DOI:10.19789/j.1004-9398.2025.02.005
文献引用:闫档档,杨海,马莹锐.关于Pell方程组$x^2-(a^2b^2\pm a)y^2=1$与$y^2-2p_1p_2p_3z^2=4b^2$的公解[J].首都师范大学学报(自然科学版),2025,46(2):31-37. YAN D D,YANG H,MA Y R. The common solutions of Pell equations $x^2-(a^2b^2\pm a)y^2=1$ and $y^2-2p_1p_2p_3z^2=4b^2$[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2025,46(2):31-37.

关于Pell方程组$x^2-(a^2b^2\pm a)y^2=1$与$y^2-2p_1p_2p_3z_2=4b^2$的公解*

闫档档,杨 海**,马莹锐
(西安工程大学理学院,陕西 西安 710048)

摘要:设p_1、p_2、p_3为不同的奇素数,$a\geqslant 2$,$b\geqslant 1$均为正整数,给出了Pell方程组$x^2-(a^2b^2\pm a)y^2=1$与$y^2-2p_1p_2p_3z^2=4b^2$的所有非负整数解(x,y,z),从而推广了文献[12]的结果。

关键词:Pell方程组;非负整数解;奇素数
中图分类号:O156 **文献标志码**:A

The common solutions of Pell equations $x^2-(a^2b^2\pm a)y^2=1$ and $y^2-2p_1p_2p_3z_2=4b^2$*

YAN Dangdang, YANG Hai**, MA Yingrui
(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an Shaanxi 710048)

Abstract: Let p_1,p_2,p_3 be three distinct odd primes and let $a\geqslant 2$, $b\geqslant 1$ be two integers. All nonnegative integer solutions (x,y,z) of Pell equation $x^2-(a^2b^2\pm a)y^2=1$ and $y^2-2p_1p_2p_3z^2=4b^2$ were given. Thus, the results of reference [12] were generalized.

Keywords: Pell equations; nonnegative integer solution; odd prime
CLC: O156 **DC**: A

0 引 言

设$\mathbf{Z},\mathbf{N},\mathbf{Z}^+$分别是全体整数、非负整数和正整数的集合。近年来,关于Pell方程组

$x^2-Dy^2=k$与$y^2-bz^2=l\ (D,b\in\mathbf{Z}^+,k,l\in\mathbf{Z})$

解的研究已有一些成果:

当$(k,l)=(1,1)$时,1922年Arwin[1]初步研究了方程组的可能性;1941年Ljunggren[2]证明了当$(D,b)=(2,3)$时,方程组仅有解$(x,y,z)=(3,2,1)$;2004年Yuan[3]证明了当$D=4m(m+1)$时,方程组至多有1组正整数解;2007年Cipu和Mignotte[4]证明了当$D=4m^2-1$,$b=p$(p为奇素数)时,方程组的解数不超过1;2017年Wang和Jiang[5]证明了当$D=4m^2+1$,$b=p$(p为奇素数)时,方程组仅有正整数解$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}(f^4-2f^2-1),f^2-1,g\right)$;2017年Keskin等[6]给出了$D=c^2-1\ (1<c\in Z)$,$b=p$($p$为奇素数)时方程组的全部正整数解$(x,y,z)$;

投稿日期:2023-01-06
*国家自然科学基金项目(11226038,11371012);陕西省自然科学基金项目(2021JM443);陕西基础科学研究院科研计划项目(23JSY042)
**通信作者:xpuyhai@163.com

2018年Cipu[7]在此基础上给出了$b=2p_1$或$2p_1p_2$(p_1、p_2为互异的奇素数)时方程组的全部正整数解(x,y,z);2020年和2021年管训贵[8-9]在此基础上又给出了$b=2p_1p_2p_3$和$2\prod_{i=1}^{n}p_i$时方程组的全部解(x,y,z);2019年Yang和Fu[10]又改进了$b=p$(p为奇素数)时方程组的解(x,y,z)。

