

数学史的深度审思与有效融入

——以进位制例谈数学教学发展

徐杏芊 王瑞霖 唐一鹏

(首都师范大学教育学院, 北京 100048)

摘 要

将数学史与课堂教学有效融入为目标,以进位制为例,通过对知识本身所蕴含的数学文化、学情、课标等多角度分析,展现数学史融入进位制的教学设计.通过五个探究活动,使学生在合作学习的方式下,发挥学习的主动性,加强对已有认知的反思,重构对进位制本质理解.在此基础上,深度感知其中的数学史与数学文化,以此寻求数学课堂教学的进一步发展.

关键词: 数学史, 进位制, 反思性学习, 教学设计, 探究活动.

中图分类号: G633.6

0 引 言

将数学史融入数学教学在教育界已经产生了广泛的共识,数学给予学生的不仅是知识,更有其背后的历史与数学文化的熏陶.而这样的影响不能仅以教科书旁的几幅数学家的头像,几个有趣的故事来代替,如何充分的利用数学史这一文化瑰宝,帮助学生进一步领会数学的文化内涵,重塑数学观,是当今数学教育广为关注的.

回看人类发展的历史,虽不知发明数字的具体时代,但其产生比文字还要早几千年,因此,人类对于数学的需求毫不逊色.而从简单的结绳计数到十进制的国际化规范,数字的变迁经历了漫长的过程.从复杂到抽象,从文字到符号,人类对于数学符号化,简洁化的追求从来不曾停歇过.从玛雅、印度、古埃及、古巴比伦、古希腊到中国,不同地域孕育着不同进制也折射出不同的历史文化.这漫长的历史见证了数学发展的起点与符号系统的开端,也书写了数学史的精华.但由于进位制是数学的基础,所以在入学前的家庭教育阶段,父母就开始教孩子简单的数数.因此,在学生认知过程中,进位制早已成为十分自然的知识,介于低年级学生的能力,并不能体会蕴含其中的数学意义与数学文化.为了秉承《普通

高中数学课程标准(实验版)》(下称《课标》),以及核心素养对学生的要求,在高中阶段如何展开以数学文化为基础的进位制学习?如何基于此进一步培养中学生数学学习能力?如何寻找数学史与教学融合的有效方式?这些问题都值得思考.

1 进为制的教学分析

1.1 知识分析

回溯历史,从公元前两千年的古埃及象形文字,到公元前一千六百年的中国商代,十进制在不同的文明流域都有发展.从“九章算术”的刘徽注文中对长度的注解采用了数名:丈、尺、寸、分、厘、毫、秒、忽,可以看出其对十进制最原始的思考.如今对十进制的解释,大多公认为是人类有十个手指头这样生物上的巧合.当然,在数学史的发展中也有二十进制、六十进制、十二进制、五进制、九进制,以及如今应用广泛的二进制.从数学进位制在不同流域的发展中不难看出,进制的发展一定程度上体现了不同流域的生活以及文化,这不仅体现了数学史,也从侧面展现了人类发展的文明.

进位制本质是数基与位置计数法,要进行广泛的计数,就要系统化,即把数目排列成便于计数的基本群,群的大小,以所选用的匹配方式而定.即选取某一数 c 作为计数的基,也称为计数根或进位制,制定出数目 $1, 2, 3, \dots, c$ 的名称,此时大于 c 的数目可

收稿日期:2017-05-08

以用已选定名称的数目组合表示.由此可以看出,任意大于1的整数都可以称作为整数的基,且任意一个数在两个确定的基之间可以相互转化,基的选择可依据实际情况方便与否来进行选择.“位置计数法”是用有限数码符号的组合表示任何正整数.

以 c 进制为例, z 表示任意整数,一般表示方法:

$$z = z_n \cdot c^n + z_{n-1} \cdot c^{n-1} + \cdots + z_1 \cdot c^1 + c_0,$$

$$z = z_n z_{n-1} \cdots z_1 z_0.$$

进制的统一发展对数学的影响是巨大的,数基与位置记法将数的表示与运算变得更简洁.

