DOI:10.19789/j.1004-9398.2026.01.005 **Open Access**
文献引用:汪卫东,韩明君,冯瑞龙.S型功能梯度复合梁的非线性颤振特性分析[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(1):33-43+55.
WANG W D,HAN M J,FENG R L. Analysis of nonlinear flutter characteristics of S-shaped functionally graded composite beams[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2026,47(1):33-43+55.

S型功能梯度复合梁的非线性颤振特性分析

汪卫东,韩明君*,冯瑞龙

(兰州理工大学理学院,甘肃 兰州 730050)

摘要:针对飞行器超音速飞行时可能发生的颤振等力学行为,基于经典梁理论和一阶活塞气动理论,探究S型功能梯度复合梁的非线性颤振特性。考虑2类S型功能梯度材料(S-FGM)复合梁结构,采用Galerkin法对系统控制方程进行离散化处理,结合Routh-Hurwitz稳定性判据与Hopf分岔理论,进一步推导出系统发生颤振时对应的临界流速与频率的解析表达式。通过数值算例,对比了2类不同分布复合梁在超音速环境下的稳定性,并系统地研究了梯度指数等关键物理参变量对S型功能梯度梁的颤振稳定性的影响,通过Runge-Kutta法对系统的稳定性进行验证。结果表明,随着功能梯度指数越大,系统将越容易发生颤振,研究结果将为S型功能梯度复合梁的设计优化提供理论依据。

关键词:S型功能梯度;Hopf分岔;复合梁;颤振
中图分类号:O351 **文献标志码**:A

Analysis of nonlinear flutter characteristics of S-shaped functionally graded composite beams

WANG Weidong, HAN Mingjun*, FENG Ruilong

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu 730050)

Abstract: Based on the classical beam theory and the first-order piston aerodynamic theory, the nonlinear flutter characteristics of S-shaped functionally graded composite beams are investigated for the mechanical behaviors such as flutter that may occur during the supersonic flight of aircraft. Considering two types of S-shaped functionally graded materials (S-FGM) composite beam structures, the Galerkin method is used to discretize the system control equation, combining with Routh-Hurwitz stability criterion and Hopf bifurcation theory, the analytical expressions of the critical velocity and frequency are derived. The stability performance of the two types of composite beams is compared through an example, and the influence of key physical parameters such as temperature stress, gradient index and aerodynamic stiffness coefficient on the flutter stability of S-type functionally graded beams is systematically studied. Finally, the stability of the system is verified by Runge-Kutta method. The results show that with the increase of the functionally graded index, the system will be more prone to flutter. The research results will provide a theoretical basis for the design optimization of S-shaped functionally graded composite beams.

收稿日期:2025-04-07
*通信作者:hanmj5188@163.com

Keywords: S-type functional gradient; Hopf bifurcation; composite beam; flutter
CLC: O351 **DC**: A

0 引 言

随着飞行器设计技术的大力发展,飞行速度逐渐被突破临界值,进入了超音速飞行阶段,这一过程将给飞行器设计带来诸多新的挑战,尤其飞行器外表面会与高温高压气体产生剧烈摩擦,气动加热效应显著,为了减缓该影响,通常需在其结构表面铺设防护材料,而不同材料间因物理属性存在突变,极易导致应力集中,进而引发剥离分层等现象[1]。针对这一问题,早期有学者提出功能梯度材料(functionally graded materials,FGM)这一概念,作为一种新型非均匀复合材料,其典型组元为金属与陶瓷,但二者并非通过简单堆叠或压制实现复合,而是沿厚度方向呈连续梯度分布,这种独特的制备工艺赋予FGM以优异性能,使其区别于传统层合材料,并能够更好地适应飞行器极端服役环境,因此在航空航天领域中得到广泛应用[2]。

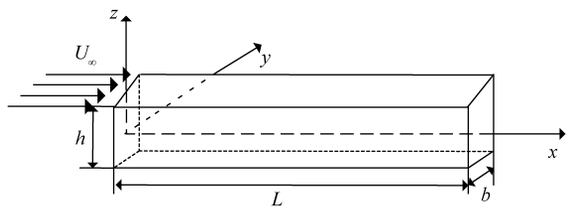
近年来,FGM的非线性力学特性研究已成为国内外学者关注的热点问题。李成龙和赵伟东[3]基于经典几何非线性梁理论,推导FGM夹层梁在受横向非均匀升温作用下的热过屈曲平衡路径和平衡构型;Belarbi等[4]基于新的双曲剪切变形理论,研究3种类型的FGM夹层梁,得到各种参数对梁自由振动行为的影响;Anh等[5]基于冯·卡门非线性和基础相互作用的铁摩辛柯梁理论,探究孔隙缺陷、初始几何缺陷、端部切向约束弹性、弹性基础和高温对FGM梁非线性振动的综合影响;赵英治等[6]基于修正偶应力理论与铁摩辛柯梁理论的耦合框架,建立了Winkler弹性地基上多孔二维功能梯度材料(2D-FGM)微梁的动力学模型,重点推导了其振动特性方程;Meski等[7]采用高阶剪切变形理论,用纳维型求解法求解了功能梯度梁在简单支座上的热弯曲、机械弯曲和热机械弯曲等一系列热环境下的热机械行为;陈琦等[8]基于数值模拟和理论分析2种方法,研究FGM梁在简支和固支2种约束下自由振动的线性与非线性振动问题;黄志诚等[9]基于高阶剪切变形理论,建立了弹性地基上非对称多孔功能梯度夹层板的自由振动分析模型,通过理论推导与数值验证,系统研究了多参数对振动特性的影响;Lei等[10]创新性地建立了改进的三阶剪切变形理论框架,通过引入高阶位移场函数精确表征横向剪切效应,系统研究了含孔隙分布的双向功能梯度梁的过屈曲行为;Patil等[11]使用Ritz方法求解承受轴向变化载荷(axially varying loads,AVL)的轴向功能梯度石墨烯片状(graphene platelet,GP)复合梁的屈曲和振动特性;Beg和Yasin[12]创新性地采用高效分层理论,推导出功能梯度曲梁在静态、自由振动和受迫振动等多种工况下的Navier型解析解;孙昊栋和马连生[13]同样基于一阶非线性梁理论,重点研究了梯度多孔梁在机械荷载作用下的非线性弯曲及过屈曲行为特征。上述众多研究从不同理论框架出发,为功能梯度结构的力学性能分析提供了重要的理论基础和解决方案。

目前,FGM力学性能的研究主要采用2种经典模型,即基于幂律函数[14]与指数函数[15]的材料参数表征方法,这些传统模型通过逐步调节金属或陶瓷组分的体积分数进而实现其梯度变化。对于这类常见的FGM,尽管保证了材料的连续性,但易在梯度界面急剧变化区域产生应力集中,因此,仍存在一定的理论局限性。Chung和Chi[16]提出一种全新理论模型——S型,通过2个幂函数来定义材料沿厚度方向的体积分数,能够更好地表征FGM的力学性能。然而,目前对S型功能梯度复合梁非线性问题的研究仍较少,仅聚焦在非线性弯曲和过屈曲相关问题[17],对S型功能梯度复合梁在超音速气流下的颤振响应鲜有研究。本文将基于经典梁理论和一阶活塞理论建立S型功能梯度复合梁动力学控制方程,利用Galerkin法离散控制方程获得结果[18],主要探究2类S型功能梯度复合梁的颤振稳定性响应,并通过数值计算对其进行验证。

