DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.02.002

第39卷 第2期
2018年4月
首都师范大学学报(自然科学版)
Journal of Capital Normal University
(Natural Science Edition)
No. 2
April, 2018

一个有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的非线性方程的解*

夏衣旦·莫合德[1] 张四保[1] 熊满玉[2]

(1. 喀什大学数学与统计学院,新疆 喀什 844008; 2. 乌鲁木齐第四十二小学,新疆 乌鲁木齐 830000)

摘 要

讨论了一个有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的非线性方程 $\varphi(mn)=7\varphi(m)+8\varphi(n)+16$ 的解,利用整数的分解以及 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的性质给出了其全部的52组解.

关键词: Euler 函数 $\varphi(n)$,非线性方程,整数分解,解.

中图分类号: O156

0 序 言

n 是一正整数,令 $\varphi(n)$ 为 Euler 函数. Euler 函数 $\varphi(n)$ 是数论中的一类极其重要函数之一,有关 $\varphi(n)$ 方程解的研究可以说是数论研究中的一个极富意义的研究课题之一,引起了不少学者的关注及重视,也得到了一些结论,如文献[1-6].

对于形如

$$\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b)) \qquad (0.1)$$

的 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的线性方程有着一定的研究. 文献[7]讨论了方程(0.1)当 k 为素数的情形,给出了 $k=3$ 时方程(0.1)的部分解,而文献[8]给出了 $k=3$ 方程(0.1)的全部解;文献[9]给出了 $k=4$ 方程(0.1)的全部解;文献[10]讨论了当 $k=4,6$ 时方程(0.1)的各自解;文献[11]给出了 $k=5$ 方程(0.1)的全部解;文献[12]给出了 $k=7$ 方程(0.1)的全部解;文献[13]给出了 $k=8$ 方程(0.1)的全部解;文献[14]给出了 $k=9$ 方程(0.1)的全部解.

本文将讨论一个有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的非线性方程

$$\varphi(mn)=7\varphi(m)+8\varphi(n)+16 \qquad (0.2)$$

的解.

1 定理及其证明

定理1 方程(0.2)有解 $(m,n)=(17,32)$, $(17,40)$, $(17,48)$, $(17,60)$, $(32,17)$, $(40,17)$, $(48,17)$, $(60,17)$, $(51,11)$, $(51,22)$, $(64,11)$, $(68,11)$, $(80,11)$, $(96,11)$, $(102,11)$, $(120,11)$, $(123,16)$, $(123,20)$, $(164,15)$, $(165,16)$, $(176,15)$, $(104,10)$, $(112,10)$, $(130,8)$, $(130,12)$, $(144,10)$, $(156,10)$, $(168,10)$, $(210,8)$, $(210,12)$, $(15,27)$, $(15,54)$, $(24,27)$, $(30,27)$, $(48,15)$, $(51,9)$, $(51,18)$, $(96,9)$, $(102,9)$, $(120,9)$, $(104,12)$, $(112,12)$, $(140,8)$, $(140,12)$, $(156,8)$, $(180,8)$, $(104,8)$, $(112,8)$, $(144,8)$, $(168,8)$, $(40,10)$, $(60,10)$,共52组.

证明 设 $\gcd(m,n)=d$,则 $\varphi(m)=m_1\varphi(d)$, $\varphi(n)=n_1\varphi(d)$,其中 $m_1,n_1\in\mathbf{Z}^+$. 由方程(0.2),有 $\varphi(d)(dm_1n_1-7m_1-8n_1)=16$,从而有 $\varphi(d)=1,2,4,8,16$.

情况1 $\varphi(d)=1$

此时有 $dm_1n_1-7m_1-8n_1=16$. 由 $\varphi(d)=1$ 时,有 $d=1,2$.

当 $d=1$ 时,有 $m_1n_1-7m_1-8n_1=16$,从而有 $(m_1-8)(n_1-7)=72$,根据因式与因数的所有可能的关系,建立关系式从而得到 $\begin{cases}m_1=9\\n_1=79\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=10\\n_1=43\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=11\\n_1=31\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=12\\n_1=25\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=14\\n_1=19\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=16\\n_1=16\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=17\\n_1=15\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=20\\n_1=13\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=26\\n_1=11\end{cases}$,

收稿日期:2017-05-16

* 新疆维吾尔自治区自然科学基金(2017D01A13)资助项目.

$\begin{cases}m_1=32\\n_1=10\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=44\\n_1=9\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=80\\n_1=8\end{cases}$.

因当 $\begin{cases}m_1=9\\n_1=79\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=10\\n_1=43\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=11\\n_1=31\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=12\\n_1=25\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=14\\n_1=19\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=17\\n_1=15\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=20\\n_1=13\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=26\\n_1=11\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=44\\n_1=9\end{cases}$ 时,$\varphi(m)$ 与 $\varphi(n)$ 两者中至少有一个为大于 1 的奇数,即此时方程(0.2)无解.