1.2 学情分析

严格来说小学第一次学习数数就已近开始接触进位制:如,一年级认识钟表、20以内位制加法,到后期对于百位、千位、万位的认识及相关运算都是建立在对进位制认知的基础上.由于当时学生的知识储备比较单一,只能将这样伟大的发明作为知识来掌握,无法体会其中蕴含的意义.随着数学算法引入高中教材,要求加强数学课程对数学历史、文化、运用与发展的反映.在人教版必修三,第一章,第三节算法的案例四便以进位制为例,介绍了不同基下进位制的表示及算法,结合选修3-1,数学史选讲第一章,进一步介绍了进位制的数学史,在此过程中不仅要让学生重构对进位制本质的认知,符号化的应用,也要体会数学来源于生活需要.教育不仅要培养学生的智力水平,也要提高学生的非智力水平,提升学生数学素养.

1.3 课标分析

高中《课标》明确表示,“力求通过各种不同形式的自主学习、探究活动,让学生体验数学发现和创造的历程,发展他们的创新意识.”以及“帮助学生了解数学在人类文明发展中的重要作用,逐步形成正确的数学观,提倡体现数学的文化价值,并在适当的内容中提出对‘数学文化的学习要求.’在教学评价中强调“关注在过程中表现出来的与人合作的态度、表达与交流的意识与探索的精神.”《课标》对学习过程,学生自身能力的培养,以及数学观念的塑造都有明确的说明,对课程的要求已不再局限于显性的课堂知识,也有隐性能力的培养,这些在高考中虽然无法量化考核,但对教师日常教学中学生能力的评价却提出了相关要求.基于弗赖登塔尔的“再创造”理论,从历史与反思性学习出发,借助于进位制学习,期望教师能给予学生源于知识高于知识的不同学习体验.

1.4 数学文化分析

随着社会的飞速发展,文化在教育中的地位已越发的重要.虽然文化是缄默的,但背后所蕴含的教育价值却是无限的,数学文化的价值,对于学生的核心素养的养成具有整体的推动力量.数学文化可以开拓学生的认知的空间,提升学生的学习意志、情感、兴趣与求知的动力,促进学生整体认知结构的形成与发展,给予视野上的提高,培养学生追求严谨的唯理主义的意志.进位制在历史的发展中虽然百家争鸣,但体系内严谨性与广泛性的追求却不曾停歇,其发展中不断的累积,进而提升学生的认知维度,塑造更高远的精神世界.如今进位制的发展较之于历史已经超乎所以,而这过程中的艰辛与不满现状的追求,无异于向学生展现了不一样的数学文化.

2 审思数学史的进位制教学

由于学生对进位制已有一定了解,为了重构学生认知,让学生从进位制文本知识学习入手,在梳理总结后,小组合作进一步分析知识背后的原因,讨论其中异同,对比体会有无数学史对数学学习带来的影响,主要通过如下五个探究活动进行展开.

活动一:进位制梳理.

高中生的学习经历与认知能力已达到一定水平,接触、学习过生活中不同的进位制,尽管如此,学生对进位制的内涵并没有系统、实质的认知.因此需要将学生关于进位制原有的零碎、感性的认知进行理性而全面的加工与梳理.介绍进位制内容的相关书籍以及文章都较为丰富,因此,引导学生自行查阅相关书籍及文献,培养学生独立学习、获取、筛选知识的能力,并整理、重构对已有进位制的认知,在此基础上指导学生通过小组合作的方式,交流总结,最终理解进位制中数基与位置计数方法,并用符号抽象表示进位制,掌握其基本内涵.

要求学生利用符号总结归纳出进位制的表示方法是探究活动的难点所在,这也正是数学史发展中数学家们所遇见的困难,如何用统一的符号规范化地表示进位制,教师在此过程中可以给予适当的指导.

活动二:进位制初讲述.

基于一定的知识基础,教师指导学生回想小学阶段学习进位制时的情景与方法,设问:如果现在让你再去给小学生讲授进位制的课程你会如何设计?学生的设计不要求十分完善,形式可以灵活多样的如:教学片断、问题串、阅读材料等均可.

