DOI:10.19789/j.1004-9398.2025.03.003

文献引用:牛家星,高丽.数论函数方程$\phi_8(n)=\frac{n}{d}$的可解性[J].首都师范大学学报(自然科学版),2025,46(3):16-23. NIU J X,GAO L. Solvability of the number theoretic functional equation $\phi_8(n)=\frac{n}{d}$[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2025,46(3):16-23.

数论函数方程$\phi_8(n)=\frac{n}{d}$的可解性*

牛家星,高 丽**

(延安大学数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘要:根据广义欧拉函数$\phi_8(n)$的准确计算公式,针对其中的某一个公式,利用初等方法和技巧研究方程$\phi_8(n)=\frac{n}{d}$的可解性,其中$n>8$为正整数,d是n的正因子。并得到其全部正整数解(n,d),即当$\alpha=0$时,该方程的正整数解为$(n,d)=(9,9)(11,11)$;当$\alpha=1$和$\alpha=2$时,该方程无正整数解。

关键词:计算公式;广义欧拉函数;可解性;正因子;正整数解

中图分类号:O156 **文献标志码**:A

Solvability of the number theoretic functional equation $\phi_8(n)=\frac{n}{d}$*

NIU Jiaxing, GAO Li**

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi 716000)

Abstract: By using the exact formula for the generalized Euler function $\phi_8(n)$, for one of the formulas, this paper studies the solvability for the equation $\phi_8(n)=\frac{n}{d}$, where n is a positive integer and d is a positive factor of $n>8$. Use elementary methods and techniques to obtain all its positive integer solutions (n,d), when $\alpha=0$, the positive integer solution of the equation is $(n,d)=(9,9)(11,11)$. When $\alpha=1$ and $\alpha=2$, the equation has no positive integer solution.

Keywords: computation formula; generalized Euler function; solvability; positive factor; positive integer solution

CLC:O156 **DC**:A

0 引 言

欧拉函数在数论的学习和研究中应用十分广泛,即正整数n的欧拉函数$\phi(n)$定义为序列$1,2,\cdots,n-1$中与n互素的正整数的个数[1]。后来,Cai[2]定义了广义欧拉函数,即对于任意的正整数e,

收稿日期:2024-05-06

*国家自然科学基金项目(11471007)

**通信作者:yadxgl@163.com

正整数n的广义欧拉函数$\phi_e(n)$定义为序列$1,2,3,\cdots,\left[\frac{n}{e}\right]$中与$n$互素的个数,即

$$\phi_e(n)=\sum_{i=1,\gcd(i,n)=1}^{\left[\frac{n}{e}\right]}1。$$

容易证明

$$\phi_e(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left[\frac{d}{e}\right]。$$

式中$\mu(n)$为麦比乌斯函数,即

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ (-1)^s, & n\geqslant 2,\alpha_1=\cdots=\alpha_s=1,\\ 0, & n\geqslant 2,\exists\alpha_i 1(1\leqslant i\leqslant k),\end{cases}$$

式中$n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}$且$\alpha_i\geqslant 0,p_i(1\leqslant i\leqslant s)$为不同的素数。

近年来有不少学者对广义欧拉函数进行研究[3-7]。其中:赵贤和刘敏捷[6]由$\phi_5(n)$的准确计算公式,研究了方程$\phi_5(n)=\frac{n}{d}$的可解性;王容等[7]根据$\phi_3(n)$的计算公式,研究了$\phi_3(n)=\frac{n}{d}$的可解性,并得出其全部正整数解。

Cai等[8]和Shen等[9]利用雅可比符号和勒让德公式得到了$\phi_e(n)(e=3,4,6)$的计算公式;王容和廖群英[10]给出了$\phi_5(n)$的准确计算公式;Yang等[11]得到了广义欧拉函数$\phi_e(n)(e=8,12)$的准确计算公式。本文将根据$\phi_8(n)$的计算公式,研究方程

$$\phi_8(n)=\frac{n}{d}\tag{1}$$

的可解性,其中d是n的正因子且$d\geqslant 2$。

1 相关引理

为后文叙述方便,设n为正整数,记$\Omega(n)$为n的素因子个数(重复计数),$\omega(n)$为n的不同素因子的个数,并规定$\Omega(1)=\omega(1)=0$。

引理1[12] 对任意素数p和正整数α,有$\phi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)$。

引理2[13] 对任意2个互素的正整数m、n,有$\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$。

