

非平稳随机过程功率谱与自相关的关系推导

胡敬安 魏冬梅

(山东师范大学物理与电子科学学院, 山东 济南 250014)

摘要:涉及随机过程的文献或书籍通常只介绍广义平稳随机过程的功率谱密度与自相关函数的关系,即佩利-维纳准则.本文就非平稳随机过程的功率谱与自相关之间的关系进行了推导,结论是功率谱密度与自相关函数的时间平均是 1 对傅立叶变换.

关键词:随机过程;平均自相关;功率谱密度

中图分类号:TN911.1

DOI:10.19789/j.1004-9398.2020.02.005

0 引言

佩利-维纳准则指出平稳随机过程的功率谱密度与自相关函数是 1 对傅立叶变换,一般涉及随机过程的教材或书籍通常都会介绍佩利-维纳准则,有的直接给出结论^[1-3],也有很多教材会同时给出该结论的推导过程以帮助理解^[4-8].但很少有文献介绍非平稳随机过程的功率谱密度与自相关函数的关系,文献[9-10]也仅仅介绍了一类特殊的非平稳随机过程:循环平稳随机过程的功率谱与自相关的关系.循环平稳随机过程的自相关函数 $R(t, t + \tau)$ 对时间 (t) 具有周期性,将其在 1 个周期内对 t 进行平均即可蜕变为二元函数 $R(\tau)$,然后取傅立叶变换即为循环平稳随机过程功率谱,即

$$P_{\xi}(f) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} R(t, t + \tau) dt\right], \quad (1)$$

式中 \mathcal{F} 表示求傅立叶变换, $P_{\xi}(f)$ 为随机过程的功率谱密度, T_0 为自相关函数 $R(t, t + \tau)$ 对 t 的周期.文献[9-10]只是给出了结论,没有导出过程,这可能令初学者感到困惑.鉴于此,本文将对非平稳随机过程的功率谱与自相关函数的关系进行推导.

1 结论的导出

随机过程的功率谱密度定义为所有样本函数的功率谱密度的统计平均.记随机过程为 $\xi(t)$,其功率谱密度为 $P_{\xi}(f)$,则

$$P_{\xi}(f) = E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\Xi_T(f)|^2}{T}\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E|\Xi_T(f)|^2}{T}, \quad (2)$$

其中 $\Xi_T(f)$ 为截取过程

$$\xi_T(t) = \begin{cases} \xi(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

的傅立叶变换.式(2)中 $|\Xi_T(f)|^2$ 可表示为

$$\begin{aligned} |\Xi_T(f)|^2 &= \Xi_T^*(f) \Xi_T(f) = \\ & \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \right]^* \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 = \\ & \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi^*(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2. \end{aligned}$$

将其变为二重积分可得

$$|\Xi_T(f)|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi^*(t_1) \xi(t_2) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2. \quad (3)$$

式(3)的积分区域 $D_{t_1 t_2}$ 如图 1 所示.

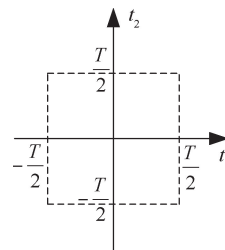


图 1 积分区域 $D_{t_1 t_2}$

记 $t_1 = t$, 令 $t_2 - t_1 = \tau$, 则式(3)积分变为

$$|\Xi_T(f)|^2 = \iint_{D_{t\tau}} \xi^*(t) \xi(t + \tau) e^{-j\omega\tau} dt d\tau,$$

其中积分区域 (D_{ir}) 如图 2 所示. 于是

$$E|\Xi_T(f)|^2 = \iint_{D_{ir}} E[\xi^*(t)\xi(t+\tau)]e^{-j\omega\tau} dt d\tau = \iint_{D_{ir}} R(t, t+\tau)e^{-j\omega\tau} dt d\tau.$$

将其带入式(2)可以得到

$$P_\xi(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \iint_{D_{ir}} R(t, t+\tau)e^{-j\omega\tau} dt d\tau. \quad (4)$$

由式(4)可以看出,随机过程的功率谱为其自相关函数的二重广义积分.

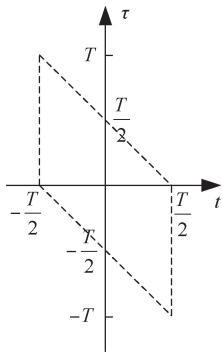


图 2 积分区域 D_{ir}

现将图 2 中 D_{ir} 以 t 轴为界分为上下 2 个部分, 先对 t 积分, 再对 τ 积分, 则式(4)可变为 2 个广义二次积分

$$P_\xi(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^0 e^{-j\omega\tau} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} R(t, t+\tau) dt d\tau + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-j\omega\tau} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} R(t, t+\tau) dt d\tau.$$

将 2 个广义二次积分先对 t 的积分求极限, 再对 τ 的积分求极限

$$P_\xi(f) = \int_{-\infty}^0 e^{-j\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} R(t, t+\tau) dt d\tau + \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} R(t, t+\tau) dt d\tau. \quad (5)$$

应注意到式(5)中对 t 的 2 个广义积分相等, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} R(t, t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} R(t, t+\tau) dt$$

均为自相关函数 $R(t, t+\tau)$ 的时间平均, 即 $\overline{R(t, t+\tau)}$, 故式(5)变为

$$P_\xi(f) = \int_{-\infty}^0 e^{-j\omega\tau} \overline{R(t, t+\tau)} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} \overline{R(t, t+\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R(t, t+\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathcal{A}[\overline{R(t, t+\tau)}], \quad (6)$$

即随机过程的功率谱密度是其自相关函数的时间平均的傅立叶变换.

