u_1+(\delta_2+m_2)u_2].\tag{6}$$

由于SOCAVE问题(1)是一类特殊的二阶锥绝对值方程问题，并且矩阵 B 的特殊结构，可知方程的解以及向量 b 具有相同的Jordan谱分解基 $\{u_1,u_2\}$．由引理1.1得知 $u_1\perp u_2$．又根据谱分解的表达式，可知 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$，所以对任意的SOCAVE问题(1)的解向量 x，可能会在图1中①、②、③的区域，不可能出现在④的区域．

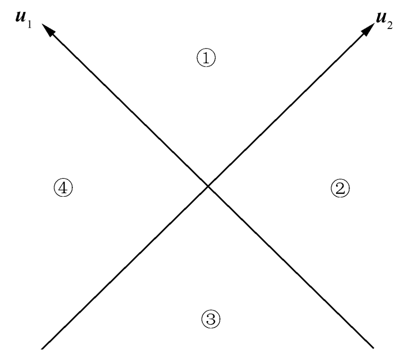

图1　谱向量平面

定理2.2　对于SOCAVE问题(1)，若 $B=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ O^{\mathrm{T}} & pI\end{pmatrix}$，$x=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$ 以及 $b=\delta_1u_1+\delta_2u_2$，则SOCAVE(1)的解为下面3种情况：

(i)若解位于区域①,则$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$;

(ii)若解位于区域②,则解$\boldsymbol{x}$的谱特征值满足条件$\begin{cases}\lambda_1(1+\alpha)+\lambda_2(1-\alpha)=\delta_1+\delta_2\\ \lambda_1(1+p)+\lambda_2(p-1)=\delta_1-\delta_2\end{cases}$;

(iii)若解位于区域③,则$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$.

证明:(i)当解位于区域①时,有$|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{x}$,即$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}|$变成$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,即$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$;

(ii)当解位于区域②时,则$|\boldsymbol{x}|=-\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2$,且取$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{2}(1,-\frac{\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{x}_2\|})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{2}(1,\frac{\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{x}_2\|})^{\mathrm{T}}$,根据$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}|$,于是有

$$\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2-(\delta_1\boldsymbol{u}_1+\delta_2\boldsymbol{u}_2)=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & p\boldsymbol{I}\end{pmatrix}(-\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2).$$

进而有
$$\begin{pmatrix}(\lambda_1-\delta_1)+(\lambda_2-\delta_2)\\ \frac{[-(\lambda_1-\delta_1)+(\lambda_2-\delta_2)]\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(-\lambda_1+\lambda_2)\\ \frac{(\lambda_1+\lambda_2)p\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\end{pmatrix},$$

整理可得

$$\begin{cases}(\lambda_1-\delta_1)+(\lambda_2-\delta_2)=\alpha(-\lambda_1+\lambda_2)\\ -(\lambda_1-\delta_1)+(\lambda_2-\delta_2)=(\lambda_1+\lambda_2)p\end{cases},$$

即$\begin{cases}\lambda_1(1+\alpha)+\lambda_2(1-\alpha)=\delta_1+\delta_2\\ \lambda_1(1+p)+\lambda_2(p-1)=\delta_1-\delta_2\end{cases}$,由此可求得$\lambda_1$和$\lambda_2$,即可得到问题的解;

(iii)当解位于区域③时,则$|\boldsymbol{x}|=-\boldsymbol{x}$,则有$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,从而有$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$.命题得证.

通过定理2.2,可知当整个解区间$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$分别单独位于区域①或②或③时,二阶锥绝对值方程$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}|$的解可直接计算求解.若解区间$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$横跨不同的区域时,则求解是非常困难的.由此,以下部分将考虑解区间$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$单独位于同一区域的概率和$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$所在区域个数的均值,当概率和均值越接近于1时,则越容易求解$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}|$的解.

设$\boldsymbol{b}=\delta_1\boldsymbol{u}_1+\delta_2\boldsymbol{u}_2$,则$|\boldsymbol{b}|=|\delta_1|\boldsymbol{u}_1+|\delta_2|\boldsymbol{u}_2$.假设$\delta_1$和$\delta_2$相互独立且$\delta_i$在$[-1,1]$上为均匀分布.由式(6)可知,需考虑到$m_i$和$\delta_i$,即考虑$|\delta_i|$即可,故只需取$|\delta_i|\in[0,1]$.