引理3[11] 若$n=2^\alpha\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>8$,其中$p_i(1\leqslant i\leqslant k)$是不同的奇素数,记

$$P_k=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\},$$

$$R_{P_k}=\{r_i|p_i\equiv r_i(\mathrm{mod}8),0\leqslant r_i\leqslant 7,p_i\in P_k,1\leqslant i\leqslant k\},$$

则当$\alpha\in\{0,1,2\}$且$R_{P_k}=\{3,7\},\{3\}$时

$$\phi_8(n)=\frac{1}{8}\phi(n)+\frac{1}{8}(-1)^{\Omega(n)-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}2^{\omega(n)-\frac{1}{2}(1-(-1)^\alpha)}。$$

2 主要结论及其证明

2.1 定理1及其证明

定理1 设$n=2^\alpha\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>8$,其中$k\geqslant 1,\forall i=1,\cdots,k,\alpha_i\geqslant 1$,且$\alpha_i$为整数,$R_{P_k}=\{3,7\},\{3\}$,当$\alpha=0$时,方程(1)的正整数解为$(n,d)=(9,9)(11,11)$。

证明 当$\alpha=0$时,$n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$,此时由引理3及方程(1)可得

$$\frac{1}{8}\phi(n)+\frac{1}{8}(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)}=\frac{n}{d}=\frac{\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}}{d},\tag{2}$$

即

$$d\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^k d=8\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}。\tag{3}$$

因为d是n的正因子,$d\geqslant 2$且$\gcd(d,2)=1$,不妨设$d=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}$,其中$0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k)$。则由式(3)可得

$$\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}(-1)^{\Omega(n)}2^k=8\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}。\tag{4}$$

对两边取模$p_i^{\alpha_i-1}$可得$\alpha_i-1\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k)$。对比式(4)两边2的个数得到$k=1$或2。

(I) $k=1$,即$n=p_1^{\alpha_1}$,则由式(4)得

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}2=8p_1^{\alpha_1-\beta_1},\tag{5}$$

其中$\alpha_1-\beta_1=0$或1。

(i) 当$\alpha_1-\beta_1=0$时,由式(5)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}2=8,$$

则$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=6$或10。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=6$,则$p_1=7$且$\alpha_1=\beta_1=1$或$p_1=3$且$\alpha_1=\beta_1=2$,此时解$(n,d)=(9,9)(7,7)$,经验证$(n,d)=(9,9)$满足式(2)。此时方程(1)有解。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=10$,则$p_1=11$且$\alpha_1=\beta_1=1$,此时解$(n,d)=(11,11)$,经验证满足式(2)。此时方程(1)有解。

(ii) 当$\alpha_1-\beta_1=1$时,由式(5)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}2=8p_1, \tag{6}$$

若$\alpha_1\geqslant 2$,对式(6)两边取模p_1有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)}2$,这与p_1为奇素数矛盾。则$\alpha_1=1,\beta_1=0$,从而有

$$(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)}2=8p_1,$$

即$p_1=-\frac{3}{7}$或$\frac{1}{7}$。这与p_1为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(II) $k=2$,即$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,则由式(4)得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^2=8p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2}, \tag{7}$$

式中$\alpha_i-\beta_i=0$或$1(i=1,2)$。因此有以下4种情况。

(i) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(7)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}4=8, \tag{8}$$

则$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=4$或12。

若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=4$,此时若$\alpha_1\geqslant 2$或$\alpha_2\geqslant 2$,则$p_1\mid 4$或者$p_2\mid 4$,这与$p_1,p_2$为奇素数矛盾。因此有$\alpha_1=\alpha_2=1$,即$(p_1-1)(p_2-1)=4$,得$(p_1,p_2)=(2,5)(3,3)$,这与$p_1<p_2$且$p_1$、$p_2$为奇素数矛盾。若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=12$,即$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\frac{p_1-1}{2}\frac{p_2-1}{2}=3$,又分为以下4种。

(a)若$\min(\alpha_1,\alpha_2)\geqslant 2$,则有$p_1p_2\mid 3$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾,因此$1\leqslant\alpha_1\leqslant 2,1\leqslant\alpha_2\leqslant 2$。

(b)若$\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$,则有$p_2\mid 3$,从而$p_1=p_2=3$,与$p_1<p_2$矛盾。