1 模型建立

建立S型功能梯度复合梁在超音速气流中的运动模型如图1所示,梁的结构尺寸为长度(L)、宽度(b)和高度(h),两端采用简支约束。坐标系定义为x轴沿梁的轴线方向,y轴沿宽度方向,z轴沿厚度方向,坐标原点位于梁左侧几何中心。假设温度沿厚度方向均匀分布,温度变化为ΔT。梁上表面承受沿

x方向的超音速气流作用,其流动特性可由气动参数流速(U_∞)、空气密度(ρ_∞)以及马赫数(M_∞)表征。



注:L、b和h分别表示梁长、宽和高;U_∞、ρ_∞和M_∞分别表示流速、空气密度和马赫数。

图1　S型功能梯度材料(S-FGM)复合梁的模型

Figure 1　model of S-shaped functionally graded materials (S-FGM) composite beam

2类S-FGM梁分布模式下的尺寸与坐标系如图2所示。

S-FGM的物性参数P(如弹性模量E和密度ρ等)表达式为:

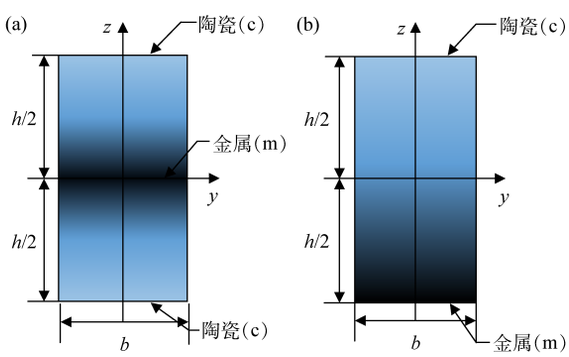


图2　2类S-FGM梁分布模式

(a)对称S-FGM;(b)非对称S-FGM

Figure 2　two types of S-FGM beam distribution pattern diagram

(a)symmetric S-FGM;(b)asymmetric S-FGM

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)\varphi_c, \tag{1}$$

$$\varphi_c + \varphi_m = 1, \tag{2}$$

式中:φ_c表示陶瓷体积分数,表征了陶瓷材料沿梁厚度方向的分布规律;梯度指数(n)作为关键参数,决定了S-FGM中各组分的分布特征,其不同取值对应着金属-陶瓷的成分梯度分布(下标m和c分别表示金属和陶瓷)。对称与非对称S-FGM梁中陶瓷体积分数的数学表达式如表1所示。

表1　陶瓷成份的体积分数

Table 1　volume fraction of ceramic composition

S-FGM梁	体积分数	
	$-\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant 0$	$0 \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}$
对称	$\left(\frac{h+2z}{h}\right)^n$	$\left(\frac{h-2z}{h}\right)^n$
非对称	$\frac{1}{2}\left(\frac{h+2z}{h}\right)^n$	$1-\frac{1}{2}\left(\frac{h-2z}{h}\right)^n$

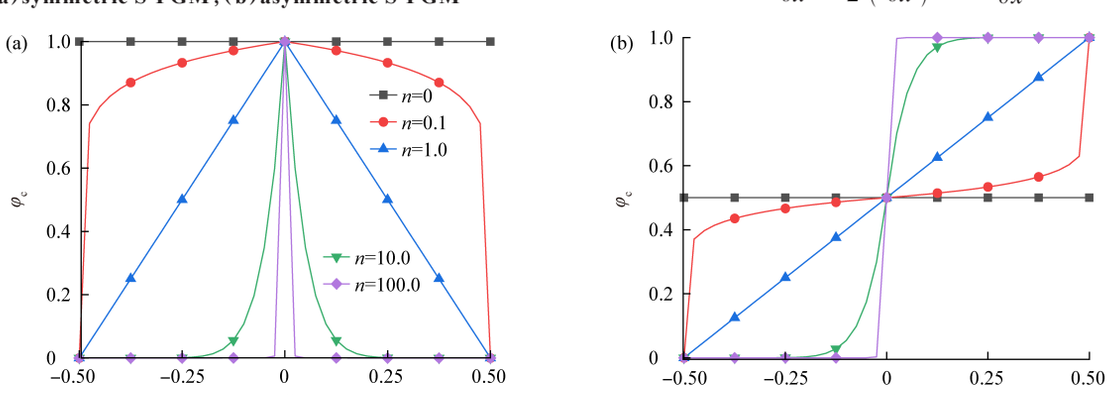
注:z为厚度。

为进一步阐明材料分布特性,图3给出了2类S-FGM梁的陶瓷相体积分数随厚度变化的分布曲线。其中对称分布的陶瓷相体积分数曲线呈对称分布,在材料的两端(顶部和底部)最高,向中间逐渐降低。而非对称分布陶瓷体积分数在材料的一端较高,向另一端逐渐降低。

2　基本方程及推导

基于准定常温度场假设,采用Von-Kármán大变形理论,几何非线性应变-位移关系表示为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{3}$$



注:n为梯度指数。

图3　陶瓷体积分数($\varphi_c(z)$)沿厚度(z)方向的变化

(a)对称S-FGM;(b)非对称S-FGM

Figure 3　change in ceramic volume fraction ($\varphi_c(z)$) along the thickness (z) direction

(a)symmetric S-FGM;(b)asymmetric S-FGM

式中u和w分别为x、z方向的位移。

对于等厚度复合梁,考虑存在温升ΔT作用,应变可表示为

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E(z)} + \alpha \cdot \Delta T, \tag{4}$$

式中:$E(z)$为不同梯度指数下FGM的弹性模量;温度变化为ΔT;σ_x为x方向的应力;α为热膨胀系数。

基于Hamilton变分原理,得到复合梁结构在超音速气流中的运动控制方程为:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta q_a = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

式中:M_x、N_x为弯矩和梁截面上的轴力;I_1为梁的单位长度质量;Δq_a为气动力。

内力-位移关系为:

$$N_x = \int_A \sigma_x \mathrm{d}A = A_x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) - B_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_T, \tag{6}$$

$$M_x = \int_A \sigma_x z \mathrm{d}A = B_x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) - D_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_T, \tag{7}$$

式中:A_x、B_x和D_x分别为梁的拉压刚度、耦合刚度和弯曲刚度;N_T、M_T表示为热应力。

$$\{A_x,\ B_xD_x\} = \int_A E(z)\{1, z, z^2\}\mathrm{d}A, \tag{8}$$

$$(N_T, M_T) = \int_A E(z)\alpha\Delta T\{1, z\}\mathrm{d}A, \tag{9}$$

S-FGM对称梁参数为$A_x = \dfrac{bh(nE_m + E_c)}{n+1} = bhg_1$,$N_T = \alpha\Delta Tbh\dfrac{(nE_m + E_c)}{n+1} = \alpha\Delta Tbhg_1$,$D_x = \dfrac{bh^3}{12}\left[\dfrac{E_m(n+1)(n+2)(n+3)+6(E_c-E_m)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right] = \dfrac{bh^3}{12}g_2$。

S-FGM非对称梁参数为$A_x = \dfrac{bh(E_c + E_m)}{2} = bhg_1$,$B_x = \dfrac{bh^2}{8}(E_c - E_m)\dfrac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)}$,$D_x = \dfrac{bh^3}{24}(E_c + E_m)$,$N_T = \dfrac{\alpha\Delta Tbh}{2}(E_c + E_m)$,

$$\Omega_x = \left(D_x - \frac{B_x^2}{A_x}\right) = \frac{bh^3}{12}\left[\frac{4(E_c + E_m)^2(n+1)^2(n+2)^2 - 3(E_c - E_m)^2(n^4 + 6n^3 + 9n^2)}{8(E_c + E_m)(n+1)^2(n+2)^2}\right] = \frac{bh^3}{12}g_2。$$

由于S-FGM梁的边界为两端简支,则边界条件可表示为$u\big|_{x=0,L} = 0$,式(5)可表示为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[A_x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - B_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] - N_T\right\} = 0, \tag{10}$$

对式(5)积分2次得

$$A_x\left[u + \frac{1}{2}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right] - B_x\int_L\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \int_L N_T\mathrm{d}x = B_1x + B_2, \tag{11}$$