当 $\begin{cases}m_1=16\\n_1=16\end{cases}$ 时,$\varphi(m)=16$,$\varphi(n)=16$,则 $m=n=17,32,34,40,48,60$,从而方程(0.2)有解 $(m,n)=(17,32),(17,40),(17,48),(17,60),(32,17),(40,17),(48,17),(60,17)$.

当 $\begin{cases}m_1=32\\n_1=10\end{cases}$ 时,$\varphi(m)=32$,$\varphi(n)=10$,则 $m=51,64,68,80,96,102,120$,$n=11,22$,从而方程(0.2)有解 $(m,n)=(51,11),(51,22),(64,11),(68,11),(80,11),(96,11),(102,11),(120,11)$.

当 $\begin{cases}m_1=80\\n_1=8\end{cases}$ 时,$\varphi(m)=80$,$\varphi(n)=8$,则 $m=123,164,165,176,200,220,246,264,300,330$,$n=15,16,20,24,30$,从而方程(0.2)有解 $(m,n)=(123,16),(123,20),(164,15),(165,16),(176,15)$.

当 $d=2$ 时,有 $2m_1n_1-7m_1-8n_1=16$. 从而有 $(m_1-4)(2n_1-7)=44$,因而有 $\begin{cases}m_1=48\\n_1=4\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=8\\n_1=9\end{cases}$. $\begin{cases}m_1=8\\n_1=9\end{cases}$ 不可能,因此时 $\varphi(n)$ 为大于 1 的奇数. 当 $\begin{cases}m_1=48\\n_1=4\end{cases}$ 时,有 $\varphi(m)=48$,$\varphi(n)=4$,则 $m=65,104,105,112,130,140,144,156,168,180,210$,$n=5,8,10,12$,从而方程(0.2)有解 $(m,n)=(104,10),(112,10),(130,8),(130,12),(144,10),(156,10),(168,10),(210,8),(210,12)$.

情况 2　$\varphi(d)=2$

此时有 $dm_1n_1-7m_1-8n_1=8$. 由 $\varphi(d)=2$ 时,有 $d=3,4,6$.

当 $d=3$ 时,有 $3m_1n_1-7m_1-8n_1=8$,从而有 $(3m_1-8)(3n_1-7)=80$,因而有 $\begin{cases}m_1=3\\n_1=29\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=4\\n_1=9\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=6\\n_1=5\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=8\\n_1=4\end{cases}$, $\begin{cases}m_1=16\\n_1=3\end{cases}$.

当 $\begin{cases}m_1=3\\n_1=29\end{cases}$ 时,$\varphi(m)=6$,$\varphi(n)=58$,从而 $m=7,9,14,18$,$n=59,118$,此时 $\gcd(m,n)\neq3$,则方程(0.2)无解.

当 $\begin{cases}m_1=4\\n_1=9\end{cases}$ 时,$\varphi(m)=8$,$\varphi(n)=18$,从而 $m=15,16,20,24,30$,$n=19,27,38,54$. 则方程(0.2)有解 $(m,n)=(15,27),(15,54),(24,27),(30,27)$.

当 $\begin{cases}m_1=6\\n_1=5\end{cases}$ 时,$\varphi(m)=12$,$\varphi(n)=10$,从而 $m=13,21,26,28,36,42$,$n=11,22$. 此时 $\gcd(m,n)\neq3$,则方程(0.2)无解.

当 $\begin{cases}m_1=8\\n_1=4\end{cases}$ 时,$\varphi(m)=16$,$\varphi(n)=8$,从而 $m=17,32,34,40,48,60$,$n=15,16,20,24,30$. 则方程(0.2)有解 $(m,n)=(48,15)$.

当 $\begin{cases}m_1=16\\n_1=3\end{cases}$ 时,$\varphi(m)=32$,$\varphi(n)=6$,从而 $m=51,64,68,80,96,102,120$,$n=7,9,14,18$. 则方程(0.2)有解 $(m,n)=(51,9),(51,18),(96,9),(102,9),(120,9)$.

当 $d=4$ 时,有 $4m_1n_1-7m_1-8n_1=8$,从而有 $(m_1-2)(4n_1-7)=22$,因而有 $\begin{cases}m_1=24\\n_1=2\end{cases}$. 此时,$\varphi(m)=48$,$\varphi(n)=4$,从而 $m=65,104,105,112,130,140,144,156,168,180,210$,$n=5,8,10,12$. 则方程(0.2)有解 $(m,n)=(104,12),(112,12),(140,8),(140,12),(156,8),(180,8)$.

当 $d=6$ 时,有 $6m_1n_1-7m_1-8n_1=8$,从而有 $(3m_1-4)(6n_1-7)=52$,不存在 $m_1,n_1\in\mathbf{Z}^+$ 使得其成立,故此时方程(0.2)无解.

情况 3　$\varphi(d)=4$

此时有 $dm_1n_1-7m_1-8n_1=4$. 由 $\varphi(d)=4$,有 $d=5,8,10,12$.