(c)$\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$同理。

(d)若$\alpha_1=\alpha_2=1$,则有$(p_1-1)(p_2-1)=12$,得$(p_1,p_2)=(2,13)(3,7)(4,5)$,其中$(p_1,p_2)=(2,13)(4,5)$与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾,解$(n,d)=(21,21)$,经验证不满足式(2)。

此时方程(1)无解。

(ii) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,由式(7)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}4=8p_1p_2, \tag{9}$$

若$\alpha_1\geqslant 2$或$\alpha_2\geqslant 2$,对式(9)两边取模p_1或p_2有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)}4$或$p_2\mid(-1)^{\Omega(n)}4$,这与p_1、p_2为奇素数矛盾。所以$\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_1=\beta_2=0$,即$n=p_1p_2$且$d=1$。由式(9)可得

$$(p_1-1)(p_2-1)=8p_1p_2\pm 4,$$

由于$(p_1-1)(p_2-1)\leqslant p_1p_2$,所以$(p_1-1)(p_2-1)=8p_1p_2-4$,即$p_1=\frac{5-p_2}{7p_2+1}$,由于$5-p_2<7p_2+1$,此时方程(1)无解。

(iii) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(7)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}4=8p_1。 \tag{10}$$

若$\alpha_1\geqslant 2$,对式(10)两边取模p_1有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)}4$,这与p_1为奇素数矛盾。因此$\alpha_1=1,\beta_1=0$,式(10)为

$$p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}4=8p_1, \tag{11}$$

若$\alpha_2=\beta_2=1$,则式(11)为

$$(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}4=8p_1,$$

即$p_1p_2-9p_1-p_2=3$或-5。

若$p_1p_2-9p_1-p_2=3$,则$p_1=1+\frac{12}{p_2-9}$,得到$p_1=7,p_2=11$,此时解$(n,d)=(77,11)$,经验证不满足式(2)。此时方程(1)无解。

若$p_1p_2-9p_1-p_2=-5$,则得到$p_1=3,p_2=11$,与$R_{P_k}=\{3,7\}$矛盾,此时方程(1)无解。

(iv) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,证明过程同(iii),得到$p_2<p_1$与$p_1<p_2$矛盾,此时方程(1)无解。

2.2 定理2及其证明

定理2 设正整数$n=2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>8$,其中$k\geqslant 1$,$\forall i=1,\cdots,k,\alpha_i\geqslant 1$,且$\alpha_i$为整数,$R_{P_k}=\{3,7\},\{3\}$,当$\alpha=1$时,方程(1)无解。

证明 当$\alpha=1$时,$n=2\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$,此时由引理3及方程(1)可得

$$\frac{1}{8}\phi(n)+\frac{1}{8}(-1)^{\Omega(n)-1}2^{\omega(n)-1}=\frac{n}{d}=\frac{2\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}}{d}, \tag{12}$$

即

$$d\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2^{k-1}d=16\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}。 \tag{13}$$

因为d是n的正因子,$d\geqslant 2$且$\gcd(d,2)=1$,不妨设$d=2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}$,其中$\beta=0$或1,且$0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k)$。则由式(13)可得

$$2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}(-1)^{\Omega(n)-1}2^{k-1+\beta}=16\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i},\tag{14}$$

即

$$2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2^{k-1+\beta}=16\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}。\tag{15}$$

对两边取模$p_i^{\alpha_i-1}$可得

$$\alpha_i-1\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k)。$$

(I) 若$\beta=0$,则$d=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}$,对比式(14)两边2的个数得到$k=1$或2。

(i) $k=1$,即$n=2p_1^{\alpha_1}$,则由式(15)得

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}=16p_1^{\alpha_1-\beta_1},\tag{16}$$

式中$\alpha_1-\beta_1=0$或1。因此有以下2种情况。

(a) 当$\alpha_1-\beta_1=0$时,式(16)为$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}=16$,则$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=15$或17。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=15$,则$p_1=16$且$\alpha_1=\beta_1=1$,$p_1=16$与$p_i$为奇素数矛盾。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=17$,则$p_1=18$且$\alpha_1=\beta_1=1$,$p_1=18$与$p_i$为奇素数矛盾。此时方程(1)无解。

(b) 当$\alpha_1-\beta_1=1$时,由式(16)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}=16p_1。\tag{17}$$

若$\alpha_1\geqslant2$,对式(17)两边取模p_1有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)-1}$,这与$p_1$为奇素数矛盾,则$\alpha_1=1,\beta_1=0$。从而有

$$(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}=16p_1,$$

即$p_1=-\frac{2}{15}$。这与p_1为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(ii) $k=2$,即$n=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,则由式(15)得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2},\tag{18}$$