代入边界条件得

$$B_1 = \frac{A_x}{2L}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x - N_T,\ B_2 = 0, \tag{12}$$

将其代入式(5)得

$$-D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_x\left\{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\right\} + \left\{\frac{A_x}{2L}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x - N_T\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta q_a = 0, \tag{13}$$

对式(10)两边关于x求导得

$$A_x\left\{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\right\} = B_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \tag{14}$$

将式(14)代入式(13)整理得

$$\left(\frac{B_x^2}{A_x} - D_x\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left\{\frac{A_x}{2L}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x - N_T\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta q_a = 0, \tag{15}$$

$$\Delta q_a = -\frac{2q_\infty}{\beta_0}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1}\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial w}{\partial t}\right), \tag{16}$$

式中:$\{I_1\} = \int_A \rho(z)\mathrm{d}A$;$q_\infty = \rho_\infty U_\infty^2/2$为来流动压;$\beta_0 = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$为Prandtl-Glauert因子。

为建立普适性的动力学分析模型,引入无量纲参数$\bar{w} = \dfrac{w}{h}$,$\bar{x} = \dfrac{x}{L}$,$\tau = \dfrac{t}{T}$,$\Omega_x = D_x - \dfrac{B_x}{A_x}$对控制方程进行无量纲化处理,得到

$$\bar{w}^{(4)} - \left\{6f_1\int_0^1(\bar{w})^2\mathrm{d}\bar{x} - R_T\right\}\overline{w''} + f_2\ddot{\bar{w}} + p_1\bar{w}' + p_2\dot{\bar{w}} = 0, \tag{17}$$

式中令$\ddot{\bar{w}}$的系数$f_2 = 1$,可得

对称S-FGM梁的参数为

$$f_1 = \frac{g_1}{g_2} = \frac{\left[(nE_m + E_c)\right]\cdot\left[(n+2)(n+3)\right]}{E_m(n+1)(n+2)(n+3) + 6(E_c - E_m)},$$

$$R_T = \frac{N_TL^2}{D_x} = Pf_1, f_2 = \frac{I_1L^4}{D_xT^2}, P = \frac{12\alpha\Delta TL^2}{h^2},$$

$$T=L^2\sqrt{\frac{I_1}{D_x}},p_1=\frac{L^3\rho_\infty U_\infty^2}{D_x\sqrt{M_\infty^2-1}},$$

$$p_2=\frac{L^2\rho_\infty U_\infty(M_\infty^2-2)}{\sqrt{I_1D_x}\,(M_\infty^2-1)^{\frac{3}{2}}}。$$

非对称S-FGM梁的参数为

$$f_1=\frac{g_1}{g_2}=\frac{4(E_c+E_m)^2(n+1)^2(n+2)^2}{4(E_c+E_m)^2(n+1)^2(n+2)^2-3(E_c-E_m)^2(n^4+6n^3+9n^2)},$$

$$R_T=\frac{N_TL^2}{\Omega_x}=Pf_1,f_2=\frac{I_1L^4}{\Omega_xT^2},P=\frac{12\alpha\Delta TL^2}{h^2},T=L^2\sqrt{\frac{I_1}{\Omega_x}},$$

$$p_1=\frac{L^3\rho_\infty U_\infty^2}{\Omega_x\sqrt{M_\infty^2-1}},\ p_2=\frac{L^2\rho_\infty U_\infty(M_\infty^2-2)}{\sqrt{I_1\Omega_x}\,(M_\infty^2-1)^{\frac{3}{2}}}。$$

2类S型FGM梁在$x=0,1$处无量纲边界条件为

$$\bar{w}(0,\tau)=\bar{w}(1,\tau)=0,\ \frac{\partial^2\bar{w}(0,\tau)}{\partial\bar{x}^2}=\frac{\partial^2\bar{w}(1,\tau)}{\partial\bar{x}^2}=0。\quad(18)$$

3　静态分岔及屈曲问题分析

在超音速气动热载荷作用下,S-FGM复合梁结构将产生热弹性变形。为探究简支边界条件下梁的静态屈曲特性,对控制方程(17)进行简化处理,忽略其强迫项、阻尼项及时变相关项。用$K(\bar{x})$表示去掉时间相关项后的$\bar{w}(\bar{x},\tau)$,作为S-FGM梁的屈曲构型,即

$$K(\bar{x})^{(4)}-[6f_1\int_0^1(K'(x))^2\,\mathrm{d}\bar{x}-Pf_1]K''(x)=0。\quad(19)$$

对于两端简支边界条件下的S型功能梯度梁,其边界条件可表示为

$$K(x)\big|_{x=0,1}=0,\ K''(x)\big|_{x=0,1}=0,\quad(20)$$

设$\lambda^2=Pf_1-6f_1\int_0^1(K'(x))^2\,\mathrm{d}\bar{x}$,其中$\lambda$为临界屈曲载荷的特征值,代入式(19)得

$$K(\bar{x})^{(4)}+\lambda^2K''(x)=0。\quad(21)$$

该方程的形式解为

$$K(\bar{x})=c_1\sin(\lambda\bar{x})+c_2\cos(\lambda\bar{x})+c_3\bar{x}+c_4,\quad(22)$$

将式(22)代入梁的边界条件式(20)得到线性齐次方程组,有非零解。令系数行列式为0,得到特征方程为

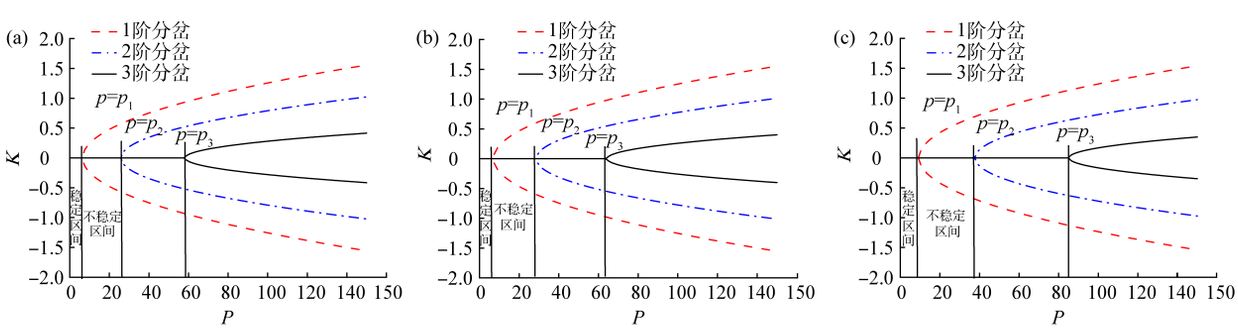
$$c\sin\lambda=0或\lambda=m\pi(m=1,2,3,\cdots),\quad(23)$$

取$\lambda=m\pi(m=1,2,3,\cdots)$,得到其屈曲构型为$K(x)=c\sin(m\pi\bar{x})$,将其回代到关于$\lambda$的表达式,得到

$$K(x)=\pm\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{Pf_1-\lambda^2}{3f_1}}\sin(\lambda\bar{x})。\quad(24)$$

为探究热应力效应对2类S型功能梯度梁力学行为的影响规律,本文通过数值算例展开讨论。计算采用几何参数L=0.300 m、b=0.030 m和h=0.004 m。在$\bar{x}=1/4$截面处进行重点分析,获得对称与非对称S型功能梯度复合梁的前三阶屈曲模态的静态分岔特性,如图4和5所示。

当轴向载荷(P)小于临界值(P_1)时,系统保持稳定平衡状态。随着载荷的逐步增大,在$P=P_1$时系统首次出现分岔现象,标志着屈曲失稳的开始。当载荷达到P_2时,原平衡位置失稳,转变为不稳定平衡点。进一步增大载荷至P_3时,系统将同时存在初始静平衡构型、第1阶屈曲构型和新出现的第2阶屈曲构型3种可能的平衡状态。当轴向载荷$P>P_3$继续增加时,系统将会存在3个屈曲构型。将图5中2类分布不同梯度指数下发生屈曲行为对应的临界载荷进行归纳,如表2所示。



