DOI：10.19789/j.1004-9398.2025.06.007
文献引用：丁熙来，李金泽．三维等熵可压缩磁流体力学方程的爆破现象［J］．首都师范大学学报（自然科学版），2025，46（6）：49-53. DING X L，LI J Z. Blow-up of three-dimensional isentropic compressible magnetohydrodynamics equations［J］. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2025，46（6）：49-53.

三维等熵可压缩磁流体力学方程的爆破现象*

丁熙来**，李金泽
（扬州大学数学科学学院，江苏 扬州　225002）

摘要：在速度梯度和磁场梯度满足一定的衰减性，且初始总动量非零的条件下，研究了全空间三维等熵可压缩磁流体方程在有限时间内经典解的爆破现象。通过构造球体证明质量、动量和能量在全空间守恒，并在此基础上使用Hölder不等式、插值不等式等方法处理相关非线性项，得到了爆破现象。

关键词：微分方程；爆破；等熵；可压缩磁流体方程；经典解；Hölder不等式
中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A

Blow-up of three-dimensional isentropic compressible magnetohydrodynamics equations*

DING Xilai**，LI Jinze
（College of Mathematical Sciences，Yangzhou University，Yangzhou Jiangsu　225002）

Abstract：Under the conditions that the gradient of the velocity and magnetic field satisfy a certain decay，and the initial total momentum does not vanish，the explosion phenomenon of classical solutions of the three-dimensional isentropic compressible magnetohydrodynamic equation in finite time is studied. Blow-up result is derived by constructing the sphere to prove the conservation of mass，momentum and energy in full space and applying Hölder inequality，interpolation inequalities，and other methods to deal with relevant nonlinear terms.

Keywords：differential equation；blow-up；isentropic；compressible magnetohydrodynamics；classical solutions；Hölder inequality
CLC：O175.2　　**DC**：A

0　引　言

磁流体力学（magnetohydrodynamic，MHD）是研究流体运动与电磁场相互作用的重要物理学分支，其方程的基本形式是由控制磁场的麦克斯韦（Maxwell）方程和控制流体运动的纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程耦合而成。因此，相较于经典的Navier-Stokes方程，MHD方程一方面拥有Navier-Stokes方程中复杂性和非线性的特征，另一方面由于磁场与流体之间产生的电磁感应，使得其结构更加复杂，所以对MHD方程的研究更加困难。由于MHD方程在天体物理学、等离子体物理学、现代水利和航空航海等诸多领域都具有重要应用背景，以及其在偏微分方程领域的广泛应用，MHD方

收稿日期：2024-07-17
*江苏高校品牌专业建设工程项目（PPZY2015B109）；江苏省自然科学基金项目（BK20221369）
**通信作者：d13621556192@163.com

程吸引了诸多科学家对其展开持续深入地研究。自20世纪50年代起至今,关于MHD方程解的存在性、唯一性及爆破现象等方面都取得了许多重要的突破,为阐释与预测自然现象提供了坚实的理论基础与实用工具,有力推动了相关学科的科研进展与实际应用[1-4]。本文研究的全空间$\Omega = R^3$中的三维等熵可压缩磁流体方程为[5]

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \tag{1a}$$

$$(\rho u)_t + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P(\rho) = (\nabla \times H) \times H + \mu \Delta u + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u, \tag{1b}$$

$$H_t - \nabla \times (u \times H) = -\nabla \times (v \nabla \times H), \tag{1c}$$

$$\mathrm{div} H = 0, \tag{1d}$$

式中:t为时间;$x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$为空间坐标;$\rho$为流体密度;$u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$、$P = P(\rho)$、$H = (H_1, H_2, H_3) \in R^3$分别表示速度、压力和磁场。常数$\lambda$、$\mu$和$v$分别表示剪切系数、体积黏度系数和磁扩散系数,并且满足