式中$\alpha_i-\beta_i=0$或$1(i=1,2)$。因此有以下4种情况。

(a) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(18)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16,\tag{19}$$

则$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=14$或18。

若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=14$。①若$\alpha_1=\alpha_2=2$,则有$p_1p_2\mid14$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。因此$1\leqslant\alpha_1\leqslant2,1\leqslant\alpha_2\leqslant2$。②若$\alpha_1=1,\alpha_2=2$,则有$p_2\mid14$,由$p_2$是奇素数得$p_2=7,p_1=\frac{4}{3}$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。③若$\alpha_1=2,\alpha_2=1$,则$p_1\mid14$,可得$p_1=7,p_2=\frac{4}{3}$,这与$p_1,p_2$均为奇素数矛盾。④若$\alpha_1=\alpha_2=1$,则有$(p_1-1)(p_2-1)=14$,得$(p_1,p_2)=(2,15)(3,8)$,与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=18$。①若$\alpha_1=\alpha_2=2$,则有$p_1p_2\mid18$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。因此$1\leqslant\alpha_1\leqslant2,1\leqslant\alpha_2\leqslant2$。②若$\alpha_1=1,\alpha_2=2$,则有$p_2\mid18$,由$p_2$是奇素数得$p_2=3,p_1=4$,这与$p_1<p_2$且$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。③若$\alpha_1=2,\alpha_2=1$,则$p_1\mid18$,可得$p_1=3,p_2=4$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。④若$\alpha_1=\alpha_2=1$,则有$(p_1-1)(p_2-1)=18$,得$(p_1,p_2)=(2,19)(3,10)(4,7)$,都与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(b) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,由式(18)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16p_1p_2。\tag{20}$$

若$\alpha_1\geqslant2$或$\alpha_2\geqslant2$,对式(20)两边取模p_1或p_2有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)-1}2$或$p_2\mid(-1)^{\Omega(n)-1}2$,这与$p_1$、$p_2$为奇素数矛盾。所以$\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_1=\beta_2=0$,即$n=2p_1p_2$且$d=1$。由式(20)得

$$(p_1-1)(p_2-1)=16p_1p_2\pm2,$$

由于$(p_1-1)(p_2-1)\leqslant p_1p_2$,所以$(p_1-1)(p_2-1)=16p_1p_2-2$,即$p_1=\frac{3-p_2}{15p_2+1}$,由于$3-p_2<15p_2+1$,此时方程(1)无解。

(c) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(18)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16p_1。\tag{21}$$

若$\alpha_1\geqslant2$,对式(21)两边取模p_1有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)-1}2$,这与$p_1$为奇素数矛盾。因此$\alpha_1=1,\beta_1=0$,式(21)为

$$p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16p_1。\tag{22}$$

若$\alpha_2=\beta_2=1$,则式(22)为

$$(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16p_1,$$

即$p_1p_2-17p_1-p_2=1$或-3。

若$p_1p_2-17p_1-p_2=1$,则$p_1=1+\frac{18}{p_2-17}$,得到$(p_1,p_2)=(4,23)\ (10,19)$,与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。

若$p_1p_2-17p_1-p_2=-3$,得到$(p_1,p_2)=(2,31)\ (8,19)$,与p_1,p_2均为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(d) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,证明过程同(c),得到方程(1)无解。

(II) 若$\beta=1$,则$d=2\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}$,对比式(12)两边2的个数得到$k=1$或2。

(i) $k=1$,即$n=2p_1^{\alpha_1}$,则由式(15)得

$$2\cdot p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16p_1^{\alpha_1-\beta_1},\quad(23)$$

其中$\alpha_1-\beta_1=0$或1。因此有以下2种情况。

(a) 当$\alpha_1-\beta_1=0$时,式(23)为

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}=8,$$

则$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=7$或9。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=7$,则$p_1=8$且$\alpha_1=\beta_1=1$,与$p_1$为奇素数矛盾。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=9$,则$p_1=10$且$\alpha_1=\beta_1=1$,与$p_1$为奇素数矛盾。此时方程(1)无解。

(b) 当$\alpha_1-\beta_1=1$时,由式(23)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}=8p_1。\quad(24)$$