注:K表示结构发生屈曲时偏离平衡位置的程度;P表示轴向力。

图4　不同梯度指数(n)下对称S-FGM平衡点分岔

(a)n=1;(b)n=10;(c)n=100

Figure 4　bifurcation plot of symmetric S-FGM equilibrium points under different gradient indices(n)

(a)n=1;(b)n=10;(c)n=100

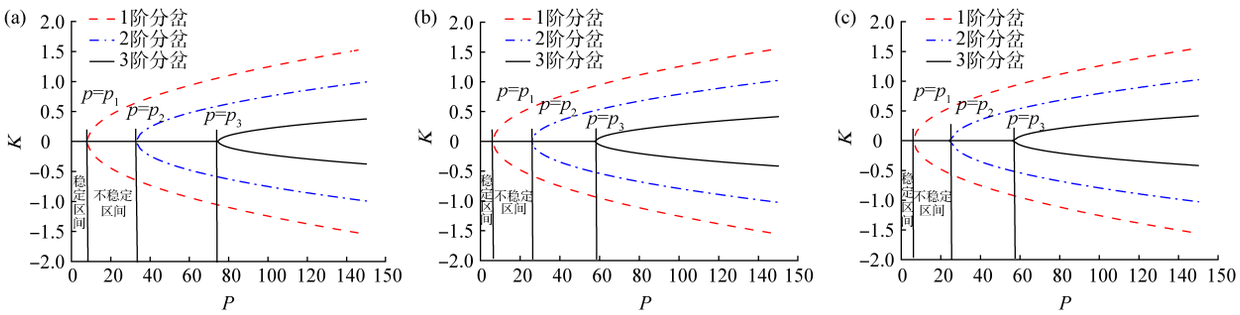


图5　不同梯度指数下非对称S-FGM平衡点分岔

(a)n = 1;(b)n = 10;(c)n = 100

Figure 5　bifurcation plot of asymmetric S-FGM equilibrium points under different gradient indices

(a)n = 1;(b)n = 10;(c)n = 100

表2　不同梯度指数下前3阶临界屈曲载荷

Table 2　the first three critical buckling loads under different gradient indices

临界屈曲载荷	n = 1		n = 10		n = 100	
	对称	非对称	对称	非对称	对称	非对称
1阶(P_1)	6.061	7.575	6.061	6.060	9.091	6.061
2阶(P_2)	25.757	31.818	27.273	25.757	36.364	24.242
3阶(P_3)	57.576	74.242	63.634	57.575	84.848	56.061

由图4、图5和表2可知,随着梯度指数的增大,即梯度材料中随着陶瓷成分比例的减少,2类S型梯度复合梁的临界载荷呈现出不同的变化趋势。对称S-FGM系统的临界载荷逐渐增大,而非对称S-FGM系统的临界载荷随之减小,这种差异是由于复合梁中的材料成分的改变引起系统中温度应力的改变,进而影响系统临界屈曲载荷,且在较小的梯度指数下,对称S-FGM梁的屈曲要先于非对称S-FGM梁发生,出现分岔,而随着梯度指数的进一步增大,非对称S-FGM梁的屈曲和分岔现象反而先于对称S-FGM梁发生。

4　复合梁系统的Galerkin离散稳定性分析

4.1　非线性常微分方程组的处理

基于Galerkin法,针对简支边界条件下的位移场,可将其展开为满足边界条件的正弦级数形式

$$\bar{w}(\bar{x},t)=\sum_{i=1}^{N}q_i(\tau)\varphi_i(\bar{x})=\sum_{i=1}^{N}q_i(\tau)\sin(i\pi\bar{x}),\quad(25)$$

式中:N为Galerkin截断函数;$q_i(\tau)(i=1,2,\cdots)$为模态幅值。

参照文献[18-19]可知,在超音速流场中结构颤振失稳主要由前2阶模态的强耦合效应主导。这里取前2阶Galerkin截断阶数,就足以保证后续推导精度与计算结果的准确性。则令$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}q_1(\tau)\\q_2(\tau)\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1(\bar{x})\\\varphi_2(\bar{x})\end{pmatrix}$,$\bar{w}(\bar{x},\tau)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}$,代入控制方程式(17)得

$$[\boldsymbol{\varphi}^{4}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}-[6f_1\int_0^1([\boldsymbol{\varphi}']^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q})^2\mathrm{d}\bar{x}-R_T][\boldsymbol{\varphi}'']^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+f_2\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{q}}+p_1[\boldsymbol{\varphi}']^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+p_2\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}=0,\quad(26)$$

式(26)方程两端各项左乘$\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1(\bar{x})\\\varphi_2(\bar{x})\end{pmatrix}$,且在气动弦长[0,1]上积分,得

$$f_2\begin{pmatrix}\ddot{q}_1\\\ddot{q}_2\end{pmatrix}+p_2\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\pi^4-R_T\pi^2 & -\frac{8}{3}p_1\\ \frac{8}{3}p_1 & 16\pi^4-4R_T\pi^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}+f_1\begin{pmatrix}3\pi^4q_1^3+12\pi^4q_1q_2^2\\12\pi^4q_1^2q_2+48\pi^4q_2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}。\quad(27)$$

为建立超音速流场中热力耦合作用下复合梁系统的动力学稳定性判据,本文采用状态空间方法对系统分岔行为进行解析研究。通过引入变量变换:令状态向量$\dot{q}_1=q_3$,$\dot{q}_2=q_4$,则$\ddot{q}_1=\dot{q}_3$,$\ddot{q}_2=\dot{q}_4$。基于Galerkin离散化得到的非线性控制方程可转化为自治动力系统$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=F(q_i)=\boldsymbol{A}(q_i)+N(q_i)$,其中$\boldsymbol{A}(q_i)$为系统线性算子矩阵,$N(q_i)$表征非线性耦合项。

$$\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\\ \dot{q}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{\pi^4-R_T\pi^2}{f_2} & \dfrac{8}{3f_2}p_1 & -\dfrac{1}{f_2}p_2 & 0\\ -\dfrac{8}{3f_2}p_1 & -\dfrac{16\pi^4-4R_T\pi^2}{f_2} & 0 & -\dfrac{1}{f_2}p_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{f_1}{f_2}(3\pi^4q_1^3+12\pi^4q_1q_2^2)\\ \dfrac{f_1}{f_2}(12\pi^4q_1^2q_2+48\pi^4q_2^3)\end{pmatrix}。\tag{28}$$

根据文献[20]提出的稳定性分析方法,基于Routh-Hurwitz判据将Hopf分岔问题转化为非线性方程的特征根求解问题。其平衡点处对应的Jacobian矩阵为

$$\boldsymbol{J}_A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{\pi^4-R_T\pi^2}{f_2} & \dfrac{8}{3f_2}p_1 & -\dfrac{1}{f_2}p_2 & 0\\ -\dfrac{8}{3f_2}p_1 & -\dfrac{16\pi^4-4R_T\pi^2}{f_2} & 0 & -\dfrac{1}{f_2}p_2\end{pmatrix}。\tag{29}$$