定理2.3 令$\sigma=2\|\boldsymbol{M}\|_\infty$,若$\sigma\leqslant1$,则$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$位于同一区域的概率至少是$(1-\sigma)^2$.

证明:若$\boldsymbol{x}_\Delta^{\mathrm{BS}}\leqslant|\boldsymbol{x}_c^{\mathrm{BS}}|$,即$\boldsymbol{x}_\Delta^{\mathrm{BS}}=m_1\boldsymbol{u}_1+m_2\boldsymbol{u}_2\leqslant|\delta_1|\boldsymbol{u}_1+|\delta_2|\boldsymbol{u}_2=|\boldsymbol{x}_c^{\mathrm{BS}}|$,则$m_1\leqslant|\delta_1|$且$m_2\leqslant|\delta_2|$,此时$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$位于同一个区域,即$(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{M}|)^{-1}|\boldsymbol{M}||\bar{\boldsymbol{b}}|\leqslant|\bar{\boldsymbol{b}}|$.因为$(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{M}|)^{-1}>\boldsymbol{O}$,因此$2|\boldsymbol{M}||\bar{\boldsymbol{b}}|\leqslant|\bar{\boldsymbol{b}}|$.现假设$|\bar{\boldsymbol{b}}|$满足$\sigma\tilde{\boldsymbol{e}}\leqslant|\bar{\boldsymbol{b}}|\leqslant\tilde{\boldsymbol{e}}$,于是有

$$2|\boldsymbol{M}||\bar{\boldsymbol{b}}|\leqslant2|\boldsymbol{M}|\tilde{\boldsymbol{e}}\leqslant2\|\boldsymbol{M}\|_\infty\tilde{\boldsymbol{e}}=\sigma\tilde{\boldsymbol{e}}\leqslant|\bar{\boldsymbol{b}}|.$$

因此,当$\sigma\tilde{\boldsymbol{e}}\leqslant|\bar{\boldsymbol{b}}|\leqslant\tilde{\boldsymbol{e}}$时,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$位于同一个区域,即$|\delta_i|\in[\sigma,1](i=1,2)$.所以$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$位于同一区域的概率至少是$(1-\sigma)^2$.

定理2.4 若$\sigma\leqslant1$,则$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$所在区域个数的均值最多为$(1+\sigma)^2$.

证明:由于

$$\boldsymbol{x}_\Delta^{\mathrm{BS}}=m_1\boldsymbol{u}_1+m_2\boldsymbol{u}_2=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1}|\boldsymbol{M}||\bar{\boldsymbol{b}}|=$$
$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\sum_{k=0}^{\infty}|\boldsymbol{M}|^k|\boldsymbol{M}||\bar{\boldsymbol{b}}|=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\sum_{k=1}^{\infty}|\boldsymbol{M}|^k|\bar{\boldsymbol{b}}|\leqslant$$
$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\sum_{k=1}^{\infty}|\boldsymbol{M}|^k\tilde{\boldsymbol{e}}\leqslant(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^k\tilde{\boldsymbol{e}}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)\frac{\sigma}{2-\sigma}\tilde{\boldsymbol{e}},$$

当i满足$|\delta|_i\geqslant\sigma$时,因为$\sigma\leqslant1$,则$\frac{\sigma}{2-\sigma}\leqslant\sigma\leqslant|\delta|_i$,由定理2.3,$\lambda_i$的符号确定,且概率为$1-\sigma$;当$|\delta|_i<\sigma$时,$\lambda_i$的符号不确定,且概率为$\sigma$,设$p=\{i:|\delta|_i<\sigma\}$,$p$可能的取值是0,1,2.因此$\boldsymbol{x}^{\mathrm{BS}}$所在区域个数的均值最多为$\sum_{p=0}^{2}C_2^p2^p\sigma^p(1-\sigma)^{2-p}=(1+\sigma)^2$.

2.2 Hansen-Bliek-Rohn型区间界

设$\boldsymbol{x}$为SOCAVE问题(1)的解,由定理2.1的证明,则令

$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{b}=\delta_1\boldsymbol{u}_1+\delta_2\boldsymbol{u}_2$且$\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}|=v_1\boldsymbol{u}_1+v_2\boldsymbol{u}_2$,若记$\boldsymbol{\lambda}:=(\lambda_1,\lambda_2)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}:=(\delta_1,\delta_2)^{\mathrm{T}}$且$\boldsymbol{v}:=(v_1,v_2)^{\mathrm{T}}$,基于定理1.3,于是有$\boldsymbol{\lambda}-\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{v}=\boldsymbol{M}|\boldsymbol{\lambda}|\leqslant|\boldsymbol{M}||\boldsymbol{\lambda}|$.从而谱特征值向量可以化为一个区间线性方程组

$$[\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{M}|,\ \boldsymbol{I}+|\boldsymbol{M}|]\boldsymbol{\lambda}=\bar{\boldsymbol{b}},$$

进而可以得到SOCAVE问题(1)解的谱特征值满足的一个闭区间,即为下面的定理.