若$\alpha_1\geqslant 2$,对式(24)两边取模p_1有$p_1\big|(-1)^{\Omega(n)-1}$,这与$p_1$为奇素数矛盾。则$\alpha_1=1,\beta_1=0$,从而有

$$(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}=8p_1,$$

即$p_1=-\frac{2}{7}$,这与p_1为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(ii) $k=2$,即$n=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,则由式(15)得

$$2p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2^2=16p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2},\quad(25)$$

式中$\alpha_i-\beta_i=0$或1$(i=1,2)$。因此有以下4种情况。

(a) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(25)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=8,\quad(26)$$

则$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=6$或10。

若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=6$,此时若$\alpha_1\geqslant 2$或$\alpha_2\geqslant 2$,则$p_1|6$或者$p_2|6$,这与$p_1$、$p_2$为奇素数矛盾。因此有$\alpha_1=\alpha_2=1$,即$(p_1-1)(p_2-1)=6$,得$(p_1,p_2)=(2,7)(3,4)$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。

若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=10$。①若$\alpha_1=\alpha_2=2$,则有$p_1p_2|10$,这与$p_1,p_2$均为奇素数矛盾。因此$1\leqslant\alpha_1\leqslant 2,1\leqslant\alpha_2\leqslant 2$。②若$\alpha_1=1,\alpha_2=2$,则有$p_2|10$,由$p_2$是奇素数得$p_2=5$,这与$R_{P_4}=\{3,7\}$,$\{3\}$矛盾。③若$\alpha_1=2,\alpha_2=1$同上。④若$\alpha_1=\alpha_2=1$,则有

$$(p_1-1)(p_2-1)=10,$$

得$(p_1,p_2)=(2,11)(3,6)$,这与p_1、p_2均为奇素数矛盾。此时方程(1)无解。

(b) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,由式(25)可得

$$2p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=16p_1p_2。\quad(27)$$

若$\alpha_1\geqslant 2$或$\alpha_2\geqslant 2$,对式(27)两边取模p_1或p_2有$p_1\big|(-1)^{\Omega(n)-1}4$或$p_2\big|(-1)^{\Omega(n)-1}4$,这与$p_1$、$p_2$为奇素数矛盾。所以$\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_1=\beta_2=0$,即$n=2p_1p_2$且$d=2$。由式(27)可得

$$(p_1-1)(p_2-1)=8p_1p_2\pm 2,$$

由于$(p_1-1)(p_2-1)\leqslant p_1p_2$,所以

$$(p_1-1)(p_2-1)=8p_1p_2-2,$$

即$p_1=\frac{3-p_2}{7p_2+1}$,由于$3-p_2<7p_2+1$,此时方程(1)无解。

(c) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(25)可得

$$2p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=16p_1。\quad(28)$$

若$\alpha_1\geqslant 2$,对式(28)两边取模p_1有$p_1\big|(-1)^{\Omega(n)-1}4$,这与$p_1$为奇素数矛盾。因此$\alpha_1=1,\beta_1=0$,式(28)为

$$p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=8p_1。\quad(29)$$

若$\alpha_2=\beta_2=1$,则式(29)为

$$(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=8p_1,$$

即$p_1p_2-9p_1-p_2=-3$或1。①若$p_1p_2-9p_1-p_2=1$,则

$$p_1=1+\frac{10}{p_2-9},$$

得到

$$(p_1,p_2)=(2,19)(3,14)(6,11)(11,10),$$

与p_1、p_2均为奇素数且$p_1<p_2$矛盾。②若$p_1p_2-9p_1-p_2=-3$,则$p_1=1+\frac{6}{p_2-9}$,得到$(p_1,p_2)=(4,11)$,与p_1、p_2均为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(d) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,证明过程同(c),得到方程(1)无解。

2.3 定理3及其证明

定理3 设正整数$n=2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>8$,其中$k\geqslant 1$,$\forall i=1,\cdots,k,\alpha_i\geqslant 1$,且$\alpha_i$为整数,$R_{p_k}=\{3,7\},\{3\}$,当$\alpha=2$时,方程(1)无解。

证明 当$\alpha=2$时,$n=2^2\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$,此时由引理3及方程(1)可得

$$\frac{1}{8}\phi(n)+\frac{1}{8}(-1)^{\Omega(n)-1}2^{\omega(n)}=\frac{n}{d}=\frac{2^2\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}}{d},\quad(30)$$

即

$$d\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^k d=32\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}。\quad(31)$$