$$\mu > 0,\ 2\mu + 3\lambda \geqslant 0 \text{和} v > 0。 \tag{2}$$

压力(P)满足状态方程

$$P(\rho) = A\rho^{\gamma}, A > 0, \gamma > 1, \tag{3}$$

式中A和γ都是物理常数。

众所周知,在现代流体力学中,Navier-Stokes方程是极其重要的数学物理模型,其很好地描述了流体运动规律,因此一直是国内外学者关注的热点问题。Xin[6]在初始密度具有紧性的假设下,得到了任意维度下Navier-Stokes方程光滑解的爆破现象;Xin和Yan[7]通过去除初始密度有紧支集和光滑解总能量有限的假设,证明了可压缩Navier-Stokes方程经典解的爆破现象;Jiu等[8]在不要求初始数据具有紧支集和在任意有限空间内包含空集的前提下,通过对初始条件的限制,证明了在任意维度下具有恒定和退化黏性系数的完整可压缩Navier-Stokes方程和等熵可压缩Navier-Stokes方程光滑解的爆破现象;Wang和Li[9]在温度Sobolev范数和速度散度的某个范数有界条件下,证明了具有真空状态的完全可压缩Navier-Stokes方程的爆破准则;Lai[10]在速度梯度满足特定假设下,给出了Navier-Stokes方程在有限时间内经典解的爆破现象;Tang和Kuang[11]在初始密度具有紧支集的假设下,得到非等温可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程在任意维度上平滑解的爆破现象。

与Navier-Stokes方程相比,MHD方程组引入磁场与动力场进行耦合的系统,因此更加复杂。MHD方程具有重要的物理意义和研究价值,因此,众多学者对MHD方程开展了相关研究。Wang和Li[12]建立了只依赖于密度和磁场强解的全局正则性的爆破准则,研究了三维可压缩MHD方程组的Cauchy问题;Wang等[13]仅根据速度场的导数,证明了三维可压缩黏性热传导MHD方程组的爆破现象;Tang和Wang[14]研究了具有恒定和简并黏度的完全可压缩磁流体动力学方程和等熵可压缩磁流体动力学方程关于柯西问题平滑解的爆破现象;Du和Wang[15]还根据速度矢量场的发散,以及具有狄利克雷边界条件有界域情况的条件,证明了二维黏性可压缩导热MHD方程组的爆破准则;Chen和Liu[16]根据速度梯度满足特定假设,证明了三维可压缩MHD方程组在真空区域和零电阻条件下有限时间内的爆破准则;边东芬和唐童[17]通过引进新的物理量并做出特定假设,得到了可压缩MHD方程组光滑解的爆破现象;尚朝阳[18]给出了三维不可压缩MHD方程组在带有负指数的非齐次Besov空间中的爆破准则;赵小奎[19]在初始密度具有紧支集的光滑解存在时间有限的条件下,再延拓出最大存在时间,通过反证给出强解的爆破准则。

本文以三维等熵可压缩磁流体方程为研究对象,通过Hölder不等式、插值不等式、Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式以及Fubini定理,得到了引理2.1(总质量、总动量和总磁场能量守恒),并在证明过程中给定了定理1.2中关于(ρ, u, H)的约束条件,通过不等式及引理2.1,证明了定理1.2。本文探究了三维等熵可压缩磁流体力学方程的爆破现象,扩充了MHD方程爆破现象的有关文献,以期激发其他研究者的兴趣,促进进一步探索新的研究方向、提出新的研究问题,共同推动学术界发展。

1 问题介绍与主要结果

文献[10]在速度梯度满足特定假设下,给出了Navier-Stokes方程在有限时间内经典解的爆破现象。在此基础上,本文考虑其耦合Maxwell方程而成的三维等熵可压缩MHD方程,研究该方程在有限时间内是否存在经典解的爆破现象。与Navier-Stokes方程相比,本文在证明MHD方程的总质量、动量、能量守恒以及主要结果时,需要处理其中与磁感应强度H有关的非线性项,而这些非线性项则

是处理的难点所在。通过对这些非线性项的分析,得到了主要结果。

在给出主要结果之前,先给出初始点和经典解的定义

$$(\rho,u,H)(0,x)=(\rho_0,u_0,H_0)(x)。\tag{4}$$

定义 1.1(经典解)[20] 如果 T 为正数,且

$$\rho\in C^1([0,T)\times R^3),u\in C^1([0,T)\times C^2(R^3)),$$
$$H\in C^1([0,T)\times C^2(R^3)),$$