对应的特征方程为$\det(\boldsymbol{J}_A-\lambda\boldsymbol{I})=0$,其中$\boldsymbol{I}$为单位矩阵,展开得到关于$\lambda$的4次实系数方程

$$a_0\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0。\tag{30}$$

基于特征方程式(30)的系数,构建各阶Hurwitz行列式用于稳定性分析:

$$\begin{cases}a_0=1,\\ a_1=\dfrac{2p_2}{f_2},\\ a_2=\dfrac{17\pi^4f_2-5\pi^2f_2R_T+p_2^2}{f_2^2},\\ a_3=\dfrac{(17\pi^4-5\pi^2R_T)p_2}{f_2^2},\\ a_4=\dfrac{16\pi^8-20\pi^6R_T+4\pi^4R_T^2}{f_2^2}+\dfrac{64p_1^2}{9f_2^2},\end{cases}\tag{31}$$

$$\Delta_1=a_1,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & 1\\ a_3 & a_2\end{vmatrix}=a_1a_2-a_3,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ 0 & a_4 & a_3\end{vmatrix}=a_1a_2a_3-a_1^2a_4-a_3^2,$$

行列式$\Delta_1>0$且$\Delta_2>0$,当$M_\infty\gg0$,$\sqrt{M_\infty^2-1}\to M_\infty$,则

对称S型功能梯度梁为:

$$p_1^2=\frac{L^6\rho_\infty^2U_\infty^4}{D_x^2M_\infty^{\,2}},$$

$$p_2^2=\frac{L^4\rho_\infty^2U_\infty^2}{I_1D_xM_\infty^2}。$$

非对称S型功能梯度梁为:

$$p_1^2=\frac{L^6\rho_\infty^2U_\infty^4}{\Omega_x^2M_\infty^2},$$

$$p_2^2=\frac{L^4\rho_\infty^2U_\infty^2}{I_1\Omega_xM_\infty^2}。$$

由$\Delta_3=0$可得临界流速为

$$U_{\mathrm{cr}}^2=\frac{9}{256}\frac{D_x}{I_1L^2}\left(\frac{17\pi^4-5\pi^2R_T}{f_2}\right)+\frac{9}{256}\frac{\pi^2D_xM_\infty}{\rho_\infty L^3}\sqrt{\frac{\rho_\infty^2L^2}{(I_1M_\infty)^2}\left(\frac{17\pi^2-5R_T}{f_2}\right)^2+(80\pi^2-16R_T)^2}。\tag{32}$$

当$P_1=P_{1\mathrm{cr}}=\dfrac{L^3\rho_\infty}{D_xM_\infty}U_{\mathrm{cr}}^2$,方程式(32)有一对纯虚根$\pm\mathrm{i}\omega$,可得

$$\omega^2=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}a_4=\frac{2\left(16\pi^8-20\pi^6R_T+4\pi^4R_T^2+\dfrac{64}{9}p_{1\mathrm{cr}}^2\right)}{17\pi^4-5\pi^2R_T+2p_2^2}。\tag{33}$$

对于非对称结构的S型功能梯度梁的临界流速,将式(32)中的D_x用Ω_x替代。

设向量$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$和$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$是矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\mathrm{i}\omega$的归一化的左右特征向量。由$\boldsymbol{XA}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{AY}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{Y}$,且$\boldsymbol{XY}=1$得:

$$\boldsymbol{X}=v\begin{pmatrix}\dfrac{3f_2}{8p_1}\left[\left(\dfrac{16\pi^4-4R_T\pi^2}{f_2}\right)\left(\mathrm{i}\omega+\dfrac{p_2}{f_2}\right)+\mathrm{i}\omega\left(\mathrm{i}\omega+\dfrac{p_2}{f_2}\right)^2\right]\\ \mathrm{i}\omega+\dfrac{p_2}{f_2}\\ \dfrac{3f_2}{8p_1}\left[\left(\dfrac{16\pi^4-4R_T\pi^2}{f_2}\right)+\mathrm{i}\omega\left(\mathrm{i}\omega+\dfrac{p_2}{f_2}\right)\right]\\ 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{3f_2}{8p_1}\left[\left(\dfrac{\pi^4-R_T\pi^2}{f_2}\right)-\left(\omega^2-\dfrac{\mathrm{i}\omega p_2}{f_2}\right)\right]\\ \mathrm{i}\omega\\ \dfrac{3f_2}{8p_1}\left[\mathrm{i}\omega\left(\dfrac{\pi^4-R_T\pi^2}{f_2}\right)-\left(\mathrm{i}\omega^3+\omega^2\dfrac{p_2}{f_2}\right)\right]\end{pmatrix},\tag{34}$$

式中 $v=\dfrac{8p_1f_2}{3p_2\left(17\pi^4-5\pi^2R_T-\left(5f_2+1\right)\omega^2\right)+6\mathrm{i}\omega p_2^2}+\dfrac{8p_1f_2}{3\mathrm{i}\omega\left(33\pi^4f_2+\pi^4-9\pi^2f_2R_T-\pi^2R_T-3\omega^2f_2^2-\omega^2f_2\right)}$。

由 $\boldsymbol{B}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(P_1)}{\mathrm{d}P_1}\right|_{P_1=P_{1\mathrm{cr}}}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&\dfrac{8}{3f_1}&0&0\\-\dfrac{8}{3f_1}&0&0&0\end{pmatrix}$

在无量纲动压参数 $P_{1\mathrm{cr}}=\dfrac{L^3\rho_\infty}{M_\infty D_x}U_{\mathrm{cr}}^2$ 附近，纯虚根 $\mathrm{i}\omega$ 写为

$$\zeta_{1,2}(p_1)=\alpha(p_1)\pm\mathrm{i}\omega(p_1),\tag{35}$$

式中：$\alpha_1(P_1)=0$；$\omega(P_1)>0$。于是 $\boldsymbol{X}(P_1)\boldsymbol{A}(P_1)\boldsymbol{Y}(P_1)=\alpha_1(P_1)\pm\mathrm{i}\omega(P_1)$，在无量纲动压 $P_1=P_{1\mathrm{cr}}$ 处得到

$$\alpha_1'(P_{1\mathrm{cr}})=\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{X}(P_{1\mathrm{cr}})\boldsymbol{B}(P_{1\mathrm{cr}})\boldsymbol{Y}(P_{1\mathrm{cr}})\right)。\tag{36}$$

通过计算得到 $\alpha_1'(P_1)$ 在 $P_1=P_{1\mathrm{cr}}=\dfrac{L^3\rho_\infty}{D_xM_\infty}U_{\mathrm{cr}}^2\neq0$，并且满足

$$\begin{aligned}&a_1>0,a_2>0,\cdots,a_n>0,\\&\Delta_{n-1}=0,\Delta_i>0\,(i=n-3,n-5,\cdots),\end{aligned}\tag{37}$$

式中：$a_n(n=1,2,3\cdots,n)$ 为方程(32)的系数；$\Delta_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 是由 $a_n(n=1,2,3\cdots,n)$ 构造的 Hurwitz行列式。

当系统控制参数达到临界值($U=U_{\mathrm{cr}}$)时，系统动力学行为将发生Hopf分岔现象，此时超音速流场中的2类S型功能梯度梁会失去稳定性并诱发颤振。

4.2　数值算例

选取文献[21]中的材料模型参数，其FGM金属与陶瓷组分的 E 分别为70.000与380.000 Gpa，ρ 分别为2 780.000与3 800.000 kg/m^3，梁模型的 L、b 和 h 分别为0.300、0.030和0.004 m；再选取文献[22]中的外界气流参数，假设飞行器的飞行高度为11 km，此时 ρ_∞=0.364 kg/m^3，U_∞=295.065 m/s，M_∞=5。表3为2类不同分布下梁处在 $R_T=\pi^2/4$，$n=0.1$ 时对应的临界流速与频率的数据。

图7和8反映了当系统处在温度应力(R_T)为 $\pi^2/4$、$3\pi^2/4$ 和 $5\pi^2/4$ 这3种情况下，2类S型功能梯度梁结构随着梯度指数增大时临界流速和频率的变化趋势。结果显示当温度应力确定时，随着梯度指数(n)的增大，梁系统发生颤振时对应的临界流速呈现出先快速下降后逐渐减缓的趋势。这是由于材料刚度梯度变化：n 增大导致陶瓷体积分数降低，金属百分比上升，而金属的弹性模量显著低于陶