当$(k,l)=(1,4)$时,2021年王志兰[11]证明了当$D=s(s+1)$, $b=2c(c\in\mathbf{Z}^+, c=q_1$ 或 $q_1、q_2)$, $p=2s+1, s\equiv 2(\mathrm{mod}4)$且$p、q_1、q_2$为互异的奇素数时,方程组除平凡解$(x,y,z)=(2s+1,2,0)$外,在$2p^2-1=cr^2$的条件下仅有解$(x,y,z)=(4p^3-3p,8p^2-2,4pr)$。

当$(k,l)=(1,4b^2)$时,2021年Rihane等[12]证明了当$D=a^2b^2\pm a, b=p$(p为奇素数)时,方程组仅有正整数解$(x,y,z)=(8a^2b^4\pm 8ab^2+1, 4b(2ab^2\pm 1), 2bfg)$。

当$(k,l)=(1,c^2)$时,2022年吕小龙等[13]证明了当$D=a^2b^2c^2\pm 2ab, b=p$(p为奇素数)时,方程组仅有正整数解$(x,y,z)=(2a^2b^2c^4\pm 4abc^2+1, 2c(abc^2\pm 1), cfg)$。

本文在Rihane等[12]的基础上,进一步讨论当$b=2p_1p_2p_3$(p_1、p_2、p_3为互异的奇素数)时方程组的全部非负整数解(x,y,z),从而得到一般性结果。

定理 设p_1、p_2、p_3是互异的奇素数,$a\geqslant 2, b\geqslant 1$ $(a,b\in\mathbf{Z}^+)$,并记

$$\frac{V_m}{2}+2bU_m\sqrt{a^2b^2\pm a}=\left(2ab^2\pm 1+2b\sqrt{a^2b^2\pm a}\right)^m, m\in\mathbf{Z}^+,$$

则Pell方程组

$x^2-(a^2b^2\pm a)y^2=1$与$y^2-2p_1p_2p_3z^2=4b^2$,(1)除平凡解$(x,y,z)=(2ab^2\pm 1, 2b, 0)$之外,还有以下结果:

(I)当$2(2ab^2\pm 1)^2-1=p_1p_2p_3l^2(l\in\mathbf{Z}^+)$时,方程组(1)仅有正整数解

$$(x,y,z)=\left(\frac{V_3}{2}, 2bU_3, 4b(2ab^2\pm 1)l\right);$$

(II)当$2(2ab^2\pm 1)^2-1\neq p_1p_2p_3l^2(l\in\mathbf{Z}^+)$,但

$$\left(4(2ab^2\pm 1)^2-3\right)\cdot\left(2(2ab^2\pm 1)^2-1\right)\cdot\left(4(2ab^2\pm 1)^2-1\right)=p_1p_2p_3h^2(h\in\mathbf{Z}^+)$$

时,方程组(1)仅有正整数解

$$(x,y,z)=\left(\frac{V_5}{2}, 2bU_5, 4b(2ab^2\pm 1)h\right);$$

(III)当$2(2ab^2\pm 1)^2-1\neq p_1p_2p_3l^2(l\in\mathbf{Z}^+)$且

$$\left(4(2ab^2\pm 1)^2-3\right)\cdot\left(2(2ab^2\pm 1)^2-1\right)\cdot\left(4(2ab^2\pm 1)^2-1\right)\neq p_1p_2p_3h^2(h\in\mathbf{Z}^+)$$

时,方程组(1)无解。

1 关键性引理

设$P、Q$为非零整数,多项式$x^2-Px-Q=0$的根为α,β,对任意的$n\in\mathbf{N}$,定义$U_n=U_n(P,Q)$, $V_n=V_n(P、Q)$,并满足下列关系式:

$$U_0=0, U_1=1, U_{n+1}=PU_n+QU_{n-1},$$
$$V_0=2, V_1=P, V_{n+1}=PV_n+QV_{n-1}, (n\in\mathbf{Z}^+)。$$

显然有$U_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, $V_n=\alpha^n+\beta^n$。

