首都师范大学学报(自然科学版)
第 41 卷　第 2 期　　Journal of Capital Normal University　　No. 2
2020 年 4 月　　(Natural Science Edition)　　Apr. ,2020

关于半对偶模的若干特殊模类*

何东林　李煜彦

(陇南师范高等专科学校数信学院,甘肃 陇南　742500)

摘要:设 C 是半对偶模.讨论了具有有限 C -投射分解和 C -Gorenstein 投射分解的模类的一些正交性质,进而得到了关于 C -Gorenstein 投射模的正合序列.

关键词:半对偶模;正合列;x -分解

中图分类号:O153　　**DOI**:10. 19789/j. 1004-9398. 2020. 02. 003

0　引　言

半对偶模在相对同调代数中扮演着重要角色.文中环 R 指有单位元的交换环,模指酉模.用 p 表示投射 R -模类.称模 C 是半对偶模,如果 C 具有有限生成投射模组成的投射分解, $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(C,C)=0$ 且标准同态 $R\to \mathrm{Hom}_R(C,C)$ 为同构(详见[1]).用 p_c 表示同构于 $P\underset{R}{\otimes} C$ (其中 $P\in p$)的模组成的类.称模 M 是 g_c 投射的,如果存在正合复形 $X\equiv \cdots\to X_1\xrightarrow{\delta_1^X}X_0\xrightarrow{\delta_0^X}X_{-1}\xrightarrow{\delta_{-1}^X}\cdots$,其中当 $i\geqslant 0$ 时 $X_i\in p$;当 $i<0$ 时 $X_i\in p_c$ 且 $M\cong \mathrm{Ker}\delta_{-1}^X$,使得该复形在函子 $\mathrm{Hom}_R(-,p_c)$ 下仍正合.用 gp_c 表示所有 g_c 投射模组成的类.

设 C 是半对偶模.由满足下列条件的模 M 组成的类为 Auslander 类,记为 A_C:

$$\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^R(C,M)=0=\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(C,C\otimes M),$$

且典范同态 $\mu_{CCM}:M\to \mathrm{Hom}_R(C,C\otimes M)$ 为同构.

对偶地,由满足下列条件的模 N 组成的类为 Bass 类,记为 B_C (详见[2]):

$$\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(C,N)=0=\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^R(C,\mathrm{Hom}_R(C,N)),$$

且典范同态 $\upsilon_{CCN}:C\otimes \mathrm{Hom}_R(C,N)\to N$ 为同构.

设 x,y 是 R- 模类.若对任意 $X\in x$ 和 $Y\in y$,都有 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(X,Y)=0$,则记 $x\perp y$;若都有 $\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^R(X,Y)=0$,则记 $x\top y$.对于模 M,如果存在正合序列 $X^+\equiv \cdots\to X_1\to X_0\to M\to 0$,其中 $X_i\in x$,则称之为 M 的 x- 分解.进而,如果 X^+ 在 $\mathrm{Hom}_R(x,-)$ 作用下仍然保持正合性,则称之为 M 的真 x- 分解.用 $\mathrm{res}\tilde{x}$ 表示所有具有真 x- 分解的模组成的类.对于模 M,如果存在长度至少为 n 的正合列 $0\to X_n\to\cdots\to X_1\to X_0\to M\to 0$,其中 $X_i\in x$,那么称 M 的 x- 投射维数为 n,记作 $x\text{-}pd(M)=n$.否则记 $x\text{-}pd(M)=\infty$.用 $\mathrm{res}\hat{x}$ 表示具有有限 x- 投射维数的模组成的类.