表3　$R_T=\pi^2/4$，$n=0.1$ 时2类分布对应的临界流速和频率

Table 3　the critical flow velocity and frequency corresponding to the two types of distributions when $R_T=\pi^2/4$, $n=0.1$

S-FGM梁	D_x/Ω_x	U_{cr}	$P_{1\mathrm{cr}}$	ω	Δ_1	Δ_2
对称	52.758	2 656.534	262.926	27.696	7.185 5	5 604.700
非对称	35.769	2 188.791	263.265	27.696	7.632 5	5 965.995

注：D_x/Ω_x 表示抗弯刚度；U_{cr}、$P_{1\mathrm{cr}}$ 和 ω 分别表示临界流速、动压和频率；Δ_1、Δ_2 分别表示1阶、2阶Hurwitz行列式。

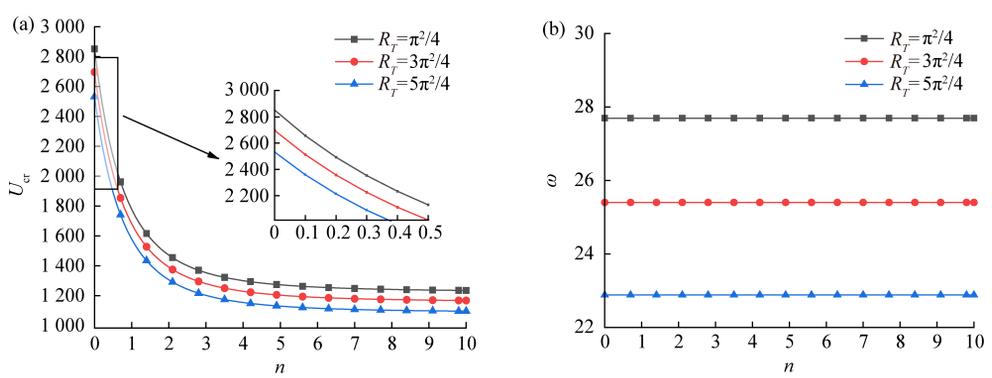


图7　不同 R_T 作用下的对称S-FGM的临界流速(U_{cr})和频率(ω)

(a)对称S-FGM的临界流速；(b)对称S-FGM的临界频率

Figure 7　critical flow velocity (U_{cr}) and frequency (ω) of symmetric S-FGM under different R_T

(a)critical flow velocity of symmetric S-FGM; (b)critical frequency of symmetric S-FGM

瓷,使得梁的整体弯曲刚度下降,进而稳定性降低易发生颤振等力学行为;当n>3时,系统的无量纲临界流速趋于稳定,无量纲临界频率仅以非常微小的变化呈现下降趋势,即在复合梁系统中n对频率的影响并不显著;当n为定值时,随着R_T的增加,临界流速明显减小,这是由于R_T的提高会显著降低结构的等效刚度,进而系统易发生颤振。

比较2类S型功能梯度梁的无量纲临界流速进而判断系统的稳定性能。当R_T一定且同处在较小的n下,其对称结构的临界流速要高于其非对称结构,即在相同的超音速气流环境中,系统中对称结构将表现出更佳的稳定性,而非对称结构则稳定性较差,易发生颤振等非线性力学行为;随着n的进一步增大,2类结构的临界流速逐渐接近,非对称结构的临界流速高于其对称结构,此时则非对称结构将呈现出更佳的稳定性,不容易发生颤振。

4.3　稳定性验证及分析

为了验证以上理论推导的正确性,计算了不同R_T对应系统的Jacobian矩阵的特征值如表4所示。

当S型功能梯度复合梁结构呈现为对称分布时,且n = 1,P_1 = 263时,采用非线性动力学分析方法,取初值为(0.005,0.005,0.010,0.010),通过数值模拟获得了功能梯度复合梁系统在不同R_T工况下的动力学响应特性。如图9所示,针对R_T为$\pi^2/4$、$3\pi^2/4$和$5\pi^2/4$这3种典型工况,分别给出了系统的时间历程曲线、相空间轨迹和庞加莱截面等关键特征。

根据数值计算结果(图9和表4),超音速流中对称S型功能梯度复合梁的稳定特性表现出明显的R_T依赖性。当P_1 = 263且R_T = $\pi^2/4$时,此时系统Jacobi矩阵的特征值呈现出具有一对纯虚根,而其余特征值实部均为负值,说明此复合梁系统处在临界状态,同时验证了基于Hopf分岔理论推导的颤振临界条件解析解的正确性,同时证明了该方法的计算效率优势。当系统处在高温工况(R_T = $3\pi^2/4$与R_T = $5\pi^2/4$)下,特征值实部符号将出现分化,此时系统产生稳定极限环振荡,振幅呈拟周期增长变化。值得注意的是,当动压条件一定时,当系统所受R_T的增大,复合梁的颤振幅值会显著增强,这一现象揭示了热-气动耦合效应对系统动力学行为的决定性影响。当R_T条件一定时,系统会随着所受动压的降低最终趋于稳定,对应特征值出现实部符号将全是负值。

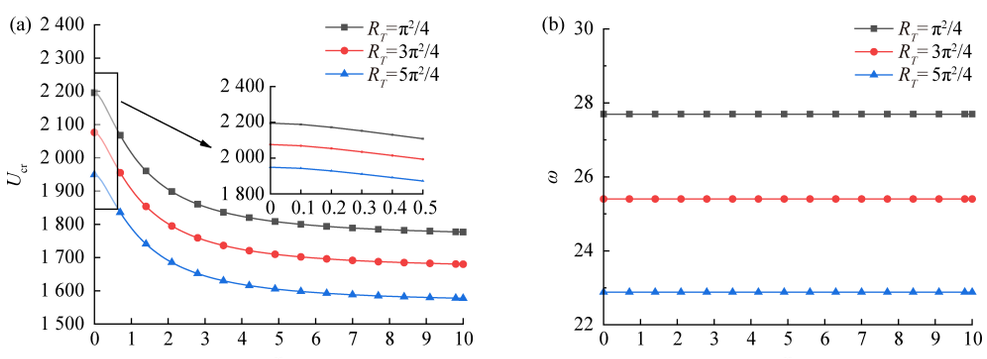


图8　不同R_T作用下的非对称S-FGM的U_{cr}和ω

(a)非对称S-FGM的临界流速;(b)非对称S-FGM的临界频率

Figure 8　critical flow velocity and frequency of asymmetric S-FGM under different R_T

(a)critical flow velocity of asymmetric S-FGM;(b)critical frequency of asymmetric S-FGM

表4　n=1对称分布的Jacobi矩阵的特征值

Table 4　eigenvalues of Jacobi matrix with symmetric distribution when n=1

无量纲动压(P_{1cr})	R_T = $\pi^2/4$	R_T = $3\pi^2/4$	R_T = $5\pi^2/4$
263.265 7	0±27.696 5i	4.366 1±26.097 1i	7.049 7±24.498 5i
	−3.816 2±27.696 5i	−8.182 3±26.097 1i	−10.865 9±24.498 5i
235.392 2	−1.804 3±21.627 6i	0±25.403 4i	4.655 1±23.707 4i
	−1.804 3±32.556 6i	−3.608 5±25.403 4i	−8.263 6±23.707 4i
207.518 9	−1.694 0±18.583 6i	−1.694 0±18.992 4i	0±22.881 7i
	−1.694 0±34.396 3i	−1.694 0±30.401 0i	−3.388 2±22.881 7i