引理1[14] 设Pell方程$x^2-Dy^2=1$的基本解为$x_1+y_1\sqrt{D}$,那么全部解为

$$x_n=\frac{V_n(2x_1,-1)}{2}, y_n=y_1U_n(2x_1,-1), n\in\mathbf{Z}^+。$$

对于$U_n=U_n(P,-1)$, $V_n=V_n(P,-1)$,有引理2~6。

引理2[6] (i)若$d=\gcd(m,n)$,则$\gcd(U_m,U_n)=U_d$;(ii) $U_n^2-1=U_{n-1}U_{n+1}$;(iii) $U_{2n}=U_nV_n$;(iv) $V_{2n}=V_n^2-2$。

引理3[6] 若$P\geqslant 3$,则$P|U_k$当且仅当$2|k$, $P|V_k$当且仅当$2\nmid k$。

引理4[6] 设$m=2^ak, n=2^bk(a,b\in N, k,l\in\mathbf{Z}^+, 2\nmid k, 2\nmid l)$, $\gcd(m,n)=d$, $2|p$,则当$a>b$时,$\gcd(U_m,V_n)=V_d$;当$a\leqslant b$, $2\nmid m$时,$\gcd(U_m,V_n)=1$;当$a\leqslant b$, $2|m$时,$\gcd(U_m,V_n)=2$。

引理5[6] 设$P\equiv 0(\mathrm{mod}2)$,若$n\equiv 1(\mathrm{mod}2)$,则$\gcd\left(\frac{U_{2n}}{P},V_{2n}\right)=1$;若$n\equiv 0(\mathrm{mod}2)$,则$\gcd\left(\frac{U_{2n}}{P},V_{2n}\right)=2$。

引理6[6] 对任意的$m\in\mathbf{Z}^+$,用$\tau_2(m)$表示m的标准分解式中2的指数。若$2|P$,则当$2\nmid n$时,$\tau_2(U_n(P,-1))=0$, $\tau_2(V_n(P,-1))=\tau_2(P)$;当$2|n$时,$\tau_2(U_n(P,-1))=\tau_2(P)+\tau_2(n)-1$, $\tau_2(V_n(P,-1))=1$。

引理7[15] 设$P\geqslant 3$,若$U_n=x^2$,则$(P,n)=(338,4)$, $(3,6)$或$n\leqslant 2$。

引理8[16] 丢番图方程$2Y^2=X^4-4X^2+2(X,Y\in N)$,仅有解$(X,Y)=(2,1),(0,1)$。

引理9[17]　若$a\geqslant 2, b\geqslant 1$,则丢番图方程

$$\left(2ab^2\pm 1\right)^2x^4-4b^2\left(a^2b^2\pm a\right)y^2=1,$$

仅有解$(x,y)=(1,1)$。

引理10[18]　设$D>0$且是非平方数,则丢番图方程$x^4-Dy^2=1$,除了D=1 785, 4·1 785, 16·1 785分别有2组解$(x,y)=(13,4),(239,1\,352)$;$(x,y)=(13,2),(239,676)$;$(x,y)=(13,1),(239,338)$之外,该方程最多只有1组解$(x_1,y_1)$,且满足$x_1^2=u_1$或$2u_1^2-1$,其中$u_1+v_1\sqrt{D}$是Pell方程$U^2-DV^2=1$的基本解。

由于$4b^2\left(a^2b^2\pm a\right)$为非平方数,且$4b^2(a^2b^2\pm a)\neq$ 1 785, 4·1 785, 16·1 785, Pell方程$U^2-4b^2(a^2b^2\pm a)V^2=1$的基本解为$(u_1,v_1)=\left(2ab^2\pm 1,1\right)$,故由引理10可得如下引理。

引理11　设$a\geqslant 2, b\geqslant 1$,则丢番图方程

$$x^4-4b^2\left(a^2b^2\pm a\right)y^2=1,$$

仅有解$\left(x^2,y\right)=\left(2ab^2\pm 1,1\right)$。

引理12[19]　设$D>0$且是非平方数,则丢番图方程

$$x^2-Dy^4=1$$

至多有2组解(x,y),那么其恰好有2组解的充要条件是D=1 785或D=28 560或$2u_1$和v_1均为平方数,其中$u_1+v_1\sqrt{D}$是Pell方程$U^2-DV^2=1$的基本解。