定理2.5 设$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2$为SOCAVE问题(1)的解,则其谱特征值$\lambda_i=\dfrac{\left(\frac{h_i}{d_i}-|\delta_i|\right)[-1,1]+\delta_i}{1+(1-\frac{1}{d_i})[-1,1]}$,

式中$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|$,$d_i=(\boldsymbol{C}^{-1})_{ii}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{M}|$,$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac{\alpha+p}{2} & \frac{\alpha-p}{2}\\ \frac{\alpha-p}{2} & \frac{\alpha+p}{2}\end{bmatrix}$.

证明：由 $\boldsymbol{x}$ 为SOCAVE问题(1)的解，则谱特征值向量 $\boldsymbol{\lambda}$，$\bar{\boldsymbol{b}}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 满足区间方程组

$$\left[\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{M}|,\ \boldsymbol{I}+|\boldsymbol{M}|\right]\boldsymbol{\lambda}=\bar{\boldsymbol{b}},$$

即 $\left(\boldsymbol{I}+\xi|\boldsymbol{M}|\right)\boldsymbol{\lambda}=\bar{\boldsymbol{b}}$，其中 $\xi\in[-1,1]$，于是有

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}=-\xi|\boldsymbol{M}|\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}.$$

进而 $\begin{bmatrix}|\lambda_1|\\ |\lambda_2|\end{bmatrix}\leqslant|\boldsymbol{M}|\begin{bmatrix}|\lambda_1|\\ |\lambda_2|\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}|\delta_1|\\ |\delta_2|\end{bmatrix}$. 固定某个 $i\,(i=1,2)$，使得

$$\lambda_i\leqslant\delta_i+\left(|\boldsymbol{M}||\boldsymbol{\lambda}|\right)_i,\ \text{且}\left|\lambda_j\right|\leqslant\left|\delta_j\right|+\left(|\boldsymbol{M}||\boldsymbol{\lambda}|\right)_j,\ i\neq j.\tag{7}$$

取 $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个分量是1、其余分量是0的向量，根据式(7)，则有

$$|\boldsymbol{\lambda}|+\left(\lambda_i-|\lambda_i|\right)\boldsymbol{e}_i\leqslant|\delta|+\left(\delta_i-\left|\delta_i\right|\right)\boldsymbol{e}_i+|\boldsymbol{M}||\boldsymbol{\lambda}|.$$

所以

$$\left(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{M}|\right)|\boldsymbol{\lambda}|+\left(\lambda_i-\left|\lambda_i\right|\right)\boldsymbol{e}_i\leqslant|\delta|+\left(\delta_i-\left|\delta_i\right|\right)\boldsymbol{e}_i.\tag{8}$$

用 $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{M}|)^{-1}$ 分别左乘式(8)两边，整理得

$$|\lambda_i|+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(\lambda_i-\left|\lambda_i\right|\right)\leqslant\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(\delta_i-\left|\delta_i\right|\right).$$

若 $\lambda_i\geqslant0$，则 $\lambda_i\leqslant\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(\delta_i-\left|\delta_i\right|\right)$；若 $\lambda_i<0$，则

$$\left(2\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}-1\right)\lambda_i\leqslant\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(\delta_i-\left|\delta_i\right|\right).$$

由 $\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{M}|)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}|\boldsymbol{M}|^k=\boldsymbol{I}+\sum_{k=1}^{\infty}|\boldsymbol{M}|^k\geqslant\boldsymbol{I}$，因而 $\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\geqslant1$，进而 $2\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}-1>0$，所以 $\lambda_i\leqslant\dfrac{1}{\left(2\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}-1\right)}\left[\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(\delta_i-\left|\delta_i\right|\right)\right]$，故 λ_i 的上界为

$$\lambda_i\leqslant\max\left\{\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(\delta_i-\left|\delta_i\right|\right),\ \frac{1}{\left(2\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}-1\right)}\left[\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(\delta_i-\left|\delta_i\right|\right)\right]\right\}.\tag{9}$$

