DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.02.003

第 39 卷　第 2 期
2018 年 4 月

首都师范大学学报(自然科学版)
Journal of Capital Normal University
(Natural Science Edition)

No. 2
April, 2018

tan z, cot z, sec z, csc z 幂级数展开式的几种简明求法*

黄　炜

(宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡　721013)

摘　要

借助于级数除法及待定系数法等数学方法和工具,给出了求 tan z, cot z, sec z, csc z 函数在复数域上幂级数展开式的几种简明方法.

关键词: 级数,展开式,递推公式,级数除法.
中图分类号: O153

0　引　言

幂级数的展开式在数学研究及工程计算等广泛领域中有着极其重要的作用,人们对于 sin z, cos z 幂级数的展开式比较熟悉,应用自如,但一般的高等数学书中都没有 tan z, cot z, sec z, csc z 函数在复数域上幂级数的展开式,是因为其高阶导数不好求. 即使在工具书[2-6] 中查到公式,也感到陌生、困难,望而生畏,一知半解不知来龙去脉,更谈不上理解;但这几个幂级数展开式在数学研究,科学计算,工程应用等领域中有着广泛应用. 本文借助于高阶无穷小量在级数除法中的应用及级数递推公式中的待定系数法等数学方法和工具,避开求高阶导数,给出了 tan z, cot z, sec z, csc z 函数在复数域上幂级数展开式的几种简明方法,旨在促进工程数学与实际问题的融合,打通复杂计算的瓶颈,建立快速通道.

1　引　理

为了给出幂级数展开式几种简明方法,需要下面的引理:

引理 1[1]　对于任意复数 z, $|z|<\infty$,有

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ (|z|<\infty),$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ (|z|<\infty),$$

$$\frac{z}{e^x-1}=B_0+\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2+\frac{B_3}{3!}z^3+\frac{B_4}{4!}z^4+\cdots+\frac{B_n}{n!}z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!},$$

$$z^n\frac{1}{\cosh z}=\frac{2}{e^z+e^{-z}}=E_0+\frac{E_1}{1!}z+\frac{E_2}{2!}z^2+\frac{E_3}{3!}z^3+\frac{E_4}{4!}z^4+\cdots+\frac{E_n}{n!}z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}z^n.$$

2　用级数除法求 tan z, cot z, sec z, csc z 的幂级数展开式

下面我们用级数除法求 tan z, cot z, sec z, csc z 的幂级数展开式.

2.1　求 tan z, cot z 的幂级数展开式

(1) 由于 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}=\dfrac{z-z^3/6+\cdots}{1-z^2/2+\cdots}=\dfrac{z-z^3/6+\cdots}{1+\omega}$.

设其分母为: $1-z^2/2+z^4/4+\cdots=1+\omega$,取分母的 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}=\omega$. 由于在 $z=0$ 的无心邻域中 ω 是高阶无穷小量, $\dfrac{1}{1-\omega}=1+\omega$,则

$$\tan z=\frac{z-z^3/6+\cdots}{1+\omega}$$

收稿日期: 2017-04-18
* 国家自然科学基金项目(11201363); 陕西省自然科学基金项目资助((09JK432).

$$= \left(z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots\right)(1 - \omega + \omega^2 - \omega^3 + \cdots)$$

$$= \left(z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \cdots\right)$$

$$= z + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)z^3 + \left(\frac{1}{120} + \frac{5}{24} - \frac{1}{12}\right)z^5 + \cdots$$

$$= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!}z^{2n-1} + \cdots$$

其中 B_n($B_0 = 1, B_1 = -1, B_2 = 1/6, \cdots$)为伯努利数.

(2)由于 $\cot z$ 函数在 $z = 0$ 邻域有一阶极点，故展开式为 Laurent 级数.

$$\cot z = \frac{\csc z}{\sin z} = \frac{1 - z^2/2 + \cdots}{z - z^3/6 + \cdots} = \frac{1}{z}\frac{1 - z^2/2 + \cdots}{1 - z^2/6 + \cdots}.$$

设其分母为 $1 - z^2/6 + \cdots = 1 + \omega$，取分母的 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k} = \omega$. 由于在 $z = 0$ 的无心邻域中 ω 是高阶小量，由 $\frac{1}{1-\omega} = 1 + \omega$，则

$$\cot z = \frac{1}{z}\frac{1 - z^2/2 + \cdots}{1 + \omega}$$

$$= \frac{1}{z}(1 - z^2/2 + \cdots)(1 - \omega + \omega^2 - \omega^3 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{z}(1 - z^2/2 + z^4/24\cdots)(1 + z^2/6 - 7z^4/360\cdots)$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{3}z^2 + \left(\frac{-1}{24} + \frac{7}{360}\right)z^4 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \cdots - \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}z^{2n-1} - \cdots$$

其中 B_n($B_0 = 1, B_1 = -1, B_2 = 1/6, \cdots$)为伯努利数，$0 < |z| < \pi$.