引理13[12]　设$a\geqslant 2, b\geqslant 1$,则丢番图方程

$$x^2-16b^2\left(a^2b^2\pm a\right)\left(2ab^2\pm 1\right)^2y^4=1$$

仅有解$(x,y)=\left(8a^2b^4\pm 8ab^2+1,1\right)$。

引理14[20]　设$D>0$且是非平方数,若丢番图方程$x^2-Dy^4=1$仅有1解$(x,y^2)=(u_n,v_n)$,则当$n\equiv 0(\mathrm{mod}2)$时,必有$n=2$;当$n\equiv 1(\mathrm{mod}2)$时,必有$n=1$或p,其中$u_n+v_n\sqrt{D}$是Pell方程$U^2-DV^2=1$的解,p为素数且满足$p\equiv 3(\mathrm{mod}4)$。

2　定理的证明

易知Pell方程$x^2-\left(a^2b^2\pm a\right)y^2=1$的基本解为$\alpha=x_1+y_1\sqrt{D}=2ab^2\pm 1+2b\sqrt{a^2b^2\pm a}$,由引理1可知全部解为

$$x_m=\frac{V_m\left(2x_1,-1\right)}{2},\ y_m=y_1U_m\left(2x_1,-1\right),$$

式中:$x_1=2ab^2\pm 1$;$y_1=2b$;$m\in\mathbf{Z}^+$。且$\{U_m\},\{V_m\}$满足:

$$U_0=0,U_1=1,U_{n+1}=2x_1U_n-U_{n-1},$$
$$V_0=2,V_1=2x_1,V_{n+1}=2x_1V_n-V_{n-1},n\in\mathbf{Z}^+。$$

令$\left(\frac{V_m}{2},y_1U_m,z\right)$是式(1)的任一解,如果$m=1$,那么$\left(\frac{V_1}{2},y_1U_1,z\right)$是式(1)的平凡解,即$(x,y,z)=\left(2ab^2\pm 1,2b,0\right)$。

由于$m\in\mathbf{Z}^+$,故下面考虑$m>1$的情况。

由式(1)的第2式可知$y_m^2-4b^2=\left(y_1U_m\right)^2-4b^2=2p_1p_2p_3z^2$,根据此式易知$2|bz$,故

$$U_m^2-1=2p_1p_2p_3\left(\frac{z}{2b}\right)^2。\tag{2}$$

当$2|m$时,令$m=2k\left(k\in\mathbf{Z}^+\right)$,此时式(2)可化为$U_{2k}^2-1=2p_1p_2p_3\left(\frac{z}{2b}\right)^2$,由于$2U_{2k}$,故此式不成立,因此$2\nmid m$。

当$2\nmid m$时,令$m=2k+1\left(k\in\mathbf{Z}^+\right)$,此时式(2)可化为

$$U_{2k+1}^2-1=2p_1p_2p_3\left(\frac{z}{2b}\right)^2,\tag{3}$$

由引理2的(ii)可知,式(3)可化为

$$U_{2k}U_{2k+2}=2p_1p_2p_3\left(\frac{z}{2b}\right)^2,\tag{4}$$

由于$\gcd\left(2k,2k+2\right)=2$,那么由引理2的(i)可知$\gcd\left(U_{2k},U_{2k+2}\right)=U_2=2\left(2ab^2\pm 1\right)=2x_1$,于是式(4)的可能性有:

$$U_{2k}=2x_1s^2,U_{2k+2}=4x_1Q_0t^2;\tag{5}$$
$$U_{2k}=2x_1Q_0s^2,U_{2k+2}=4x_1t^2;\tag{6}$$
$$U_{2k}=4x_1s^2,U_{2k+2}=2x_1Q_0t^2;\tag{7}$$
$$U_{2k}=4x_1Q_0s^2,U_{2k+2}=2x_1t^2;\tag{8}$$
$$U_{2k}=2x_1p_is^2,U_{2k+2}=4x_1Q_it^2;\tag{9}$$
$$U_{2k}=2x_1Q_is^2,U_{2k+2}=4x_1p_it^2;\tag{10}$$
$$U_{2k}=4x_1p_is^2,U_{2k+2}=2x_1Q_it^2;\tag{11}$$
$$U_{2k}=4x_1Q_is^2,U_{2k+2}=2x_1p_it^2。\tag{12}$$