Sather-Wagstaff 等[3]介绍并讨论了关于半对偶模 C 的若干相对上同调函子,用 $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ 作用于相应分解所得出的同调函子 $\mathrm{Ext}_{gp_cm}^i(-,-)$ 和 $\mathrm{Ext}_{mgI_c}^i(-,-)$. Di 等[4]研究了关于半对偶 C 的用 $-\underset{R}{\otimes}-$ 作用于相应分解所得的相对同调函子 $\mathrm{Tor}_i^{p_cm}(-,-)$ 和 $\mathrm{Tor}_i^{gp_cm}(-,-)$;并得出任意短正合列 $0\to K\to G\to H\to 0$ 在函子 $\mathrm{Hom}_R(-,M^*)$ 下都正合,其中 $K\in \mathrm{res}\hat{p}_c$, $G\in gp_c$, $M\in gp_{c^+}$, $M^*=\mathrm{Hom}_R(M,\dfrac{Q}{Z})$ 表示模 M 的示性模.受此启发,本文主要讨论具有有限 C -投射分解和 C -Gorenstein 投射分解的模类的一些正交性质.文中 C 均指固定的半对偶模,其余概念和记号参见文献[5-8].

1　主要结论

引理 1[4] $gp_c\perp p_c$.

命题 1　以下关系成立:

(1) $p\subseteq p_c\subseteq \mathrm{res}\hat{p}_c\subseteq \mathrm{res}\tilde{p}_c$;(2) $p_c\subseteq gp_c\subseteq \mathrm{res}g\hat{p}_c\subseteq \mathrm{res}g\tilde{p}_c$;(3) $\mathrm{res}\hat{p}_c\subseteq \mathrm{res}g\hat{p}_c$.

收稿日期:2019-03-14

* 甘肃省高等学校科研项目(2018A-269);甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019B-224)

证明 (1) $p \subseteq p_c \subseteq \mathrm{res}\hat{p}_c$ 显然成立. 下证 $\mathrm{res}\hat{p}_c \subseteq \mathrm{res}\tilde{p}_c$. 对任意 $M \in \mathrm{res}\hat{p}_c$, 存在正合列 $0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$, 其中 $P_i \in p_c$. 根据引理 1 可得,上面的正合列用函子 $\mathrm{Hom}_R(p_c, -)$ 作用后仍保持正合. 可见 $M \in \mathrm{res}\tilde{p}_c$. 因此 $\mathrm{res}\hat{p}_c \subseteq \mathrm{res}\tilde{p}_c$.

(2) $p_c \subseteq gp_c \subseteq \mathrm{resg}\hat{p}_c$ 显然成立. 下证 $\mathrm{resg}\hat{p}_c \subseteq \mathrm{resg}\tilde{p}_c$. 对任意 $M \in \mathrm{resg}\hat{p}_c$, 由文献[4]知,存在真 gp_c-分解. 从而 $M \in \mathrm{resg}\tilde{p}_c$. 因此 $\mathrm{resg}\hat{p}_c \subseteq \mathrm{resg}\tilde{p}_c$.

(3)由(1)和(2)易证.

命题 2 $\mathrm{resg}\hat{p}_c \cap \mathrm{res}\tilde{p}_c = \mathrm{res}\hat{p}_c$.

证明 由命题 1 易知 $\mathrm{res}\hat{p}_c \subseteq \mathrm{resg}\hat{p}_c \cap \mathrm{res}\tilde{p}_c$. 下证 $\mathrm{resg}\hat{p}_c \cap \mathrm{res}\tilde{p}_c \subseteq \mathrm{res}\hat{p}_c$. 对任意 $M \in \mathrm{resg}\hat{p}_c \cap \mathrm{res}\tilde{p}_c$, M 具有真 p_c-分解 X, 对应的正合列 X^+. $X^+ \equiv \cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$, 其中 $X_i \in x$. 在 $\mathrm{Hom}_R(p_c, -)$ 下仍正合. 因为 $p_c \subseteq gp_c$, 所以 X 也是 M 的 gp_c-分解. 由 $M \in \mathrm{resg}\hat{p}_c$ 知,存在 n, 使得当 $i > n$ 时 $X_i = 0$. 即 $X^+ \equiv 0 \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$. 从而 $M \in \mathrm{res}\hat{p}_c$. 因此 $\mathrm{resg}\hat{p}_c \cap \mathrm{res}\tilde{p}_c = \mathrm{res}\hat{p}_c$.