通过换位思考,让学生理解进位制本质的基础上,站在教师的角度上设计一节面向小学生的课程.教学是最好的老师,让学生不仅回顾自身曾经的学习状态,也通过思考:如何将进制的本质传授给低年级学生,进一步提高认知.这种方式对于学生来说比较新颖,但确是有利的,能迫使他们在回忆、认知的基础上,充分的理解,这是自主学习的方式,某种程度上,也是一种反思学习.

弗赖登塔尔曾说过:“反思是数学思维活动的核心动力,‘通过反思才能实现现实世界数学化’”.虽然国际上对于反思性学习并没有明确的定义,但是涂荣豹教授认为“反思”属于元认知概念的范畴,因此要用元认知的理论来描述:反思性数学学习就是学习者对自身数学学习活动,以及过程中涉及有关事物的学习特征的反向思考.反思是建构主义对于已有知识的重构,是立足于过去,指导现在,指向未来的学习活动.因此,不同于过去被动的接受,反思性学习是学生有策略的主动探究行为,有助于提高学生的自我学习能力、探究能力、创造能力,促进学生的全面发展.利用角色转化让学生反思,使学生在此过程中产生深刻认知,当然对进位制的反思性学习不是为了停留于现在,更要求对今后其他符号化知识的学习,有更加全面深刻的认知.

活动三:进位制异同分析.

随着学生的生活经验与学习知识的累积,中学生在现实生活中已经能广泛的接触到不同的进位制,而这些的进位制并没有使日常生活变得混乱,反而更加有条不紊.在符号表示进位制的基础上要求学生进行不同进位制之间的换算、探究,使学生在操作过程中体会进位制本质,感受数基与位置计数带来的好处,感受不同进位制之间本质差异,正是由于进位制独有的性质,才使得其对于当前数学发展带来的极大贡献.

在认知的基础上,请学生独立的创造性的设计出一套新的进位制,要求明确新进位制的符号和计数方法,说明在日常生活及数学方面有哪些运用?新进位制的设计可以完全不同于当前所用的进位制,也可以基于现行进位制做适当修改.学生通过回顾自己低年级所学,发现、感悟生活中的进位制,在此过程中,进行“再创造”重现历史,让学生体会数学家们为了方便计数,发明计数系统时,所遇见的困难,进一步培养学生创造力,以及符号化的数学思维,体会计数符号对简化计数与运算的重要作用.

“再创造”思想主要是让学生在现实活动中通过自己的实践与思考去“创造”的获得数学知识,而不是生吞活剥的将数学知识灌输给学生,数学学习不仅是从概念入手,更要从现实中去认识.因此,在学生创造性发明的进位制基础上,建构自身对知识的理解.

活动四:进位制发展的反思.

指导学生自行查找进位制的相关数学史材料,仔细阅读,归纳总结不同进位制发展的原因,并思考,数学进位制的发展与人类文明的发展有什么联系?这过程中体现了哪些数学文化,遇见了哪些困难?最后讨论:你认为与之前认知相比,在阅读数学史后,给予你哪些新的体会?在学生组内讨论,教师积极参与.

正如“一千个读者,就有一千个哈姆雷特”一样,不同的学生对于同一数学史内容,会有不同的体会和思考,形成不同的数学观.知识有唯一正确的解释,可是对于数学史与数学文化的体会则不可一概而论.教师不必一味宣扬中国古代数学发展的辉煌历史,知识与历史的传承没有国界之分,对于一切值得学习的文化,皆可“拿来主义”,这才是数学应该展现的包容之心.在此过程中,体会数学对人类的进化发展所带来的巨大的意义,数学并不是没有意义,学习数学也并不是没有价值,只是这样的知识与思想早已渗透在日常生活的方方面面,可往往越是些平常的事物才越必不可少,在此过程中让学生充分体会数学的价值.

活动五:进位制再讲述.

要求在了解完进位制相关的数学史之后,再设计一节为小学生讲授进位制的课程,让学生比较前后两次课程设计有何不同?