因为d是n的正因子,$d\geqslant 2$且$\gcd(d,2)=1$,不妨设$d=2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}$,其中$\beta=0$或1,且$0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k)$。则由式(31)可得

$$2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}(-1)^{\Omega(n)-1}2^{k+\beta}=32\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i},\quad(32)$$

即

$$2^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2^{k+\beta}=32\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}。\quad(33)$$

对两边取模$p_i^{\alpha_i-1}$可得$\alpha_i-1\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i(1\leqslant i\leqslant k)$。

(I) 若$\beta=0$,则$d=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}$,对比式(32)两边2的个数得到$k=1$或2。

(i) $k=1$,即$n=2^2p_1^{\alpha_1}$,则由式(33)得

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=32p_1^{\alpha_1-\beta_1},\quad(34)$$

式中$\alpha_1-\beta_1=0$或1。因此有以下2种情况。

(a) 当$\alpha_1-\beta_1=0$时,式(34)为

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=32,$$

则$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=30$或34。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=30$,则$p_1=31$且$\alpha_1=\beta_1=1$,此时解$(n,d)=(124,31)$,经验证不满足式(30)。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=34$,则$p_1=35$且$\alpha_1=\beta_1=1$,这与$p_1$为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(b) 当$\alpha_1-\beta_1=1$时,由式(34)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=32p_1。\quad(35)$$

若$\alpha_1\geqslant 2$,对式(35)两边取模p_1有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)-1}2$,这与$p_1$为奇素数矛盾。则$\alpha_1=1,\beta_1=0$,从而有$(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=32p_1$,计算$p_1$的取值得出与$p_1$为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(ii) $k=2$,即$n=2^2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,则由式(33)得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2^2=32p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2},\quad(36)$$

式中$\alpha_i-\beta_i=0$或$1(i=1,2)$。因此有以下4种情况。

(a) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(36)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=32,\quad(37)$$

则$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=28$或36。

若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=28$。①若$\alpha_1=\alpha_2=2$,则有$p_1p_2\mid 28$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。因此$1\leqslant\alpha_1\leqslant 2,1\leqslant\alpha_2\leqslant 2$。②若$\alpha_1=1,\alpha_2=2$,则有$p_2\mid 28$,由$p_2$是奇素数得$p_1=\frac{5}{3},p_2=7$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。③若$\alpha_1=2,\alpha_2=1$同上。④若$\alpha_1=\alpha_2=1$,则有$(p_1-1)(p_2-1)=28$,得$(p_1,p_2)=(2,29)(3,15)(5,8)$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=36$,即

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\frac{p_1-1}{2}\frac{p_2-1}{2}=9。$$

①若$\alpha_1=\alpha_2=2$,则有$p_1p_2\mid 9$,与p_1、p_2均为奇素数矛盾。因此$\alpha_1,\alpha_2\leqslant 2$。②若$\alpha_1=1,\alpha_2=2$,则有$p_2\mid 9$,由$p_2$是奇素数得$p_2=3$,此时$p_1=7$,这与$p_1<p_2$矛盾。③若$\alpha_1=2,\alpha_2=1$,则$p_1\mid 9$,可得$p_1=3,p_2=7$,解$(n,d)=(588,147)$,经验证不满足式(30)。④若$\alpha_1=\alpha_2=1$,则有$(p_1-1)(p_2-1)=36$,得$(p_1,p_2)=(2,37)(3,19)(4,13)(5,10)(7,7)$,其中$(p_1,p_2)=(2,37)(4,13)(5,10)(7,7)$与$p_1$、$p_2$均为奇素数且$p_1<p_2$矛盾,解$(n,d)=(228,57)$经验证不满足式(30)。此时方程(1)无解。

(b) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,由式(36)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=32p_1p_2。\quad(38)$$

若$\alpha_1\geqslant 2$或$\alpha_2\geqslant 2$,对式(38)两边取模p_1或p_2有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)-1}4$或$p_2\mid(-1)^{\Omega(n)-1}4$,这与$p_1$、$p_2$为奇素数矛盾。所以$\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_1=\beta_2=0$,即$n=2^2p_1p_2$且

$d=1$。由式(36)可得

$$(p_1-1)(p_2-1)=32p_1p_2\pm 4,$$

由于$(p_1-1)(p_2-1)\leqslant p_1p_2$,所以$(p_1-1)(p_2-1)=32p_1p_2-4$,即$p_1=\dfrac{5-p_2}{31p_2+1}$,由于$5-p_2<31p_2+1$,此时方程(1)无解。

(c) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(36)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=32p_1。\tag{39}$$