为了便于讨论,下面均设 R 为具有对偶模 D 的 Cohen-Macaulay 环, $C^+ = \mathrm{Hom}_R(C, D)$. 由文献[3]易知 C^+ 也是半对偶模.

命题 3 设 $M \in B_C \cap \mathrm{resg}\hat{p}_c$, 则存在有界复形 X, 使得 X 既是 M 的真 p_c-分解,又是 M 的真 gp_c-分解.

证明 由 $M \in B_C$ 及[4]知, M 具有真 p_c 分解 $X \equiv \cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to X_{-1} \to \cdots$, 其中当 $i \geqslant 0$ 时 $X_i \in p_c$, 当 $i < 0$ 时 $X_i = 0$. 注意到 $p_c \subseteq gp_c$, 所以 X 也是 M 的 gp_c 分解. 下面只需证 X 是有界的且是 M 的真 gp_c-分解. 由 $M \in \mathrm{resg}\hat{p}_c$ 知,存在 n, 使得 $X^+ \equiv 0 \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$, 其中 $X_i \in p_c$. 可见复形 X 有界. 由引理 1 知 $gp_c \perp p_c$, 所以用 $\mathrm{Hom}_R(gp_c, -)$ 作用于 X^+ 仍正合. 从而 X 是真 gp_c-分解. 因此 X 既是有界真 p_c-分解又是有界真 gp_c-分解.

命题 4 $\mathrm{res}\hat{p}_c \perp (gp_{c^+})^*$ 且 $\mathrm{res}\hat{p}_{c^+} \perp (gp_c)^*$.

证明 $\mathrm{res}\hat{p}_c \perp (gp_{c^+})^*$ 与 $\mathrm{res}\hat{p}_{c^+} \perp (gp_c)^*$ 的证明过程是完全对偶的,下面只证明前者. 对任意 $M \in \mathrm{res}\hat{p}_c$ 和 $N \in gp_{c^+}$. 由文献[4]知 $gp_{c^+} \top \mathrm{res}\hat{p}_c$. 可见 $\mathrm{Tor}^R_{i\geqslant 1}(N, M) = 0$. 因为

$$\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M, \mathrm{Hom}_Z(N, Q/Z)) \cong \mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Tor}^R_{i\geqslant 1}(N, M), Q/Z)) = 0,$$

所以 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M, \mathrm{Hom}_Z(N, Q/Z)) = 0$, 即 $\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(M, N^*) = 0$. 因此 $\mathrm{res}\hat{p}_c \perp (gp_{c^+})^*$.

推论 1 设 $(\varepsilon_1): 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to K \to 0$ 是 R 模正合列,其中 $P_i \in p_c (i = 0, 1, \cdots n)$. 则对任意 $M \in gp_{c^+}$, (ε) 在函子 $\mathrm{Hom}_R(-, M^*)$ 下仍正合.

证明 因为 $(\varepsilon_1): 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to K \to 0$ 是 R 模正合列,其中 $P_i \in p_c (i = 0, 1, \cdots n)$, 所以 $K \in \mathrm{res}\hat{p}_c$. 由命题 4 知 $\mathrm{res}\hat{p}_c \perp (gp_{c^+})^*$. 而 $p_c \subseteq \mathrm{res}\hat{p}_c$, 可见 $K \perp M^*$ 且 $P_i \perp M^*$, 其中 $i = 0, 1, \cdots, n$. 从而序列 (ε_1) 在 $\mathrm{Hom}_R(-, M^*)$ 下仍正合.

推论 2 设 $(\varepsilon): 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to G \xrightarrow{f} H \to 0$ 是 R 模正合列,其中 $P_i \in p_c (i = 0, 1, \cdots, n)$, $G \in gp_c$. 则对任意 $M \in gp_{c^+}$, (ε) 在 $\mathrm{Hom}_R(-, M^*)$ 下仍正合.