则 $(\rho(t,x),u(t,x),H(t,x))$ 称为三维等熵可压缩磁流体方程(1)的经典解,且在 $[0,T)\times R^3$ 上的每一点均满足方程(1)。

本文将用以下定理来证明主要结果。

定理 1.2 若满足式(2 和 3),假设 (ρ,u,H) 是三维等熵可压缩磁流体方程(1)的解,则有

$$\int_{R^3}\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2+A\rho^\gamma+\frac{1}{2}|H|^2\right)\mathrm{d}x+$$
$$\int_0^t\int_{R^3}(\mu|\nabla u|^2+(\lambda+\mu)|\nabla\cdot u|^2+\nu|\nabla H|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_{R^3}\frac{1}{2}\left(\rho_0|u_0|^2+A\rho_0^\gamma+\frac{1}{2}|H_0|^2\right)\mathrm{d}x<\infty,\forall t\geqslant 0。\tag{5}$$

假设 (ρ,u,H) 满足

$$\int_{R^3}\rho(t,x)\,\mathrm{d}x<\infty,\forall t\geqslant 0,\tag{6}$$

$$\int_{R^3}|\nabla u(t,x)|\mathrm{d}x<\infty,\forall t\geqslant 0,\tag{7}$$

以及

$$\int_{R^3}H\mathrm{d}x<\infty,\int_{R^3}|\nabla H|\mathrm{d}x<\infty,\forall t\geqslant 0。\tag{8}$$

当满足初始条件

$$\left|\int_{R^3}\rho_0(x)u_0(x)\,\mathrm{d}x\right|\neq 0,\tag{9}$$

则 (ρ,u,H) 必定可以在有限时间内找到一个时间奇异点 T^*,当 $t>T^*>0$ 时,三维等熵可压缩磁流体方程(1)的经典解爆破。

2 总质量、总动量守恒和总磁场能量守恒

在证明定理 1.2 之前,首先需要给出引理2.1。该引理旨在证明三维等熵可压缩磁流体方程(1)中的质量、动量和能量是守恒的。与文献[10]相比,此引理的证明需要进一步研究和处理其中与磁场相关的非线性项,下面给出引理 2.1 及其证明过程。

引理 2.1 若满足式(2、3 和 6),则三维等熵可压缩磁流体方程(1)的质量、动量和磁场能量守恒,则有

$$\int_{R^3}\rho(t,x)\,\mathrm{d}x=\int_{R^3}\rho_0(x)\,\mathrm{d}x,t>0,\tag{10a}$$

$$\int_{R^3}\rho(t,x)u(t,x)\,\mathrm{d}x=\int_{R^3}\rho_0(x)u_0(x)\mathrm{d}x,t>0,\tag{10b}$$

$$\int_{R^3}H(t,x)\,\mathrm{d}x=\int_{R^3}H_0(x)\,\mathrm{d}x。\tag{10c}$$

证明 通过结合式(5~8)可以得出对于任意的 $t>0$,存在 $R_n(t)\to\infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|=R_n}\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2+\rho+H+A\rho^\gamma+\frac{1}{2}|H|^2\right)\mathrm{d}\sigma=0,\tag{11}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_{|x|=R_n}(\mu|\nabla u|^2+(\lambda+\mu)|\nabla\cdot u|^2+\nu|\nabla H|^2)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s=0。\tag{12}$$

动量是有界的

$$\left|\int_{R^3}\rho u\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_{R^3}\rho\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R^3}\rho|u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}<\infty。\tag{13}$$

在此基础上,构造一个空间上半径为 R 的球体 $B_R=\{x\in R^n:|x|\leqslant R\}$,对式(1a)进行积分,得到

$$\int_{|x|\leqslant R}\partial_t\rho(t,x)\mathrm{d}x+\int_{|x|\leqslant R}\nabla\cdot(\rho u)\mathrm{d}x=0。\tag{14}$$