式中:$s,t\in\mathbf{Z}^+$且互素;$z=4bx_1st$;$Q_0=p_1p_2p_3$;Q_i为不包含p_i剩余项的乘积,$i=1,2,3$。

下面分2种情况讨论,即$2\nmid k$和$2|k$。

情形1　当$2\nmid k$时。

情形1.1　若式(5)成立,则由其第1式、引理2的(iii)和引理3可得$U_k\cdot\frac{V_k}{2x_1}=s^2$,再由引理4可知$\gcd\left(U_k,\frac{V_k}{2x_1}\right)=1$,因此$U_k=u^2\left(u\in\mathbf{Z}^+\right)$,由引理7可

知$k=1$,那么$m=2k+1=3$,于是式(2)可化为

$$4x_1^2\times 2\times\left(2x_1^2-1\right)=2p_1p_2p_3\left(\frac{z}{2b}\right)^2,$$

当$2\left(2ab^2\pm 1\right)^2-1=p_1p_2p_3l^2\quad\left(l\in\mathbf{Z}^+\right)$时,$z=4b\left(2ab^2\pm 1\right)l$,故(1)仅有正整数解$(x,y,z)=\left(\frac{V_3}{2},2bU_3,4b\left(2ab^2\pm 1\right)l\right)$;当$2\left(2ab^2\pm 1\right)^2-1\neq p_1p_2p_3l^2\left(l\in\mathbf{Z}^+\right)$时,(1)无解。

情形 1.2 若式(6)成立,则由其第2式、引理2的(iii)和引理3可得

$$\frac{U_{k+1}}{2x_1}\cdot V_{k+1}=2t^2。\tag{13}$$

当$k=4r+1\left(r\in\mathbf{N}\right)$时,由引理5可知$\gcd\left(\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1},V_{2(2r+1)}\right)=1$,那么式(13)可化为

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}=2u^2,V_{2(2r+1)}=v^2,\tag{14}$$

或

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}=u^2,V_{2(2r+1)}=2v^2,\tag{15}$$

式中:$\gcd(u,v)=1$;$t=uv,u,v\in\mathbf{Z}^+$。

由式(14)的第2式和引理2的(iv)可知

$$V_{2r+1}^2-2=v^2,$$

但此式不成立,因此式(14)不成立。

由式(15)的第1式可知$U_{2(2r+1)}=2x_1u^2$,再由情形1.1中式(5)的第1式的讨论可知$2r+1=1$,故$r=0$,而$k=4r+1=1$,因此$m=2k+1=3$,与情形1.1所得结果一样。

当$k=4r+3\left(r\in\mathbf{N}\right)$时,由引理5可知$\gcd\left(\frac{U_{4(r+1)}}{2x_1},V_{4(r+1)}\right)=2$,那么式(3)可化为

$$\frac{U_{4(r+1)}}{2x_1}=4u^2,V_{4(r+1)}=2v^2,\tag{16}$$

或

$$\frac{U_{4(r+1)}}{2x_1}=2u^2,V_{4(r+1)}=4v^2,\tag{17}$$

式中:$\gcd(u,v)=1$;$t=2uv,u,v\in\mathbf{Z}^+$。

由式(16)的第2式和引理2的(iv)可知

$$2v^2=V_{r+1}^2-4V_{r+1}^2+2,$$

再由引理8可知$V_{r+1}=2$或0,显然$r+1=0$,即$r=-1$,与$r\in\mathbf{N}$矛盾,因此式(16)不成立。

由式(17)的第2式和引理2的(iv)可知$(2v)^2=V_{2(r+1)}^2-2$,但此式不成立,因此式(17)不成立。

情形 1.3 若式(7)成立,则由其第1式和引理2的(iii)可知

$$U_kV_k=4x_1s^2,\tag{18}$$

当$2\nmid k$时,$2\nmid U_k$。令$\tau_2(x_1)=\omega$,则由引理6可知$\tau_2(U_k)=0$,$\tau_2(V_k)=\tau_2(2x_1)=\omega+1$,那么$\tau_2(U_kV_k)=\omega+1$,但$\tau_2\left(4x_1s^2\right)\geqslant\omega+2$,与$\omega+1$矛盾,因此式(18)不成立,从而式(7)不成立。