若$\alpha_1\geqslant 2$,对式(39)两边取模p_1有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)-1}4$,这与$p_1$为奇素数矛盾。因此$\alpha_1=1,\beta_1=0$,式(39)为

$$p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=32p_1。\tag{40}$$

若$\alpha_2=\beta_2=1$,则式(40)为

$$(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=32p_1,$$

即$p_1p_2-33p_1-p_2=3$或-5。

若$p_1p_2-33p_1-p_2=3$,则$p_1=1+\dfrac{36}{p_2-33}$,由p_1、p_2为奇素数可知在这个式子中无合适的取值。

若$p_1p_2-33p_1-p_2=-5$,经计算$p_1=2,p_2=61$,这与p_1、p_2均为奇素数矛盾。此时方程(1)无解。

(d) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,证明过程同(c),得到方程(1)无解。

(II) 若$\beta=1$,则$d=2\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}$,对比式(32)两边2的个数得到$k=1$或2。

(i) $k=1$,即$n=2^2p_1^{\alpha_1}$,则由式(33)得

$$2p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2^2=32p_1^{\alpha_1-\beta_1},\tag{41}$$

式中$\alpha_1-\beta_1=0$或1。因此有以下2种情况。

(a) 当$\alpha_1-\beta_1=0$时,式(41)为

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16,$$

则$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=18$或14。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=18$,则$p_1=19$且$\alpha_1=\beta_1=1$,此时解$(n,d)=(76,38)$,经验证不满足式(30)。此时方程(1)无解。

若$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=14$,则$p_1=15$且$\alpha_1=\beta_1=1$,$p_1=15$与$p_1$为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(b) 当$\alpha_1-\beta_1=1$时,由式(41)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16p_1。\tag{42}$$

若$\alpha_1\geqslant 2$,对式(40)两边取模p_1有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)-1}2$,这与$p_1$为奇素数矛盾。则$\alpha_1=1,\beta_1=0$,从而有$(p_1-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2=16p_1$,计算$p_1$的取值得出与$p_1$为奇素数矛盾,此时方程(1)无解。

(ii) $k=2$,即$n=2^2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,则由式(33)得

$$2p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}2^3=32p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2},\tag{43}$$

式中$\alpha_i-\beta_i=0$或$1(i=1,2)$。因此有以下4种情况。

(a) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(43)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=16,\tag{44}$$

则$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=12$或20。

若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=12$,即

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\frac{p_1-1}{2}\frac{p_2-1}{2}=3。$$

①若$\alpha_1=\alpha_2=2$,则有$p_1p_2\mid 3$,与p_1、p_2均为奇素数矛盾。因此$1\leqslant\alpha_1\leqslant 2,1\leqslant\alpha_2\leqslant 2$。②若$\alpha_1=1,\alpha_2=2$,则有$p_2\mid 3$,由$p_2$是奇素数得$p_2=3$与$p_1p_2$且$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。③若$\alpha_1=2,\alpha_2=1$,则$p_1\mid 3$,可得$p_1=p_2=3$,这与$p_1p_2$矛盾。④若$\alpha_1=\alpha_2=1$,则有$(p_1-1)(p_2-1)=12$,得$(p_1,p_2)=(2,13)(3,7)(4,5)$,其中$(p_1,p_2)=(2,13)(4,5)$与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾,解$(n,d)=(84,42)$经验证不满足式(30)。此时方程(1)无解。

若$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=20$。①若$\alpha_1=\alpha_2=2$,则有$p_1p_2\mid 20$,这与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾。因此$1\leqslant\alpha_1\leqslant 2,1\leqslant\alpha_2\leqslant 2$。②若$\alpha_1=1,\alpha_2=2$,则有$p_2\mid 20$,由$p_2$是奇素数得$p_2=5$,这与$R_{P_k}=\{3,7\},\{3\}$矛盾。③若$\alpha_1=2,\alpha_2=1$,同上。④若$\alpha_1=\alpha_2=1$,则有$(p_1-1)(p_2-1)=20$,得$(p_1,p_2)=(2,21)(3,11)(5,6)$,其中$(p_1,p_2)=(2,21)(5,6)$与$p_1$、$p_2$均为奇素数矛盾,此时解$(n,d)=(132,66)$经验证不满足式(30)。此时方程(1)无解。

(b) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,由式(43)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=16p_1p_2。\tag{45}$$