注意到

$$\int_0^\infty\left|\int_{|x|\leqslant R}\nabla\cdot(\rho u)\,\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}R=\int_0^\infty\left|\int_{|x|=R}\frac{x}{R}\cdot(\rho u)\,\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}R\leqslant$$
$$\int_0^\infty\left\|\sqrt{\rho}\right\|_{L^2(\partial B_R)}\left\|\sqrt{\rho}\,u\right\|_{L^2(\partial B_R)}\mathrm{d}R\leqslant$$
$$\left\|\sqrt{\rho}\right\|_{L^2(R^3)}\left\|\sqrt{\rho}\,u\right\|_{L^2(R^3)}<\infty。\tag{15}$$

通过对式(14)左侧第一个关于半径进行积分,得到

$$\left|\int_0^\infty\int_{|x|\leqslant R}(\rho(t,x)-\rho_0(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}R\right|=\left|\int_0^\infty\int_{|x|\leqslant R}\int_0^t\partial_s\rho\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}R\right|\leqslant$$
$$\int_0^t\int_0^\infty\left|\int_{|x|\leqslant R}\partial_s\rho\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}R\mathrm{d}s\leqslant$$
$$t\left\|\sqrt{\rho}\right\|_{L^2(R^3)}\left\|\sqrt{\rho}\,u\right\|_{L^2(R^3)}<\infty。\tag{16}$$

因此,对于任意 $t>0$,存在 $R_n(t)\to\infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\leqslant R}(\rho(t,x)-\rho_0(x))\,\mathrm{d}x=0,\tag{17}$$

再根据假设式(6)可以得到式(10a)质量是守恒的。

式(10b)也可以采用类似的方法来证明,首先对式(1b)在球体上进行积分,可以得到

$$\int_{|x|\leqslant R}(\rho u)_t\,\mathrm{d}x=-\int_{|x|\leqslant R}(\mathrm{div}(\rho u\otimes u)+\nabla P(\rho)-$$
$$(\nabla\times H)\times H-\mu\Delta u-(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}u)\mathrm{d}x。\tag{18}$$

考虑式(1b)多出了含有磁感应强度 H 的非线性项 $(\nabla\times H)\times H$。因此,需要通过一些方法和

手段来克服这一难点。经过计算可以将$(\nabla\times H)\times H$改写成$\nabla H\cdot H-\frac{1}{2}\nabla|H|^2$的形式。然后采用类似式(15)的方法,结合式(5~8),运用Hölder不等式就可以得到

$$\int_0^\infty\left|\int_{|x|\leqslant R}(\operatorname{div}(\rho u\otimes u)+\nabla P(\rho)-(\nabla\times H)\times H-\mu\Delta u-(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}u)\,\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}R\leqslant$$
$$\left\|\rho|u|^2\right\|_{L^1(R^3)}+\|P\|_{L^1(R^3)}+(\lambda+2\mu)\|\nabla u\|_{L^1(R^3)}+$$
$$\|H\|_{L^2(R^3)}\|\nabla H\|_{L^2(R^3)}+\frac{1}{2}\left\||H|^2\right\|_{L^1(R^3)}<\infty。\quad(19)$$

当考虑等熵情况时,根据式(5)有

$$\|P\|_{L^1(R^3)}=\int_{R^3}A\rho^\gamma\,\mathrm{d}x<\infty,\quad(20)$$

然后通过对式(18)左侧关于半径进行积分,与式(16)类似,得到

$$\left|\int_0^\infty\int_{|x|\leqslant R}(\rho(t,x)u(t,x)-\rho_0(x)u_0(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}R\right|<\infty。\quad(21)$$

因此,对于任意$t>0$,存在$R_n(t)\to\infty$使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\leqslant R}(\rho(t,x)u(t,x)-\rho_0(x)u_0(x))\,\mathrm{d}x=0,\quad(22)$$

再根据式(13)可以得到动量(10b)是守恒的。

MHD方程内包含磁场与流体之间产生的电磁感应,结构更加复杂。因此,将文献[10]推广到MHD方程,需要特别考虑磁场能量守恒,对式(1c)再次采用类似的证明过程,首先得到

$$\int_{|x|\leqslant R}\partial_t H(t,x)\,\mathrm{d}x=$$
$$\int_{|x|\leqslant R}(H\nabla u-u\nabla H-H\nabla\cdot u+v\Delta H)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}R,\quad(23)$$