情形 1.4 若式(8)成立,则类似情形1.3讨论可知式(8)不成立。

情形 1.5 若式(9)成立,则由其第1式、引理2的(iii)和引理3可知$U_k\cdot\frac{V_k}{2x_1}=p_is^2(i=1,2,3)$,再由引理4可知$\gcd\left(U_k,\frac{V_k}{2x_1}\right)=1$,此时可能有

$$U_k=f^2\text{或}\frac{V_k}{2x_1}=g^2,f,g\in\mathbf{Z}^+。$$

当$U_k=f^2$时,由引理7可知$k=1$,从而$m=2k+1=3$,与情形1.1所得结果一样。

当$\frac{V_k}{2x_1}=g^2$时,此式可化为$\frac{V_k}{2}=x_1g^2$,由式(1)的第1式可得

$$\left(2ab^2\pm 1\right)^2g^4-4b^2\left(a^2b^2\pm a\right)U_k^2=1,$$

由引理9可知$U_k=1$,显然$k=1$,从而$m=2k+1=3$,与情形1.1所得结果一样。

情形 1.6 若式(10)成立,则由其第2式、引理2的(iii)和引理3可得

$$\frac{U_{k+1}}{2x_1}\cdot V_{k+1}=2p_it^2(i=1,2,3)。\tag{19}$$

当$k=4r+1\left(r\in\mathbf{N}\right)$时,由引理5可知$\gcd\left(\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1},V_{2(2r+1)}\right)=1$,则式(19)的可能性有

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}=u^2;\ \frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}=2u^2;$$

$$V_{2(2r+1)}=v^2;\ V_{2(2r+1)}=2v^2,u,v\in\mathbf{Z}^+。$$

若$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}=u^2$,则由情形1.1可知$2r+1=1$,即$r=0$,故$k=4r+1=1$,从而$m=2k+1=3$,与情形1.1所得结果一样。

若$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}=2u^2$,则由式(1)的第1式可知

$$\left(\frac{V_{2(2r+1)}}{2}\right)^2-4b^2\left(a^2b^2\pm a\right)\left(2ab^2\pm 1\right)^2(2u)^4=1,\tag{20}$$

由于Pell方程$x^2-4b^2\left(a^2b^2\pm a\right)\left(2ab^2\pm 1\right)^2y^2=1$的基

本解为 $(u_1, v_1)=(8a^2b^4\pm 8+1, 2)$,由引理 12 可知式(20)至多有 1 组解,再由引理 14 和 $2n$ 可知 $(2u)^2=v_2=4(8a^2b^4\pm 8ab^2+1)$,故 $u^2=8a^2b^4\pm 8ab^2+1$,从而 $U_{2(2r+1)}=4x_1u^2=4x_1(8a^2b^4\pm 8ab^2+1)=U_4$,此时 $2(2r+1)=4$,显然不成立。

若 $V_{2(2r+1)}=v^2$,则由情形 1.2 中式(14)的讨论可知此式不成立。

若 $V_{2(2r+1)}=2v^2$,则由式(1)的第 1 式可得 $v^4-4b^2(a^2b^2\pm a)U_{2(2r+1)}^2=1$,由引理 11 可知 $U_{2(2r+1)}=1$,即 $2(2r+1)=1$,显然不成立。