若$\alpha_1\geqslant 2$或$\alpha_2\geqslant 2$,对式(45)两边取模p_1或p_2有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)-1}4$或$p_2\mid(-1)^{\Omega(n)-1}4$,这与$p_1$、$p_2$为奇素数矛盾。所以$\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_1=\beta_2=0$,即$n=2^2p_1p_2$且$d=2$。由式(45)可得

$$(p_1-1)(p_2-1)=16p_1p_2\pm 4,$$

由于$(p_1-1)(p_2-1)\leqslant p_1p_2$,所以$(p_1-1)(p_2-1)=$

$16p_1p_2-4$,即$p_1=\frac{5-p_2}{15p_2+1}$,由于$5-p_2<15p_2+1$,此时方程(1)无解。

(c) 当$\alpha_1-\beta_1=1$且$\alpha_2-\beta_2=0$时,由式(43)可得

$$p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=16p_1。\tag{46}$$

若$\alpha_1\geqslant 2$,对式(46)两边取模p_1有$p_1\mid(-1)^{\Omega(n)-1}4$,这与$p_1$为奇素数矛盾。因此$\alpha_1=1,\beta_1=0$,式(46)为

$$p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=16p_1。\tag{47}$$

若$\alpha_2=\beta_2=1$,则式(47)为

$$(p_1-1)(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)-1}4=16p_1,$$

即$p_1p_2-17p_1-p_2=3$或-5。

若$p_1p_2-17p_1-p_2=3$,则$p_1=1+\frac{20}{p_2-17}$,得$(p_1,p_2)=(2,37)(11,19)$,其中$(p_1,p_2)=(2,37)$与p_1、p_2均为奇素数矛盾,此时解$(n,d)=(836,418)$,经验证不满足式(30)。此时方程(1)无解。

(d) 当$\alpha_1-\beta_1=0$且$\alpha_2-\beta_2=1$时,证明过程同(c),得到方程(1)无解。

3　结束语

本文基于$\phi_8(n)$的计算公式,在$\phi_8(n)=\frac{1}{8}\phi(n)+\frac{1}{8}(-1)^{\Omega(n)-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}2^{\omega(n)-\frac{1}{2}(1-(-1)^{\alpha})}$的情况下,讨论了当$n=2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>8$以及$\alpha=0,1,2$时数论函数方程$\phi_8(n)=\frac{n}{d}$的可解性,并确定其全部正整数解。广义欧拉函数$\phi_{12}(n)$的公式在文献[11]中也已给出,对于包含广义欧拉函数$\phi_{12}(n)$的数论函数的可解性有待进一步研究。

参 考 文 献

[1] 柯召,孙琦.数论讲义[M].北京:高等教育出版社,2012.

[2] CAI T X. A congruence involving the quotients of Euler and its applications(I)[J]. Acta Aritmetica, 2002, 103(4):313-320.

[3] 朱杰,廖群英.方程$Z(n)=\phi_e(\mathrm{SL}(n))$的可解性[J].数学进展,2019,48(5):541-554.

[4] 李改利,高丽,戴妍百,等.一类包含Smarandache LCM函数与广义欧拉函数的方程[J].湖北大学学报(自然科学版),2023,45(2):181-187.

[5] 张四保.有关广义欧拉函数的两个方程的解[J].安徽大学学报(自然科学版),2019,43(4):32-35.

[6] 赵贤,刘敏捷.一类广义欧拉函数方程的可解性[J].数学的实践与认识,2022,52(7):256-259.

[7] 王容,罗文力,廖群英.方程$\phi_3(n)=\frac{n}{d}$的可解性[J].成都信息工程大学学报,2017,32(1):95-101.

[8] CAI T X, SHEN Z Y, HU M J. On the parity of the generalized Euler function [J]. Advances in Mathematics, 2013, 42(4):505-510.

[9] SHEN Z Y, CAI T X, HU M J. On the parity of the generalized Euler function (II) [J]. Advances in Mathematics, 2016, 45(4):509-519.

[10] 王容,廖群英.关于广义欧拉函数$\phi_5(n)$[J].四川师范大学学报(自然科学版),2018,41(4):445-449.

[11] YANG S C, LIAO Q Y, DU S, et al. The explicit formula and parity for some generalized Euler functions [J]. AIMS Mathematics, 2024, 9(5):12458-12478.

[12] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York:Springer-Verlag, 1976.

[13] 蔡天新.数论:从同余的观点出发[M].北京:高等教育出版社,2012.

(责任编辑:马田田)