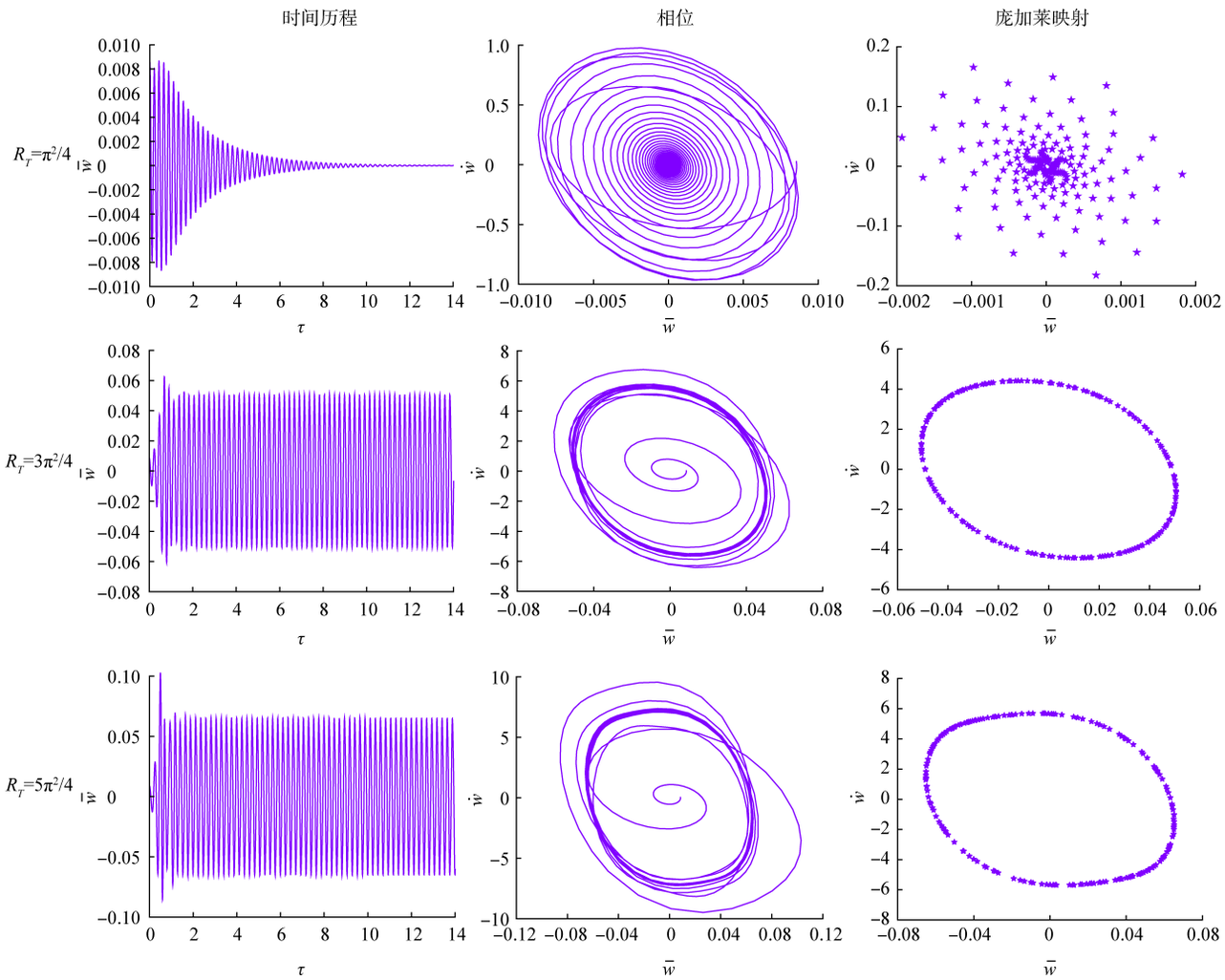


图9　不同R_T下时间历程、相位和庞加莱映射

Figure 9　time history diagram, phase diagram and Poincare map under different R_T

5　结　论

本文基于经典梁理论与一阶活塞气动理论，对2类S型功能梯度复合梁的颤振特性进行了深入分析，获得了重要结论。(1)n的变化对2类S型功能梯度梁的屈曲特性产生差异化影响：随着n值的增加，对称S-FGM梁的临界屈曲载荷呈现提升趋势；非对称构型的承载能力反而随n增大而逐步降低。这一现象揭示了材料梯度分布形式对结构稳定性能的关键调控作用。(2)n固定时，2类复合梁的颤振呈现以下规律，随着R_T的降低，其临界流速呈现递增趋势，这一现象在2类分布中均得到验证。特别地，当R_T保持恒定时，系统表现出独特的梯度效应，随着n的增大，无量纲临界流速呈现非线性衰减特征，表现为初期下降速率显著，后期逐渐趋于平缓。而临界频率变化并不显著，表明n对颤振频率的影响相对较弱。这种稳定性演化规律源于材料梯度分布与热应力场的复杂耦合作用：R_T降低增强了结构等效刚度；n的增大通过改变材料中2种组分的比例影响其稳定性。(3)通过Jacobi矩阵特征值分析可精确表征系统的动力学状态：当特征值出现一对共轭纯虚根时，系统处于颤振临界状态；若所有特征值Re(λ)<0，表明系统具有渐进稳定性；当特征值出现实部符号分化Re(λ)>0，系统将产生稳定的极限环振荡。这一判据为分岔点的精确识别提供了量化依据。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2025. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

参 考 文 献

[1]　李畅，万志强，王晓喆，等. 热载荷环境下金属-陶瓷功

能梯度板的屈曲特性研究[J].北京航空航天大学学报,2024,50(7):1833-1844. DOI:10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0658.
LI C, WAN Z Q, WANG X Z, et al. Buckling characteristics of metal-ceramic functionally graded plates under thermal loads [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2024, 50(7):1833-1844.

[2] 王壮壮,王腾,丁艳梅,等.基于高阶剪切变形理论的功能梯度板自由振动分析简化模型[J].振动工程学报,2024,37(3):384-393. DOI:10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2024.03.003.
WANG Z Z, WANG T, DING Y M, et al. Simplified model for free vibration analysis of functionally graded plates based on higher-order shear deformation theory [J]. Journal of Vibration Engineering, 2024, 37(3): 384-393.

[3] 李成龙,赵伟东.横向非均匀温度场作用的FGM夹层梁热屈曲分析[J].青海大学学报,2024,42(2):60-67. DOI:10.13901/j.cnki.qhwxxbzk.2024.02.008.
LI C L,ZHAO W D. Thermal buckling analysis of FGM sandwich beams under transversely non-uniform temperature field [J]. Journal of Qinghai University, 2024,42(2):60-67.

[4] BELARBI M O, KHECHAI A, HOUARI M S A, et al. Free vibration behavior of sandwich FGM beams: parametric and uncertainty analysis [J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2024, 12: 883-905. DOI:10.1007/s42417-024-01452-7.

[5] ANH N D, VAN THINH N, VAN TUNG H. Nonlinear vibration analysis of geometrically imperfect FGM Timoshenko beams with porosity and elastically restrained ends in thermal environments [J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2024, 52(3): 1427-1448. DOI:10.1080/15397734.2024.2353876.

[6] 赵英治,唐怀平,赖泽东,等.弹性地基上多孔二维功能梯度材料微梁自由振动研究[J].应用数学和力学,2023,44(11):1354-1365. DOI:10.21656/1000-0887.440050.
ZHAO Y Z, TANG H P, LAI Z D, et al. Free vibration of porous 2D-FGM microbeams on elastic foundation [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2023, 44(11):1354-1365.

[7] MESKI K, MAMEN B, MENASRIA A. Analytical solutions for the thermo-mechanical bending of FG beams using a higher order shear deformation theory (HSDT) [J]. MATEC Web of Conferences, 2024, 394: 03004. DOI:10.1051/matecconf/202439403004.