当 $k=4r+3(r\in\mathbf{N})$ 时,由引理 5 可知 $\gcd\left(\frac{U_{4(r+1)}}{2x_1}, V_{4(r+1)}\right)=2$,此时式(19)的可能性有:

$$\frac{U_{4(r+1)}}{2x_1}=2u^2;\frac{U_{4(r+1)}}{2x_1}=4u^2;$$

$$V_{4(r+1)}=2v^2;V_{4(r+1)}=4v^2,u,v\in\mathbf{Z}^+。$$

若 $\frac{U_{4(r+1)}}{2x_1}=2u^2$,则由式(1)的第 1 式可得

$$\left(\frac{V_{4(r+1)}}{2}\right)^2-4b^2(a^2b^2\pm a)(2ab^2\pm 1)^2(2u)^4=1, \tag{21}$$

由式(20)的讨论可知 $4(r+1)=4$,即 $r=0$,故 $k=4r+3=3$,从而 $m=2k+1=7$,于是式(2)可化为

$$8x_1^2(2x_1^2-1)(8x_1^4-8x_1^2+1)(16x_1^4-16x_1^2+3)=p_1p_2p_3\left(\frac{z}{2b}\right)^2, \tag{22}$$

但式(22)右边 2 的方幂为偶数,而左边 2 的方幂为奇数,显然不成立。

若 $\frac{U_{4(r+1)}}{2x_1}=4u^2$,则由式(1)的第 1 式可得

$$\left(\frac{V_{4(r+1)}}{2}\right)^2-16b^2(a^2b^2\pm a)(2ab^2\pm 1)^2(2u)^4=1, \tag{23}$$

由引理 13 可知 $2u=1$,而 $u\in\mathbf{Z}^+$,因此式(23)显然不成立。

若 $V_{4(r+1)}=2v^2$,则由情形 1.2 中式(16)的讨论可知 $r=-1$,与 $r\in\mathbf{N}$ 矛盾,故不成立。

若 $V_{4(r+1)}=4v^2$,则由情形 1.2 中式(17)的讨论可知此式也不成立。

情形 1.7　若式(11)成立,则类似情形 1.3 的讨论可知式(11)不成立。

情形 1.8　若式(12)成立,则类似情形 1.3 的讨论可知式(12)不成立。

情形 2　当 $2|k$ 时。

情形 2.1　若式(5)成立,则由其第 1 式、引理 2 的(iii)和引理 3 可知

$$\frac{U_k}{2x_1}\cdot V_k=s^2。 \tag{24}$$

当 $k=4r+2(r\in\mathbf{N})$ 时,则由引理 5 可知 $\gcd\left(\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}, V_{2(2r+1)}\right)=1$,那么式(24)中 $V_{2(2r+1)}=v^2(v\in\mathbf{Z}^+)$,再由引理 2 的(iv)可知

$$V_{2(2r+1)}=V_{2r+1}^2-2=v^2,$$

显然不成立。

当 $k=4r(r\in\mathbf{N})$ 时,则由引理 5 可知 $\gcd\left(\frac{U_{4r}}{2x_1}, V_{4r}\right)=2$,那么式(24)中 $V_{4r}=2v^2$,由引理 2 的(iv)可知 $2v^2=V_r^4-4V_r^2+2$,再由引理 8 可知 $V_r=2$ 或 0,显然 $r=0$,故 $k=4r=0$,从而

$$m=2k+1=1,$$

与 $m>1$ 矛盾,因此此式不成立。

情形 2.2　若式(6)成立,则由其第 2 式和引理 2 的(iii)可知

$$U_{k+1}V_{k+1}=4x_1t^2, \tag{25}$$

当 $2|k$ 时,$2\nmid U_{k+1}$,令 $\tau_2(x_1)=\omega$,则由引理 6 可知 $\tau_2(U_{k+1})=0$,$\tau_2(V_{k+1})=\tau_2(2x_1)=\omega+1$,那么 $\tau_2(U_{k+1}V_{k+1})=\omega+1$,但 $\tau_2(4x_1t^2)\geqslant\omega+2$,与 $\omega+1$ 矛盾,因此式(25)不成立,从而式(6)不成立。

情形 2.3　若式(7)成立,则由其第 1 式、引理 2 的(iii)和引理 3 可知

$$\frac{U_k}{2x_1}\cdot V_k=2s^2。 \tag{26}$$

当 $k=4r+2(r\in\mathbf{N})$ 时,由引理 5 可知 $\gcd\left(\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}\cdot V_{2(2r+1)}\right)=1$,那么式(26)的可能性有