(3)

$$\tan z = \frac{1}{\cot z} = \frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 + \cdots}$$

$$= \frac{z}{1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 + \cdots}.$$

设其分母为 $1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 + \cdots = 1 + \omega$，则

$$\tan z = \frac{z}{(1+\omega)} = z(1 - \omega + \omega^2 - \omega^3 + \cdots)$$

$$= z\left[1 + \frac{1}{3}z^2 + \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{9}\right)z^4 + \cdots\right]$$

$$= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

(4) $\cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{1}{z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots}$

$$= \frac{1}{z}\frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \cdots}.$$

设其分母为 $1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \cdots = 1 + \omega$，则

$$\cot z = \frac{1}{z(1+\omega)} = \frac{1}{z}(1 - \omega + \omega^2 - \omega^3 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{3}z^2 + \left(\frac{-2}{15} + \frac{1}{9}\right)z^4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \cdots, \quad 0 < |z| < \pi.$$

2.2 求 sec z，csc z 的幂级数展开式

(1)求 $\sec z$ 的幂级数展开式

$\sec z$ 在 $z = 0$ 的展开式是 Taylor 级数. 由于 $\sec z$ 是偶函数，故其在 $z = 0$ 的 Taylor 级数只有偶次幂. 因为 $\sec z = \frac{1}{\csc z}$，注意到 $\csc z = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)!}z^{2l}$，所以，

$$\sec z = \frac{1}{\csc z} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots}.$$

设其分母为 $1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots = 1 + \omega$，则

$$\sec z = \frac{1}{1+\omega} = (1 - \omega + \omega^2 - \omega^3 + \cdots)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right)z^4 + \left(\frac{1}{720} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)z^6 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \frac{61}{720}z^6 + \cdots + \frac{|E_n|}{n!}z^n + \cdots,$$

$$|z| < \frac{\pi}{2}.$$

其中 E_n($E_1 = 1/6, E_2 = 1/30, E_3 = 1/42, \cdots$)为欧拉数.

(2)求 $\csc z$ 的幂级数展开式

$\csc z$ 在 $z = 0$ 邻域有一阶极点的展开式为 Laurent 级数. 由于 $\csc z$ 是奇函数，故其在 $z = 0$ 的 Taylor 级数只有奇次幂. 因为 $\csc z = \frac{1}{\sin z}$，注意到 $\sin z = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2l+1}$，所以

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots}$$

$$=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\frac{1}{7!}z^6+\cdots}.$$

设其分母为 $1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\frac{1}{7!}z^6+\cdots=1+\omega$，则

$$\begin{aligned}\csc z&=\frac{1}{z(1+\omega)}=\frac{1}{z}(1-\omega+\omega^2-\omega^3+\cdots)\\&=\frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{6}z^2+\left(\frac{-1}{120}+\frac{1}{36}\right)z^4+\left(\frac{1}{5040}-\frac{1}{360}+\frac{1}{216}\right)z^6+\cdots\right]\\&=\frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{6}z^2+\frac{7}{360}z^4+\frac{31}{15120}z^6+\cdots\right]\\&=\frac{1}{z}+\frac{1}{6}z+\frac{7}{360}z^3+\frac{31}{15120}z^5+\cdots+\frac{2(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!}z^{2n-1}+\cdots,\quad 0<|z|<\pi.\end{aligned}$$

其中 $B_n(B_0=1,B_1=-1,B_2=1/6,\cdots)$ 为伯努利数.

3 用待定系数法求 $\tan z$,$\cot z$ 幂级数展开式

(待定系数法只能用于有限个负幂项(正幂项)的情形).

3.1 求 $\tan z$ 在 $z=0$ 的展开式是 Taylor 级数

由于 $\tan z$ 是奇函数，故其在 $z=0$ 的 Taylor 级数只有奇次幂，$\tan z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}$，其中系数 a_{2k+1} 待定. 因为 $\tan z=\frac{\sin z}{\csc z}$,所以 $\sin z=\csc z\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}$.