对于区间方程组 $\left(\boldsymbol{I}-\xi|\boldsymbol{M}|\right)\boldsymbol{\lambda}=\bar{\boldsymbol{b}}$，有 $\left(\boldsymbol{I}-\xi|\boldsymbol{M}|\right)(-\boldsymbol{\lambda})=-\bar{\boldsymbol{b}}$，类似于上面的分析，于是有 $-\lambda_i\leqslant\max\left\{\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(-\delta_i-\left|\delta_i\right|\right),\ \dfrac{1}{\left(2\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}-1\right)}\cdot\left[\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(-\delta_i-\left|\delta_i\right|\right)\right]\right\}$，整理可得

$$\lambda_i\geqslant\min\left\{-\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(\delta_i+\left|\delta_i\right|\right),\ \frac{1}{\left(2\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}-1\right)}\left[-\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i+\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}\left(\delta_i+\left|\delta_i\right|\right)\right]\right\}.\tag{10}$$

结合式(9)和式(10)可得 λ_i 的取值范围为

$$\lambda_i=\frac{\left(\dfrac{\left(\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|\right)_i}{\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}}-\left|\delta_i\right|\right)[-1,1]+\delta_i}{\left[\dfrac{1}{\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}},\ 2-\dfrac{1}{\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ii}}\right]}=\frac{\left(\dfrac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right)[-1,1]+\delta_i}{1+\left(1-\dfrac{1}{d_i}\right)[-1,1]}.$$

命题得证.

对于SOCAVE问题(1)：$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}|$，若 $\boldsymbol{x}$ 为问题(1)的解，则定理2.5给出了解的谱特征值满足的区间范围为

$$\lambda_i=\frac{\left(\dfrac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right)[-1,1]+\delta_i}{1+\left(1-\dfrac{1}{d_i}\right)[-1,1]},$$

式中 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{C}^{-1}|\delta|$，$d_i=(\boldsymbol{C}^{-1})_{ii}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{M}|$，$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha+p}{2}&\dfrac{\alpha-p}{2}\\ \dfrac{\alpha-p}{2}&\dfrac{\alpha+p}{2}\end{bmatrix}$. 现设 $\boldsymbol{M}\geqslant\boldsymbol{O}$ 时，讨论 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{HBS}}=\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2$ 位于同一区域的概率和 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{HBS}}$ 所在区域个数的均值.

定理2.6 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{HBS}}$ 所在区域能唯一确定当且仅当使得 $\delta_i<0$ 的任意 $i=1,2$，都有 $2\left|\delta_i\right|\geqslant\dfrac{h_i}{d_i}$.

证明：由于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{HBS}}$ 所在区域能唯一确定当且仅当区间 $\lambda_i=\dfrac{\left(\dfrac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right)[-1,1]+\delta_i}{1+\left(1-\dfrac{1}{d_i}\right)[-1,1]}$ 内不能包含0. 此外，由定理2.5的证明可知 $1+\left(1-\dfrac{1}{d_i}\right)[-1,1]=\left[\dfrac{1}{d_i},\ 2-\dfrac{1}{d_i}\right]>0$，故只需证明 $\left(\dfrac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right)[-1,1]+\delta_i$ 不包含0即可. 因为

$$\left(\frac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right)[-1,1]+\delta_i=\left[-\left(\frac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right),\ \frac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right]+\delta_i,$$

所以 $\left(\dfrac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right)[-1,1]+\delta_i$ 不包含0的充要条件为

$$\delta_i-\left(\frac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right)\geqslant 0\text{ 或 }\delta_i+\left(\frac{h_i}{d_i}-\left|\delta_i\right|\right)\leqslant 0,$$

即$|\delta|_i\geqslant\frac{h_i}{d_i}-|\delta|_i$,于是有$2|\delta|_i\geqslant\frac{h_i}{d_i}$.命题得证.

定理2.7　若$\sigma:=2\|B\|_\infty<1$,则x^{HBS}位于同一确定区域的概率至少是$(1-\frac{\sigma}{2})^2$.