2 讨 论

式(6)所给结论不仅对平稳随机过程, 还对包括循环平稳随机过程在内的非平稳过程都是成立的. 当随机过程为广义平稳随机过程时, 其自相关函数 $R(t, t+\tau)$ 与 t 无关, 即其蜕变为一元函数 $R(\tau)$, 所以 $R(t, t+\tau)$ 的时间平均就是 $R(\tau)$ 自身, 此时有

$$P_\xi(f) = \mathcal{A}[\overline{R(t, t+\tau)}] = \mathcal{A}[R(\tau)],$$

即平稳过程的功率谱密度为 $R(\tau)$ 的傅立叶变换, 因此佩利-维纳准则只是式(6)所给结论的 1 个特例.

而对于循环平稳随机过程, 其自相关函数 $R(t, t+\tau)$ 对 t 具有周期性, 其在 1 个周期内的平均等于整个时间范围内的平均, 即有

$$\overline{R(t, t+\tau)} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} R(t, t+\tau) dt,$$

其中 T_0 为自相关函数 $R(t, t+\tau)$ 对 t 的周期, 故

$$P_\xi(f) = \mathcal{A}[\overline{R(t, t+\tau)}] = \mathcal{A}\left[\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} R(t, t+\tau) dt\right].$$

因此描述循环平稳过程功率谱与自相关关系的式(1)也只是本文结论式(6)的 1 个特例.

另外, 如果对自相关函数 $R(t, t+\tau)$ 不进行时间平均, 直接针对变量 τ 进行傅立叶变换, 结果将同时也是 t 的函数, 如式(7)所示

$$\mathcal{F}_\tau[R(t, t+\tau)] = P_\xi(t, f), \quad (7)$$

式中 \mathcal{F}_τ 表示针对变量 τ 进行傅立叶变换. 现将 $P_\xi(t, f)$ 在整个频率范围内积分, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(t, f) df = \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(t, f) e^{j\omega\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, t+\tau) \Big|_{\tau=0} = E[\xi^2(t)],$$

即 $P_\xi(t, f)$ 对频率的积分为 $\xi(t)$ 的瞬时功率的统计平均值, 因此 $P_\xi(t, f)$ 可定义为随机过程的瞬时功率谱, 则有

$$P_\xi(f) = \mathcal{A}[\overline{R(t, t+\tau)}] = \mathcal{A}\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R(t, t+\tau) dt\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathcal{A}R(t, t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P_\xi(t, f) dt = \overline{P_\xi(t, f)},$$

其中 $\overline{P_\xi(t, f)}$ 为 $P_\xi(t, f)$ 对 t 的平均. 因此随机过程在整个时间范围内的 $P_\xi(f)$ 为 $P_\xi(t, f)$ 的时间平均.

3 总 结

本文从随机过程功率谱密度的定义出发导出了随机过程功率谱与平均自相关是 1 对傅立叶变

换的结论, 不管是描述平稳随机过程的功率谱与自相关关系的佩利-维纳准则, 还是描述循环平稳随机过程的功率谱与自相关关系的式(1), 都可看成是本结论的 1 个特例.

随机过程的功率谱存在, 其时间平均自相关 $\overline{R(t, t + \tau)}$ 存在傅立叶变换是本结论的必要条件, 但结论成立的充分条件仍然需要进一步的讨论.

参 考 文 献

- [1] HAYKIN S, MOHER M. 模拟与数字通信导论[M]. 2 版. 许波, 夏玮玮, 宋铁成, 等, 译. 北京: 电子工业出版社, 2007: 49.
- [2] 普埃克, 萨利希. 通信系统原理[M]. 李镛, 关欣, 杨爱萍, 等, 译. 北京: 电子工业出版社, 2006: 167.
- [3] MESIYA M F. 现代通信系统[M]. 谭明新, 译. 北京: 电子工业出版社, 2013: 334.
- [4] CARLSON A B, CRILLY P B. 通信系统: 电子通信中的信号与噪声概论[M]. 5 版. 王钢, 马琳, 石硕, 等, 译. 北京: 清华大学出版社, 2012: 297 - 300.
- [5] COUCH L W. 数字与模拟通信系统[M]. 8 版. 罗新民, 任品毅, 黄华, 等, 译. 北京: 电子工业出版社, 2013: 311 - 314.
- [6] 约翰 J·申克. 概率、随机变量和随机过程在信号处理中的应用[M]. 谢晓霞, 安成锦, 许可, 译. 北京: 机械工业出版社, 2016: 314 - 316.
- [7] 王丽霞. 概率论与随机过程: 理论、历史及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012: 260 - 261.
- [8] 陆大金. 随机过程及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 335 - 337.
- [9] 赵蓉, 李莉, 项东, 等. 现代通信原理教程[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2009: 48.
- [10] 周炯槃, 庞沁华, 续大我, 等. 通信原理[M]. 3 版. 北京: 北京邮电大学出版社, 2008: 58 - 59.

Analysis of the Relationship Between the Power Spectral Density of Non-stochastic Processes and Its Autocorrelation Function

HU Jing'an WEI Dongmei

(School of Physics and Electronics, Shandong Normal University, Jinan Shandong 250014)

Abstract: Literature and books related to stochastic processes usually only introduce the relationship between power spectral density (PSD) of wide-sense stationary random processes and its autocorrelation function, i. e. Pellet-Wiener criterion. The relationship between PSD of non-stochastic processes and its autocorrelation function is analyzed. The conclusion is that PSD and the time average of the autocorrelation function is a Fourier transform pair.

Keywords: stochastic processes; average autocorrelation; power spectral density