因为 $\sin z$,$\csc z$ 的奇、偶级数已知，所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)!}z^{2l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}z^{2k+1}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}\frac{(-1)^l}{(2l)!}z^{2k+2l+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}\right)z^{2n+1},\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $k+l=n$. 比较方程两边级数的系数，即得

$$\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.\qquad(1)$$

具体地 $n=0$: $a_1=1$.

$n=1$: $-\frac{1}{2!}a_1+a_3=-\frac{1}{3!}\quad a_3=\frac{1}{3}$.

$n=2$: $\frac{1}{4!}a_1-\frac{1}{2!}a_3+a_5=\frac{1}{5!}\quad a_5=\frac{2}{15}$.

$n=3$: $-\frac{1}{6!}a_1+\frac{1}{4!}a_3-\frac{1}{2!}a_5+a_7=-\frac{1}{7!}\quad a_7=\frac{7}{315}$.

……

所以 $\tan z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\cdots+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!}z^{2n-1}+\cdots\ \left(|z|<\frac{\pi}{2}\right)$. 其中 $B_n(B_0=1,B_1=-1,B_2=1/6,\cdots)$ 为伯努利数. 由于 $a_1=1$,方程(1)为系数 a_{2k+1} 的递推式.

3.2 求 $\cot z$ 幂级数展开式

由于 $\cot z$ 函数在 $\cot z$ 在 $z=0$ 邻域有一阶极点，故展开式为 Laurent 级数.

因为 $\cot z=\frac{\csc z}{\sin z}$，所以 $\csc z=\sin z\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{2k-1}z^{2k-1}$. 因为 $\sin z$,$\csc z$ 的奇、偶性已知，所以

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2l+1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k-1}z^{2k-1}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k-1}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}z^{2k+2l}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{2k-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}\right)z^{2n},\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $k+l=n$. 比较方程两边级数的系数，即得

$$\sum_{k=0}^{n}a_{2k-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}.\qquad(1)$$

具体地 $n=0$: $a_{-1}=1$.

$n=1$: $-\frac{1}{3!}a_{-1}+a_1=-\frac{1}{2!}\quad a_1=-\frac{1}{3}$.

$n=2$: $\frac{1}{5!}a_{-1}-\frac{1}{3!}a_1+a_3=\frac{1}{4!}\quad a_3=-\frac{2}{45}$.

$n=3$: $-\frac{1}{7!}a_{-1}+\frac{1}{5!}a_1-\frac{1}{3!}a_3+a_5=-\frac{1}{6!}\quad a_5=-\frac{2}{945}$.

……

所以 $\cot z=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3-\frac{2}{945}z^5-\cdots-\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}z^{2n-1}-\cdots(0<|z|<\pi)$. 其中 $B_n(B_0=1,B_1=-1,B_2=1/6,\cdots)$ 为伯努利数.

4 用待定系数法求 $\sec z$,$\csc z$ 幂级数展开式

4.1 求 $\sec z$ 的幂级数展开式

$\sec z$ 在 $z=0$ 的展开式是 Taylor 级数.

由于 $\sec z$ 是偶函数，故其在 $z=0$ 的 Taylor 级

数只有偶次幂,即 $\sec z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$，不妨记

$$\sec z = E_0 - \frac{E_1}{2!}z^2 + \frac{E_2}{4!}z^4 - \frac{E_3}{6!}z^6 + \cdots + (-1)^n \frac{E_n}{(2n)!}z^{2n} + \cdots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

由于 $\csc z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots$，故有

$$\left(E_0 - \frac{E_1}{2!}z^2 + \frac{E_2}{4!}z^4 - \frac{E_3}{6!}z^6 + \cdots + (-1)^n \frac{E_n}{(2n)!}z^{2n} + \cdots\right)\cdot \left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots\right) = 1.$$

比较得：$E_0 = 1, E_0 + E_1 = 0, \frac{1}{4!}E_0 + \frac{1}{2!2!}E_1 + \frac{1}{4!}E_2 = 0$，一般有如下的递推公式：

$$E_0 + C_{2n}^2 E_1 + C_{2n}^4 E_2 + \cdots + C_{2n}^{2(n-1)} E_{n-1} + E_n = 0.$$

由此可以求出前五项的系数：$E_0 = 1, E_1 = -1, E_2 = 5, E_3 = -61, E_4 = 1\,385, E_5 = -50\,521$.