证明 令 $K = \mathrm{Ker}f$, 则 (ε) 可分解为 2 个正合列 $(\varepsilon_1): 0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to K \to 0$ 和 $(\varepsilon_2): 0 \to K \to G \to H \to 0$. 由 $P_i \in p_c (i = 0, 1, \cdots, n)$ 及正合列 (ε_1) 易知, $K \in \mathrm{res}\hat{p}_c$. 根据文献[4]可得对任意 $M \in gp_{c^+}$, 正合列 (ε_2) 在 $\mathrm{Hom}_R(-, M^*)$ 下仍正合. 即导出序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(H, M^*) \to \mathrm{Hom}_R(G, M^*) \to \mathrm{Hom}_R(K, M^*) \to 0, \tag{1}$$

正合. 又由推论 1 知序列 (1) 在 $\mathrm{Hom}_R(-, M^*)$ 下仍正合. 即序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(K, M^*) \to \mathrm{Hom}_R(P_0, M^*) \to \mathrm{Hom}_R(P_1, M^*) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P_n, M^*) \to 0, \tag{2}$$

正合. 由正合列(1)和(2)拼接可得长正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(H, M^*) \to \mathrm{Hom}_R(G, M^*) \to \mathrm{Hom}_R(P_0, M^*) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P_n, M^*) \to 0,$$

因此 (ε) 在 $\mathrm{Hom}_R(-, M^*)$ 下仍正合.

引理 2[1] gp_c 关于任意直和、直和因子及满同态的核封闭.

命题 5 设 $0 \to A \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$ 为 R-正合列,其中 $G_0, G_1 \in gp_c$. 则存在正合列 $0 \to A \to P \otimes C \to G \to M \to 0$ 和 $0 \to A \to H \to Q \to M \to 0$, 其中 P, Q 为投射模且 $G, H \in gp_c$.

证明 令 $K = \mathrm{Ker}(G_0 \to M)$. 在短正合列 $0 \to A \to G_1 \to K \to 0$ 中 $G_1 \in gp_c$, 由引理 2 知,存在正合

列 $0 \to G_1 \to P \otimes C \to G'_1 \to 0$, 其中 P 为投射模且 $G'_1 \in gp_c$. 考虑如下推出图 1 和 2.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P \otimes C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G'_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G'_1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

推出图 1

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & G'_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G'_1 \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

推出图 2

在正合列 $0 \to G_0 \to G \to G'_1 \to 0$ 中, G_0, $G'_1 \in gp_c$. 根据引理 2 知 $G \in gp_c$. 将正合列 $0 \to A \to P \otimes C \to B \to 0$ 与 $0 \to B \to G \to M \to 0$ 拼接易得正合列

$$0 \to A \to P \otimes C \to G \to M \to 0, \tag{3}$$

其中 P 为投射模且 $G \in gp_c$.

另一方面,由 $G'_0 \in gp_c$ 知,存在短正合列 $0 \to G''_0 \to Q \to G'_0 \to 0$, 其中 Q 为投射模且 $G''_0 \in gp_c$. 考虑如下拉回图 3 和 4.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G''_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G''_0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

拉回图 3

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & A \arrow[r, equal] \arrow[d] & A \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G''_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & H \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G''_0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

拉回图 4

在正合列 $0 \to G''_0 \to H \to G_1 \to 0$ 中, G_1, $G''_0 \in gp_c$, 由引理 2 知 $H \in gp_c$. 将短正合列 $0 \to A \to H \to U \to 0$ 和 $0 \to U \to Q \to M \to 0$ 拼接易得正合列

$$0 \to A \to H \to Q \to M \to 0, \tag{4}$$

其中 Q 为投射模且 $H \in gp_c$.

定理 1 设 $0 \to K \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$ 为 R-正合列,其中 $G_i \in gp_c (i = 0,1,\cdots,n-1)$. 则以下结论成立:

(i)存在正合列 $0 \to K \to P_{n-1} \otimes C \to \cdots \to P_1 \otimes C \to P_0 \otimes C \to U \to 0$ 和 $0 \to M \to U \to G \to 0$, 其中 $P_i (i = 0,1,\cdots,n-1)$ 为投射模且 $G \in gp_c$;

(ii)存在正合列 $0 \to V \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$ 和 $0 \to V \to H \to K \to 0$, 其中 $Q_i (i = 0, 1,\cdots,n-1)$ 为投射模且 $H \in gp_c$.