证明:若$\delta_i\in[0,1]$,由$\lambda_i\geqslant\delta_i\geqslant 0$,故$\lambda_i\geqslant 0$,即$\lambda_i$的符号是确定的.若$\delta_i\in[-1,-\sigma]$,由$C^{-1}=(I-M)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}M^k\geqslant I$,则$d_i\geqslant 1$.又因为不等式

$$h_i=\left(C^{-1}|\delta|\right)_i=(I-M)^{-1}_{i*}|\delta|=\left(\sum_{k=0}^{\infty}M^k\right)_{i*}|\delta|\leqslant$$

$$\left|\delta_i\right|+\left(\sum_{k=0}^{\infty}M^k\right)_{i*}\tilde{e}\leqslant\left|\delta_i\right|+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^k=$$

$$\left|\delta_i\right|+\frac{\sigma}{2-\sigma}\leqslant\left|\delta_i\right|+\sigma\leqslant 2\left|\delta_i\right|$$

成立是因为$\delta_i\in[-1,-\sigma]$,即$\left|\delta_i\right|\in[\sigma,1]$,于是$h_i\leqslant 2|\delta|_i$,再由$d_i\geqslant 1$,所以$2|\delta|_i\geqslant\frac{h_i}{d_i}$.此外,根据定理2.6,可知当$\delta_i\in[-1,-\sigma]$时,$\lambda_i$的符号是确定的.综上所证,可知当$\delta_i\in[-1,-\sigma]\cup[0,1]$时,$\lambda_i$的符号是确定的,其概率为$\frac{1}{2}(1-\sigma+1)=1-\frac{\sigma}{2}$.所以$x^{\mathrm{HBS}}$位于同一确定区域的概率至少是$(1-\frac{\sigma}{2})^2$.

定理2.8　若$\sigma\leqslant 1$,则x^{HBS}所在区域个数的均值最大为$(1+\frac{\sigma}{2})^2$.

证明:由定理2.7,可知当$\delta_i\in[-1,-\sigma]\cup[0,1]$时,$\lambda_i$的符号是确定的且其概率为$1-\frac{\sigma}{2}$,故$\lambda_i$符号不确定的概率是$\frac{\sigma}{2}$.设由$p$个$\lambda_i$符号是不确定的,$p$可能的取值为0,1,2.因此$x^{\mathrm{HBS}}$所在区域个数的均值最多为

$$\sum_{p=0}^{2}C_2^p 2^p(\frac{\sigma}{2})^p(1-\frac{\sigma}{2})^{2-p}=(1+\frac{\sigma}{2})^2.$$

3　数值实验

矩阵B的非零元素在$[-1,1]$上随机均匀分布,向量$b=\delta_1u_1+\delta_2u_2$的谱特征值$\delta_i(i=1,2)$在$[-1,1]$上也随机均匀分布,且矩阵$B$满足$\sigma=2\|B\|_\infty\leqslant 1$($\sigma$是已知值).2种边界的具体实验结果如表1所示.根据实验结果可以得出下面结论.解的所在区间位于唯一确定区域的概率比命题2给出的唯一性概率的下界大得多;只要B的无穷范数足够小,解的所在区间位于区域个数的均值越小;Bauer-Skeel和Hansen-Bliek-Rohn方法得到的结果相似,前者的运行时间较快,但当B的无穷范数较大时,后者得到的结果会更好.当B的无穷范数较小时,可选择Bauer-Skeel型区间;当B的无穷范数较大时,选择Hansen-Bliek-Rohn型区间.除此之外,无论是理论分析还是数值实验,可得出2种方法所求得解的所在区间位于同一区域的概率、解的所在区间位于区域个数的均值以及运行时间均与矩阵的维数无关.

表1　2种边界的具体实验结果

n	σ	R	$(1-\sigma)^2$	Bauer-Skeel			Hansen-Bliek-Rohn		
				U	O	t/s	U	O	t/s
5	0.10	10^4	0.810 0	0.974 8	1.025 0	0.593 4	0.973 9	1.026 1	2.108 4
5	0.60	10^4	0.160 0	0.784 3	1.152 0	0.625 7	0.831 0	1.169 0	2.199 5
5	0.90	10^4	0.002 5	0.372 0	1.628 1	0.640 6	0.715 0	1.285 0	2.631 8
10	0.10	10^4	0.810 0	0.972 8	1.027 2	0.612 7	0.974 6	1.025 4	2.079 7
10	0.60	10^4	0.160 0	0.776 7	1.135 4	0.639 2	0.830 0	1.170 0	2.126 6
10	0.90	10^4	0.002 5	0.374 8	1.625 2	0.601 5	0.715 2	1.284 8	2.328 5
50	0.10	10^2	0.810 0	0.973 0	1.022 0	0.586 4	0.960 0	1.040 0	2.175 3
50	0.60	10^2	0.160 0	0.786 1	1.154 0	0.638 8	0.820 0	1.180 0	2.059 6
50	0.90	10^2	0.002 5	0.371 5	1.629 0	0.602 1	0.690 0	1.310 0	2.361 9
100	0.10	10^2	0.810 0	0.973 4	1.020 0	0.660 7	0.970 0	1.030 0	2.415 8
100	0.60	10^2	0.160 0	0.785 2	1.156 1	0.595 0	0.820 0	1.180 0	2.003 7
100	0.95	10^2	0.002 5	0.374 1	1.626 8	0.617 5	0.720 0	1.280 0	2.246 2