$$\sec z = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \frac{61}{720}z^6 + \frac{277}{8\,064}z^8 + \frac{50\,521}{3\,628\,800}z^{10} + \cdots + \frac{E_n}{(2n)!}z^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!}z^{2n}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

从上式有：

$$\left(E_0 + \frac{E_1}{2!}z^2 + \frac{E_2}{4!}z^4 + \frac{E_3}{6!}z^6 + \cdots + \frac{E_n}{n!}z^{2n} + \cdots\right)\cdot \left(1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots\right) = 1.$$

由此得到 $\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} = E_0 + \frac{E_1}{2!}z^2 + \frac{E_2}{4!}z^4 + \frac{E_3}{6!}z^6 + \cdots + \frac{E_n}{n!}z^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!}z^{2n}$.

4.2　求 csc z 的幂级数展开式

csc z 在 $z = 0$ 邻域有一阶极点的，展开式为 Laurent 级数.

由于 csc z 是是奇函数，zcsc z 是偶函数，故其在 $z = 0$ 的 Taylor 级数只有偶次幂，即 $\sec z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$. 由于

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots$$

$z\csc z \cdot \sin z = z$，不妨记

$$z\csc z = C_0 - \frac{C_2}{2!}z^2 + \frac{C_4}{4!}z^4 - \frac{C_6}{6!}z^6 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{C_{2n}}{(2n)!}z^{2n} + \cdots, \quad 0 < |z| < \pi$$ 故有

$$\left(C_0 - \frac{C_2}{2!}z^2 + \frac{C_4}{4!}z^4 - \frac{C_6}{6!}z^6 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{C_{2n}}{(2n)!}z^{2n} + \cdots\right)\cdot \left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots\right) = z,$$

$C_0 = 1$.

比较得：$C_0 = 1, C_2 = -\frac{1}{3}, \frac{C_4}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{C_2}{2!}\frac{1}{3!} = 0$，一般有如下的递推公式：

$$(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}C_0 + (-1)^{n+1}\frac{C_{2n}}{(2n)!} + \left(-\frac{C_2}{2!}\right)\cdot \left((-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}\right) + \left(-\frac{1}{3!}\right)\left((-1)^n \frac{C_{2(n-1)}}{(2(n-1))!}\right) + \cdots + \left((-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\right)\left((-1)^{k+1}\frac{C_{2k}}{(2k)!}\right)\Big|_{2k=n} =$$

$$0 - \frac{1}{(2n+1)!}C_0 + \frac{C_{2n}}{(2n)!} + \frac{C_2}{2!}\frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{3!}\frac{C_{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{C_{2k}}{(2k)!}\Big|_{2k=n} = 0$$

由此可以求出前五项的系数：$C_0 = 1, C_2 = -\frac{1}{3}, C_4 = \frac{7}{15}, C_6 = -\frac{31}{21}, C_8 = \frac{127}{15}, C_{10} = -\frac{2\,560}{33}$.

$$z\csc z = 1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \frac{31}{15120}z^6 + \frac{127}{604\,800}z^8 + \cdots + \frac{2(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!}z^{2n} + \cdots, \quad 0 < |z| < \pi.$$

5　用三角等式求 csc z，sec z 幂级数展开式

5.1　求 sec z 的幂级数展开式

sec z 在 $z = 0$ 的展开式是 Taylor 级数.

$$\sec z = \frac{1}{\csc z} = \frac{1 + \tan^2 z}{1 - \tan^2 z} = \frac{2 - (1 - \tan^2 z)}{1 - \tan^2 z}$$
$$= \frac{2}{1 - \tan^2 z} - 1 = 2(1 + \tan^2 z) - 1$$
$$= 1 + 2\tan^2 z$$
$$= 1 + 2\left(\left(\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{z}{2}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(\frac{z}{2}\right)^7 + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1} + \cdots\right)\right)^2$$
$$= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \frac{61}{720}z^6 + \cdots + \frac{|E_n|}{n!}z^n + \cdots,$$

$|z| < \frac{\pi}{2}$.

$E_n(E_1 = 1/6, E_2 = 1/30, E_3 = 1/42, \cdots)$为欧拉数.

5.2 求 $\csc z$ 的幂级数展开式

$\csc z$ 在 $z = 0$ 邻域有一阶极点的,展开式为 Laurent 级数.