证明 对 n 用数学归纳法.

(i)当 $n = 1$ 时, $0 \to K \to G_0 \to M \to 0$ 正合,其中 $G_0 \in gp_c$. 由 g_c 投射模的定义知,存在短正合列 $0 \to G_0 \to P_0 \otimes C \to N \to 0$, 其中 P_0 为投射模且 $N \in gp_c$. 考虑如下推出图 5.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P_0 \otimes C \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

推出图 5

易知 $0 \to K \to P_0 \otimes C \to U \to 0$ 和 $0 \to M \to U \to N \to 0$ 就是满足要求的正合列.

假设结论对于任意整数 $k (2 \leqslant k < n-1)$ 均成

立.下面讨论对于 $n-1$ 的情形.不妨令 $L=\mathrm{Ker}(G_0\to M)$,考虑正合列 $0\to K\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to L\to 0$,其中 $G_i\in gp_c$.由归纳假设知存在正合列

$$0\to K\to P_{n-1}\otimes C\to\cdots\to P_1\otimes C\to U'\to 0, \tag{5}$$

$$0\to L\to U'\to G'\to 0, \tag{6}$$

其中 $P_i(i=1,\cdots,n-1)$ 为投射模且 $G'\in gp_c$.考虑如下推出图 6.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

推出图 6

由 $G_0, G'\in gp_c$ 及引理 2 知 $X\in gp_c$.可见存在正合列 $0\to X\to P_0\otimes C\to G\to 0$,其中 $G\in gp_c$ 且 P_0 为投射模.构造如下推出图 7.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U' \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & P_0\otimes C \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

推出图 7

将正合列 $0\to U'\to P_0\otimes C\to U\to 0$ 与(5)拼接可得正合列

$$0\to K\to P_{n-1}\otimes C\to\cdots\to P_1\otimes C\to P_0\otimes C\to U\to 0, \tag{7}$$

显然正合列(7)与推出图(7)的第 3 列 $0\to M\to U\to G\to 0$ 就是满足要求的正合列.从而结论对于 $n-1$ 也成立.(ii)证明过程与(i)类似.

参 考 文 献

[1] WHITE D. Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module[J]. Journal of Commutative Algebra, 2010, 2(1): 111-137.

[2] ENOCHS E, YASSEMI S. Foxby equivalence and cotorsion theories relative to semi-dualizing modules[J]. Mathematica Scandinavica, 2004, 95(1): 33-43.

[3] SATHER-WAGSTAFF S, SHARIF T, WHITE D. Comparison of relative cohomology theories with respect to semidualizing modules[J]. Mathematische Zeitschrift, 2010, 264(3): 571-600.

[4] DI Z, ZHANG X, CHEN J. Balance for relative homology wit respect to semidualizing modules[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(1): 137-147.

[5] WANG L, LIU S, CHEN X, et al. Strongly n-ding projective and injective modules under change of rings[J]. International Research Journal of Pure Algebra, 2017, 7(3): 2248-9037.

[6] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative homological algebra[M]. New York: Walter de Gruyter, 2000.

[7] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189(3): 167-193.

[8] 佟文廷.同调代数引论[M].北京:高等教育出版社,1996.

Some Special Classes of Module with Respect to Semidualizing Module

HE Donglin LI Yuyan

(School of Mathematics and Information Science, Longnan Teachers College, Longnan Gansu 742500)

Abstract: Let C be a semidualizing module. In this paper, we discuss some orthogonal properties of module classes, which have finite C-projective resolution and finite C-Gorenstein projective resolution. Moreover, we obtain some exact sequences with respect to C-Gorenstein projective modules.

Keywords: semidualizing module; exact sequence; x-resolution