[8] 陈琦,马连生,郭章新.功能梯度材料梁自由振动的线性与非线性振动[J].力学与实践,2023,45(3):520-525. DOI:10.6052/1000-0879-22-397.
CHEN Q, MA L S, GUO Z X. Linear and nonlinear vibrations of functionally graded material beams [J]. Mechanics in Engineering, 2023, 45(3): 520-525.

[9] 黄志诚,韩梦娜,王兴国,等.弹性地基上非对称多孔功能梯度材料夹层板的自由振动[J].振动与冲击,2024,43(10):156-163. DOI:10.13465/j.cnki.jvs.2024.10.019.
HUANG Z C, HAN M N, WANG X G, et al. Free vibration of asymmetric porous FGM sandwich plates on elastic foundation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2024, 43(10): 156-163.

[10] LEI J, HE Y, LI Z, et al. Postbuckling analysis of bi-directional functionally graded imperfect beams based on a novel third-order shear deformation theory [J]. Composite Structures, 2019, 209: 811-829. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.10.106.

[11] PATIL H H, PITCHAIMANI J, ELTAHER M A. Buckling and vibration of beams using Ritz method: effects of axial grading of GPL and axially varying load [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2024, 31 (16): 3861-3874. DOI: 10.1080/15376494.2023.2185711.

[12] BEG M S, YASIN M Y. Bending, free and forced vibration of functionally graded deep curved beams in thermal environment using an efficient layerwise theory [J]. Mechanics of Materials, 2021, 159: 103919. DOI: 10.1016/j.mechmat.2021.103919.

[13] 孙昊栋,马连生.梯度多孔材料梁的非线性力学行为[J].应用力学学报,2019,36(1):104-109+256. DOI:10.11776/cjam.36.01. D113.
SUN H D, MA L S. Nonlinear mechanical behavior of functionally graded porous beams [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2019, 36(1): 104-109+256.

[14] 毛丽娟,马连生.非均匀热载荷作用下功能梯度梁的非线性静态响应[J].工程力学,2017,34(6):1-8. DOI:10.6052/j.issn.1000-4750.2015.10.0868.
MAO L J, MA L S. Nonlinear static response of functionally graded beams under non-uniform thermal loads[J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(6): 1-8.

[15] SAYYAD A S, GHUGAL Y M. Analytical solutions for bending, buckling, and vibration analyses of exponential functionally graded higher order beams [J]. Asian Journal of Civil Engineering, 2018, 19: 607-623. DOI: 10.1007/s42107-018-0046-z.

[16] CHUNG Y L, CHI S H. The residual stress of functionally graded materials[J]. Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering, 2001, 13(1): 1-9.

(下转第55页)

研究[J].红外与激光工程,2015,44(1):148-156. DOI:10.3969/j.issn.1007-2276.2015.01.026.
LIU Y,QIAN H L,FAN F. Wind load characteristics of large radio telescope [J]. Infrared and Laser Engineering,2015,44(1):148-156.

[32] LI S,HAN B Q,LIU S Y,et al. Simulation-driven wind load analysis and prediction for large steerable radio telescopes[J]. Research in Astronomy and Astrophysics,2023,23(2):20-29. DOI:10.1088/1674-4527/acae6d.

[33] NGO T T,LETCHFORD C W. Experimental study of topographic effects on gust wind speed[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics,2009,97(9/10):426-438. DOI:10.1016/j.jweia.2009.06.013.

[34] 叶笃正.小地形对于气流的影响[J].气象学报,1956(3):243-262. DOI:10.11676/qxxb1956.018.
YE D Z. Topography effect on the airflow [J]. Acta Meteorologica Sinica,1956(3):243-262.

[35] 吴莎,余官培,卢胜,等.风电工程中负切变现象的分析研究[J].太阳能,2021(6):67-77. DOI:10.19911/j.1003-0417.tyn20200514.02.
WU S,YU G P,LU S,et al. Analysis of negative shear force phenomenon in wind power engineering[J]. Solar Energy,2021(6):67-77.

[36] 吕新生,王旭,蔡仁,等.乌鲁木齐辖区山谷风环流特征的分析[J].干旱区地理,2016,39(6):1172-1180. DOI:10.13826/j.cnki.cn65-1103/x.2016.06.003.
LYU X S,WANG X,CAI R,et al. Characteristics of mountain-valley breeze in Urumqi area[J]. Arid Land Geography,2016,39(6):1172-1180.

[37] 刘敏,孙杰,杨宏青,等.湖北省不同地形条件下风随高度变化研究[J].气象,2010,36(4):63-67. DOI:10.7519/j.issn.1000-0526.2010.04.011.
LIU M,SUN J,YANG H Q,et al. The study on wind speed change with height under different terrain conditions in Hubei Province[J]. Meteorology,2010,36(4):63-67.

[38] 石雪峰,夏建新,吉祖稳.植被条件对近地表风速垂线分布的影响[J].中央民族大学学报(自然科学版),2007,16(1):9-15. DOI:10.3969/j.issn.1005-8036.2007.01.003.
SHI X F,XIA J X,JI Z W. The effect of vegetation condition on wind velocity perpendicular line distribution in the near ground[J]. Journal of Minzu University of China(Natural Science Edition),2007,16(1):9-15.

[39] 贺志明,聂秋生,刘熙明,等.鄱阳湖区近地层风能资源特征研究[J].资源科学,2011,33(1):184-191.
HE Z M,NIE Q S,LIU X M,et al. Surface-layer wind energy resources over the Poyang Lake Area [J]. Resources Science,2011,33(1):184-191.

(责任编辑:兰丽丽)

(上接第43页)

[17] 甘勇天,马连生.热载荷作用下对称S型功能梯度圆板的非线性力学行为[J].固体力学学报,2022,43(2):158-167. DOI:10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2021.056.
GAN Y T,MA L S. Nonlinear mechanical behavior of symmetric S-FGM circular plates under thermal loads [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics,2022,43(2):158-167.

[18] 周良强,陈予恕,陈芳启.超音速气流中受热壁板的非线性动力学分析[J].科学技术与工程,2010,10(19):4744-4747. DOI:10.3969/j.issn.1671-1815.2010.19.033.
ZHOU L Q,CHEN Y S,CHEN F Q. Nonlinear dynamic analysis of heated panels in supersonic flow[J]. Science Technology and Engineering,2010,10(19):4744-4747.

[19] 杨智春,张蕊丽.基于最大李雅普诺夫指数的壁板热颤振特性分析[J].西北工业大学学报,2009,27(6):770-776. DOI:10.3969/j.issn.1000-2758.2009.06.005.
YANG Z C,ZHANG R L. Thermal flutter characteristics of panels based on maximum Lyapunov exponent[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University,2009,27(6):770-776.

[20] 张继业,杨翊仁,曾京.Hopf分岔的代数判据及其在车辆动力学中的应用[J].力学学报,2000,32(5):596-605. DOI:10.3321/j.issn.0459-1879.2000.05.011.
ZHANG J Y,YANG Y R,ZENG J. Algebraic criterion for Hopf bifurcation with application to vehicle dynamics [J]. Acta Mechanics Sinica,2000,32(5):596-605.

[21] BOUAMAMA M,ELMECHE A,ELHENNANI A,et al. Exact solution for free vibration analysis of FGM beams[J]. Journal of Composite & Advanced Materials/Revue des Composites et des Matériaux Avancés,2020,30(2):55-60. DOI:10.18280/rcma.300201.

[22] 杨智春,周建,谷迎松.超音速气流中受热曲壁板的非线性颤振特性[J].力学学报,2012,44(1):30-38. DOI:10.6052/0459-1879-2012-1-lxxb2010-853.
YANG Z C,ZHOU J,GU Y S. Nonlinear flutter characteristics of heated curved panels in supersonic flow [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics,2012,44(1):30-38.

(责任编辑:兰丽丽)