将数学史纳入进位制的 HPM 课堂对于教师来说有一定难度,或许学生还不能做到很好,但活动重点是让学生经历探究与反思的过程,明白进位制中的原委.通过对比学习数学史前后对进位制不同的认知,体会所有的知识都有史可寻,有据可依,形成内心的认知冲突,加深对数学历史与文化的感触.学生就能了解孩童时代使用“扳手指”的方式进行计数的方式也曾是祖先们的智慧.人类历史的发展与个体的发展总是有些相似与借鉴之处,所以通过对自身学习过程的反思,也是对数学历史的探寻,汲取数学文化的养料,有助于加深学习和思考.反思性学习,不仅要停留在个人的学习阶段,更要站在人类

发展的高度,回想在一个符号化、抽象化、知识系统发展还不完善的历史时期发明了进位制,在进位制三千多年漫长的发展历史中,数学已经发生了翻天覆地的变化:无理数的发现、欧式几何的产生、公理化思想的完善,这一系列的成就都基于此。试回想,如果当时进位制已较为完善,符号化已然成熟,当今的数学的发展又该是怎样的一番光景?

张奠宙教授曾说过:“当前的数学教学往往局限于一个概念、一个定理、一种思想的局部历史介绍,缺乏宏观的历史进程的综合性描述,实际上,用宏观的数学史进程可以更加深刻的揭示数学的含义。”在此,基于知识基础的背景,以反思回顾、自主学习的方式为主,在展现数学史的过程中,产生与以往截然不同的认知,培养学生的核心素养。

3 总结与反思

以数学史与数学文化为桥梁,以提升学生的能力与素养为目标,超越原有单纯知识的数学教育,从已有的知识与经验出发,提炼出进位制的本质,结合学生对自我学习过程的反思,这对学生而言,本身就提升认知能力的过程,并进一步培养了学生抽象、推理、模型的数学思想方法。但,这样的教学形式对于学生与教师来说都是全新的探索,所产生的教学效果也绝非一两节课就能显现,对学生的隐性能力的培养本身就需要漫长的过程。而且,高考对此并没有定量的检测标准,即便如此,这样的教学模式也值得在核心素养的指导下深入探索。当学生忘记数学知识后,如果还能留下数学史对心灵的震撼,数学文化对心灵的洗涤,这就是教学的成功。

参 考 文 献

- [1] H·伊夫斯. 数学史概论[M]. 山西:山西人民教育出版社,1986.
- [2] 李迪. 十进制小数发展史[J]. 数学通报,1964,1:47.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验)[M]. 北京:人民教育出版社,2003.
- [4] 李铁安. 文化意义下的数学及其教育意蕴[J]. 数学教育学报,2008,17(6):18.
- [5] 朱哲,吴正. 数学史:数学文化的一种载体[J]. 中学数学(高中版),2005,3:2.
- [6] 蒲淑萍,汪晓勤. 弗赖登塔尔的 HPM 思想及其教学启示[J]. 数学教育学报,2011,20(6):21.
- [7] 涂荣豹. 试论反思性数学学习[J]. 数学教育学报,2000,9(4):17.
- [8] 张奠宙. 关于数学史和数学文化[J]. 高等数学研究,2008,11(1):21.
- [9] 蒲淑萍,汪晓勤. HPM 视角下教师专业发展的研究与启示[J]. 数学教育学报,2015,24(3):77.
- [10] 蒲淑萍. F·克莱因的 HPM 思想及教育启示[J]. 浙江教育学院学报,2010,3:190.

A Study on Deep Reflection on the History of Mathematics and Its Effective Integration with Mathematics Teaching ——Discussion about the Development of Mathematics Teaching with Binary System

Xu Xingqian Wang Ruilin Tang Yipeng

(College of Education, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract

This study aims to discuss the integration of the mathematics history and classroom teaching with binary system as an example. The discussion includes the mathematics culture, students' learning situation and the curriculum standard, in order to present the teaching design with system. This study intends to strengthen the students' reflection to the existing cognition and deeply percept mathematics history and culture through understanding of binary system.

Key words: the history of mathematics, binary system, reflective learning, teaching design, inquiry activity.