式(23)右侧均为有关H的非线性项。通过观察表明,上述方法能够解决其中部分非线性项,但是难以对其中的$u\nabla H$进行处理。为了解决该项得到想要的结果,则需要引入新的方法来进行处理。考虑先通过Hölder不等式,可以将$\int_0^\infty\int_{|x|\leqslant R}|u\nabla H|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}R$放缩得到$\|u\|_{L^6(R^3)}\|\nabla H\|_{L^{\frac{6}{5}}(R^3)}$,再运用插值不等式和Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式,得到$C\|\nabla u\|_{L^2(R^3)}\|\nabla H\|^{\frac{2}{3}}_{L^1(R^3)}\|\nabla H\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(R^3)}$,此时通过式(5~8)可知该项$<\infty$。具体计算过程为

$$\int_0^\infty\left|\int_{|x|\leqslant R}(H\nabla u-u\nabla H-H\nabla\cdot u+v\Delta H)\,\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}R\leqslant$$
$$\int_0^\infty\int_{|x|\leqslant R}|H\nabla u|+|u\nabla H|+|H\nabla\cdot u|+|v\Delta H|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}R\leqslant$$
$$\|H\|_{L^2(R^3)}\|\nabla u\|_{L^2(R^3)}+\|u\|_{L^6(R^3)}\|\nabla H\|_{L^{\frac{6}{5}}(R^3)}+$$
$$\|H\|_{L^2(R^3)}\|\nabla\cdot u\|_{L^2(R^3)}+v\|\nabla H\|_{L^1(R^3)}\leqslant$$
$$\|H\|_{L^2(R^3)}\|\nabla u\|_{L^2(R^3)}+C\|\nabla u\|_{L^2(R^3)}\|\nabla H\|^{\frac{2}{3}}_{L^1(R^3)}\|\nabla H\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(R^3)}+$$
$$\|H\|_{L^2(R^3)}\|\nabla\cdot u\|_{L^2(R^3)}+v\|\nabla H\|_{L^1(R^3)}<\infty,\quad(24)$$

式中C为常数。

通过对式(23)左侧关于半径进行积分,与式(16)相同,得到

$$\left|\int_0^\infty\int_{|x|\leqslant R}(H(t,x)-H_0(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}R\right|<\infty。\quad(25)$$

因此,对于任意$t>0$,存在$R_n(t)\to\infty$使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\leqslant R}(H(t,x)-H_0(x))\,\mathrm{d}x=0,\quad(26)$$

再根据假设式(8)可以得到磁场能量(10c)是守恒的。

3 定理1.2的证明

证明了质量、动量和磁场能量守恒之后,再证明主要定理。∇u和$\nabla\cdot u$共2项处理手段与文献[10]相同,得到当$\gamma>1$时存在

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(R^3)}\geqslant C_0>0,\quad(27)$$

式中C_0为常数,数值大小只取决于$\int_{R^3}(\frac{1}{2}\rho_0(x)|u_0(x)|^2+A\rho_0^\gamma(x))\,\mathrm{d}x$,$\int_{R^3}\rho_0u_0\,\mathrm{d}x$和$\int_0^t\int_{R^3}((\lambda+\mu)|\nabla\cdot u|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\geqslant0$。

本文与文献[10]相比,多出的H有关项$\int_0^t\int_{R^3}(v|\nabla H|^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s$,不需要同$\nabla u$一样证明其积分恒>0,只需要同$\nabla\cdot u$一样满足积分≥0即可证明本文的结果。式(2)指出磁扩散系数$v>0$可知

$$\int_0^t\int_{R^3}(v|\nabla H|^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\geqslant0。\quad(28)$$

将式(28)带入到式(5)中,根据不等式性质得到

$$\int_{R^3}(\frac{1}{2}\rho|u|^2+A\rho^\gamma+\frac{1}{2}|H|^2)\mathrm{d}x+C_0\mu t\leqslant$$
$$\int_{R^3}(\frac{1}{2}\rho_0|u_0|^2+A\rho_0^\gamma+\frac{1}{2}|H_0|^2)\mathrm{d}x,\forall t\geqslant0。\quad(29)$$