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{z}{2} + \tan\frac{z}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{45}\left(\frac{z}{2}\right)^3 - \frac{2}{945}\left(\frac{z}{2}\right)^5 - \cdots - \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1} - \cdots\right) + \right.$$

$$\left.\left(\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{z}{2}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(\frac{z}{2}\right)^7 + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1} + \cdots\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \cdots + \frac{2(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!}z^{2n-1} + \cdots, \quad 0 < |z| < \pi.$$

同理也可利用 $\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ 及 $\cot x = \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$ 还可求得 $\tan z$ 及 $\cot z$ 的幂级数展开形式.

6 用 Bernoulli 数的母函数求 $\csc z$, $\sec z$ 幂级数展开式

Bernoulli 数的母函数 $\frac{z}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$ 有:

$$(e^z - 1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n = z \cdot$$

$$\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \frac{z^n}{(n+1)!}\right)\cdot$$

$$\left(B_0 + \frac{B_1}{1!}z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \cdots + \frac{B_n}{n!}z^n\right) = 1.$$

比较得: $B_0 = 1$, $\frac{1}{2}B_0 + B_1 = 0$, $\frac{1}{3!}B_0 + \frac{1}{1!2!}B_1 + \frac{1}{2!}B_2 = 0, \cdots$

一般有如下的递推公式:

$$\frac{1}{n!}B_0 + \frac{B_1}{(n-1)!} + \frac{B_2}{2!(n-2)!} + \frac{B_3}{3!(n-3)!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} = 0.$$

即 $B_0 + C_n^1 B_1 + C_n^2 B_2 + \cdots + C_n^{n-1}B_{n-1} = 0$.

由此可以求出前 13 项的系数: $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6}, \cdots; B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = B_{2k+1} = 0$.

由于

$$\frac{z}{e^x - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \Rightarrow \frac{z}{e^x - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\left(\frac{2}{e^z - 1} + 1\right) = \frac{z}{2}\left(\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \quad (3)$$

是偶函数,从而 $B_{2k+1} = 0, k = 1, 2\cdots$. 把 $\frac{z}{2}$ 换成 z 即得

$$x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}. \quad (4)$$

注意到:

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n}, \quad (5)$$

马上有 Euler 数与 Bernoulli 数间的关系:

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n}\right)\cdot$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}z^{2n}\right) = 1. \quad (6)$$

由式(4)有

$$z\frac{\left(1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots\right)}{z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \frac{1}{7!}z^7 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}. \quad (7)$$

把式(7)中的 z 换成 iz 即得

$$z\frac{\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n}+\cdots\right)}{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}(-1)^n z^{2n}.$$

立即有：

$$z\cot z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}(-1)^n z^{2n}. \tag{8}$$

由 $\tan z=\cot z-2\cot 2z$，可推得

$$\begin{aligned}z\tan z&=z\cot z-2z\cot 2z\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}(-1)^n z^{2n}-\\&\quad\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n}B_{2n}}{(2n)!}(-1)^n z^{2n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-2^{4n})B_{2n}}{(2n)!}(-1)^n z^{2n}.\end{aligned}$$

$$\tan z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-2^{4n})B_{2n}}{(2n)!}(-1)^n z^{2n-1}. \tag{9}$$

由 $\csc z=\cot z+\tan\frac{z}{2}$ 得到

$$z\csc z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(2^{2n}-1)\,|B_{2n}|}{(2n)!}(-1)^{n-1}z^{2n}. \tag{10}$$

当然，对于基本三角函数幂级数的展开还有其它种方法，在这里就不一一赘述了.

参　考　文　献

[1]　菲赫金哥尔茨 Γ M. 微积分学教程 [M]. 上海：商务印书馆，1953.

[2]　华东师范大学数学系. 数学分析(第三版) [M]. 北京：高等教育出版社，2001.

[3]　余家荣. 复变函数(第三版) [M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[4]　张在明. 怎样计算 sec$x$ 与 tg$x$ 的幂级数展开式 [J]. 玉溪师专学报，1986(Z1)：140－142.

[5]　埃伯哈德. 数学指南(第三版) [M]. 北京：科学出版社，2012.

Several Simple Method of Power Series Expansion of tan z, cot z, sec z, csc z

Huang Wei

(Department of Basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji Shaanxi　721013)

Abstract

By using the methods of series division and recurrence formula, we obtained several calculation methods of power series expansion for tan z, cot z, sec z, csc z.

Key words: series, expansion, recurrence formula, series division.

作者简介　黄炜(1961－)，男，陕西岐山人，教授，硕士，研究方向：数论及数学应用.