注:σ为已知值;n代表矩阵B的堆数;R表示给定参数设置的实例数;U表示解的所在区间位于同一区域的概率;O表示解的所在区间位于区域个数的均值.

4　结束语

对于一类特殊二阶锥绝对值方程的求解,本文提出了Bauer-Skeel型区间法和Hansen-Bliek-Rohn型区间法.通过理论分析了SOCAVE问题(1)解的所在区间位于同一区域的概率值以及解的所在区间位于区域个数的均值.此外,也通过数值试验体现了算法具有较好的数值稳定性.

参 考 文 献

[1] ROHN J. A theorem of the alternatives for the equation $Ax + B|x| = b$ [J]. Optimization Letters, 2012, 6(3): 585-591.

[2] MANGASARIAN O L, MEYER R R. Absolute value equations [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 419(2): 359-367.

[3] MANGASARIAN O L. Absolute value programming [J]. Comput Optimization and Applications, 2006, 36(1): 43-53.

[4] MANGASARIAN O L. Linear complementarity as absolute value equation solution [J]. Optimization Letters, 2014, 8(4): 1529-1534.

[5] MANGASARIAN O L. A generalized Newton method for absolute value equations [J]. Optimization Letters, 2009, 3(1): 101-108.

[6] MANGASARIAN O L. Absolute value equation solution via linear programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 161(3): 870-876.

[7] PROKOPYEV O. On equivalent reformulations for absolute value equations [J]. Comput Optimization and Applications, 2009, 44(3): 363-372.

[8] ZHANG C, WEI Q J. Global and finite convergence of a generalized Newton method for absolute Value equations [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2009, 143(2): 391-403.

[9] JIANG X, ZHANG Y. A smoothing-type algorithm for absolute value equations [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2013, 9(4): 789-798.

[10] CACCETTA L, QU B, ZHOU G. A globally and quadratically convergent method for absolute value equations [J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 48(1): 45-58.

[11] HLADÍK M. Bounds for the solutions of absolute value equations [J]. Computational Optimization and Applications, 2018, 69(1): 243-266.

[12] ROHN J. An algorithm for solving the absolute value equation [J]. The Electronic Journal of Linear Algebra, 2011, 18(1): 589-599.

[13] HU S L, HUANG Z H, ZHANG Q. A generalized Newton method for absolute value equations associated with second-order cones[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 235(5): 1490-1501.

[14] MIAO X H, YANG J T, SAHEYA B, et al. A smoothing newton method for absolute value equation associated with second order cone [J]. Applied Numerical Mathematics, 2017, 120: 82-96.

[15] MIAO X H, HSU W M, NGUYEN C T, et al. The solvabilities of three optimization problems associated with second-order cone [J]. To appear in Journal of Nonlinear and Convex Analysis, early access.

[16] CHEN J S, TSENG P. An unconstrained smooth minimization reformulation of second-order cone complementarity problem [J]. Mathematical Programming, 2005, 104(2/3): 293-327.

[17] FUKUSHIMA M, LUO Z Q, TSENG D. Smoothing functions for second-order-cone complementarity problems [J]. Siam Journal on Optimization, 2002, 12(2): 436-460.

Interval estimation of solution for a special class of absolute value equation associated with second-order cone

ZHAO Jingyun, MIAO Xinhe

(School of Mathematical Science, Tianjin University, Tianjin 300350)

Abstract: In this paper, an interval algorithm is studied to solve a special class of absolute value equation associated with second-order cone. Determining the range of the estimated interval of the solution, and the absolute value equation associated with second-order cone is transformed into the ordinary interval equations by the range of the solution, whereas the interval equations can be solved directly. Finally, theoretical analysis and numerical experiments show that the algorithm is feasible and effective.

Keywords: second-order cones; absolute value equations; interval algorithm

(责任编辑:马田田)