通过运用Hölder不等式和插值不等式,解决了MHD方程组中与文献[10]相比所特有的关于H的非线性项,观察式(29)表明存在一个时间点$T^*>0$,当$t>T^*$时,与质量、动量和能量守恒且为正的结果相矛盾。这样就完成了对定理1.2的证明,得到三维等熵可压缩磁流体方程(1)的经典解在有限时间内爆破。

4 结束语

本文研究了全空间三维等熵可压缩磁流体方程在有限时间内经典解的爆破现象。在速度梯度和磁场梯度满足一定衰减性,且初始总动量非零的条件下,分析了方程中包含H和u耦合的磁场能量方程、H的散度、以及在动量方程中增加的H的旋度,应用引理2.1证明了方程的经典解在有限时间内爆破,即得到本文结果定理1.2。当方程变为全空间三维非等熵可压缩磁流体方程时,该方程的经典解在有限时间内是否存在爆破现象的问题有待进一步研究。

参 考 文 献

[1] DAVIDSON P A, BELOVA E V. An introduction to magnetohydrodynamics[M].北京:世界图书出版公司,2010.

[2] TAYLOR M E. Partial differential equations I[M]. 北京:世界图书出版公司,1996.

[3] HEIL C. Introduction to real analysis [M]. Berlin: Springer,2019.

[4] PRIEST E R,FORBES T. Magnetic reconnection:MHD theory and applications [M]. New York: Cambridge University Press,2000.

[5] XU X, ZHANG J. A blow-up criterion for 3D non-resistive compressible magnetohydrodynamic equations with initial vacuum[J]. Nonlinear Analysis(Real World Applications),2011,12(6):3442-3451.

[6] XIN Z P. Blow-up of smooth solutions to the compressible Navier-Stokes equation with compact density [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics,1998,51(3):229-240.

[7] XIN Z,YAN W. On blow-up of classical solutions to the compressible Navier-Stokes equations [J]. Communications in Mathematical Physics, 2013, 321(2):529-541.

[8] JIU Q S,WANG Y X,XIN Z P. Remarks on blow-up of smooth solutions to the compressible fluid with constant and degenerate viscosities [J]. Journal of Differential Equations,2015,259(7):2981-3003.

[9] WANG Y F,LI S. Blow-up criteria for full compressible Navier-Stokes equations with vacuum state[J]. Chinese Annals of Mathematics(Series B),2017,38(3):741-758.

[10] LAI N A. Blow-up of classical solutions to the isentropic compressible Navier-Stokes equations [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications,2015,25:112-117.

[11] TANG T, KUANG J. Blow-up of compressible Navier-Stokes-Korteweg equations [J]. Acta Applicandae Mathematicae,2014,130(1):1-7.

[12] WANG Y F, LI S. Global regularity for the Cauchy problem of three-dimensional compressible magnetohydrodynamics equations [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications,2014,18:23-33.

[13] WANG Y F,DU L,LI S. Blow-up mechanism for viscous compressible heat-conductive magnetohydrodynamic flows in three dimensions [J]. Science China Mathematics,2015,58(8):1677-1696.

[14] TANG T, WANG Y. Blow-up of smooth solutions to the compressible magnetohydrodynamic flows[J]. Journal of Mathematical Analysis &Applications,2015,422(1):250-264.

[15] DU L, WANG Y F. A blow-up criterion for viscous, compressible, and heat-conductive magnetohydrodynamic flows[J]. Journal of Mathematical Physics,2015,56(9):091503.

[16] CHEN M,LIU S. Blow-up criterion for 3D compressible magnetohydrodynamics with vacuum and zero resistivity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2013,400(1):174-186.

[17] 边东芬,唐童.可压缩磁流体方程光滑解的爆破性[J].数学物理学报,2016,36(4):715-721.

[18] 尚朝阳.不可压缩磁流体方程组在Besov空间中的爆破准则[J].数学物理学报,2019,39(1):67-80.

[19] 赵小奎.可压缩磁流体方程组光滑解与强解的爆破准则[D].焦作:河南理工大学,2014.

[20] NOVOTNÝ A, STRAŠKRABA I. Introduction to the mathematical theory of compressible flow [M]. England:Oxford,2004:80-81.

(责任编辑:兰丽丽)