当 $d=5$ 时,有 $5m_1n_1-7m_1-8n_1=4$,从而有 $(5m_1-8)(5n_1-7)=76$,因而有 $\begin{cases}m_1=2\\n_1=9\end{cases}$. 此时,

$\varphi(m)=8$,$\varphi(n)=36$,从而 $m=15,16,20,24,30$,$n=37,57,63,74,76,108,114,126$. 此时 $\gcd(m,n)\neq 5$,则方程(0.2)无解.

当 $d=8$ 时,有 $8m_1n_1-7m_1-8n_1=4$,从而有 $(m_1-1)(8n_1-7)=11$,因而有 $\begin{cases}m_1=12\\ n_1=1\end{cases}$. 此时,$\varphi(m)=48$,$\varphi(n)=4$,从而 $m=65,104,105,112,130,140,144,156,168,180,210$,$n=5,8,10,12$,则方程(0.2)有解 $(m,n)=(104,8),(112,8),(144,8),(168,8)$.

当 $d=10$ 时,有 $10m_1n_1-7m_1-8n_1=4$. 从而可得 $(5m_1-4)(10n_1-7)=48$,因而有 $\begin{cases}m_1=4\\ n_1=1\end{cases}$. 此时,$\varphi(m)=16$,$\varphi(n)=4$,从而 $m=17,32,34,40,48,60$,$n=5,8,10,12$. 则方程(0.2)有解 $(m,n)=(40,10),(60,10)$.

当 $d=12$ 时,有 $12m_1n_1-7m_1-8n_1=4$. 从而可得 $(3m_1-2)(12n_1-7)=26$,不存在 $m_1,n_1\in\mathbf{Z}^+$ 使得其成立,故此时方程(0.2)无解.

情况 4 $\varphi(d)=8$

此时有 $dm_1n_1-7m_1-8n_1=2$. 由 $\varphi(d)=8$,有 $d=15,16,20,24,30$. 计算可得,当 $d=15,16,20,24,30$,对于方程 $dm_1n_1-7m_1-8n_1=2$,不存在 $m_1,n_1\in\mathbf{Z}^+$ 使得其成立,故此时方程(0.2)无解.

情况 5 $\varphi(d)=16$

此时有 $dm_1n_1-7m_1-8n_1=1$. 由 $\varphi(d)=16$,有 $d=17,32,34,40,48,60$. 计算可得,当 $d=17,32,34,40,48,60$,对于方程 $dm_1n_1-7m_1-8n_1=1$,不存在 $m_1,n_1\in\mathbf{Z}^+$ 使得其成立,故此时方程(0.2)无解. 综上可得本文结论.

参 考 文 献

[1] 张四保. 三类包含 Euler 函数的方程[J]. 数学的实践与认识,2016,44(8):287-291.

[2] 张四保,刘启宽. 关于 Euler 函数一个方程的正整数解[J]. 东北师大学报:自然科学版,2015,47(3):49-54.

[3] 张四保,杜先存. 一个包含 Euler 函数方程的正整数解[J]. 华中师范大学学报:自然科学版,2015,49(4):497-501.

[4] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报:自然科学版,2008,38(2):173-176.

[5] 范盼红. 关于 F. Smarandache 函数和欧拉函数的三个方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2012,29(5):626-628.

[6] Yi Yuan. An equation involving the Euler function and Smarandache function[J]. Scientia Magan, 2005, 1(2):172-175.

[7] Sun Cuifang, Cheng Zhi. Some kind of equations involving Euler function $\varphi(n)$[J]. 数学研究,2010,43(4):364-369.

[8] 张四保. 有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程的正整数解[J]. 数学的实践与认识,2014,44(20):302-305.

[9] 许霞,徐小凡. 关于欧拉方程 $\varphi(ab)=2^k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2015,41(4):6-9.

[10] 官春梅,张四保. 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的两个方程[J]. 数学的实践与认识,2016,46(9):221-225.

[11] 鲁伟阳,高丽,王曦浛. 有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程的可解性问题[J]. 江西科学,2016,34(1):15-16.

[12] 孙树东. 一个与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的方程的正整数解[J]. 北华大学学报:自然科学版,2015,16(2):161-164.

[13] 张四保,席小忠. 有关方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解[J]. 南京师大学报:自然科学版,2016,39(1):41-47.

[14] 郭瑞,赵西卿,张利霞,等. 关于欧拉方程 $\varphi(mn)=3^k(\varphi(m)+\varphi(n))$ 的正整数解[J]. 江西科学,2016,34(2):154-157.

Solutions of a Nonlinear Equation on Euler Function

Xiayida Muhetar[1]　Zhang Sibao[1]　Xiong Manyu[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Kashgar University, Kashgar Xinjiang 844008;
2. Urumuqi the 42^{th} Primary School, Urumuqi Xinjiang 830000)

Abstract

The positive integer solutions of a nonlinear equation $\varphi(mn) = 7\varphi(m) + 8\varphi(n) + 16$ on Euler function was discussed. And all the 52 positive integer solutions of that equation were given by integer factorization and the properties of Euler function $\varphi(n)$.

Key words: Euler function $\varphi(n)$, nonlinear equation, integer factorization, solution.