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}=2u^2, V_{2(2r+1)}=v^2, \tag{27}$$

或

$$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}=u^2, V_{2(2r+1)}=2v^2, \tag{28}$$

式中:$\gcd(u,v)=1$;$s=uv,u,v\in\mathbf{Z}^+$。

由式(27)的第 2 式和引理 2 的(iv)可知 $V_{2(2r+1)}=V_{2r+1}^2-2=v^2$,显然不成立。

由式(28)的第 1 式可知 $U_{2(2r+1)}=2x_1u^2$,再由情形 1.1 的讨论可知 $2r+1=1$,即 $r=0$,故

$$k = 4r + 2 = 2,$$

从而$m = 2k + 1 = 5$,此时式(2)可化为

$$4x_1^2\left(4x_1^2 - 3\right)\left(2x_1^2 - 1\right)\left(4x_1^2 - 1\right) = p_1p_2p_3\left(\frac{z}{2b}\right)^2,$$

由于$x_1 = 2ab^2 \pm 1$,那么当$\left(4\left(2ab^2 \pm 1\right)^2 - 3\right)\cdot\left(2\left(2ab^2 \pm 1\right)^2 - 1\right)\left(4\left(2ab^2 \pm 1\right)^2 - 1\right) = p_1p_2p_3h^2\left(h \in \mathbf{Z}^+\right)$时,$z = 4b\left(2ab^2 \pm 1\right)h$,因此式(1)仅有正整数解$(x, y, z) = \left(\frac{V_5}{2}, 2bU_5, 4b\left(2ab^2 \pm 1\right)h\right)$;当$\left(4\left(2ab^2 \pm 1\right)^2 - 3\right)\left(2\left(2ab^2 \pm 1\right)^2 - 1\right)\left(4\left(2ab^2 \pm 1\right)^2 - 1\right) \neq p_1p_2p_3h^2\left(h \in \mathbf{Z}^+\right)$时,式(1)无解。

当$k = 4r\left(r \in \mathbf{N}\right)$时,根据引理5可知$\gcd\left(\frac{U_{4r}}{2x_1}, V_{4r}\right) = 2$,那么式(26)的可能性有

$$\frac{U_{4r}}{2x_1} = 2u^2,\ V_{4r} = 4v^2 \text{或} \frac{U_{4r}}{2x_1} = 4u^2,\ V_{4r} = 2v^2,$$

式中:$\gcd(u, v) = 1$;$s = 2uv, u, v \in \mathbf{Z}^+$。

上述第1式的讨论类似式(27)的讨论,故不成立。而上述第2式的讨论类似式(16)的讨论,故可推得$r = 0$,从而$k = 0$,因此$m = 1$,与$m > 1$矛盾,故不成立。

情形 2.4 若式(8)成立,则由其第2式和引理2的(iii)可知$U_{k+1}V_{k+1} = 2x_1t^2$,因为$2|k$,故$2\nmid(k+1)$,那么由引理2.3可知

$$U_{k+1}\cdot\frac{V_{k+1}}{2x_1} = t^2, \tag{29}$$

由引理4可知$\gcd\left(U_{k+1}, \frac{V_{k+1}}{2x_1}\right) = 1$,那么式(29)中$U_{k+1} = g^2\left(g \in \mathbf{Z}^+\right)$,再由引理7可知$k + 1 \leqslant 2$,即$k \leqslant 1$,显然只有$k = 0$时满足,故$m = 2k + 1 = 1$,与$m > 1$矛盾,因此式(29)不成立。从而式(8)不成立。

情形 2.5 若式(9)成立,则由式(9)的第2式和引理2的(iii)可知

$$U_{k+1}V_{k+1} = 4x_1Q_it^2,\ i = 1, 2, 3, \tag{30}$$

由于式(30)与式(25)的讨论类似,因此式(30)不成立,从而式(9)不成立。

情形 2.6 若式(10)成立,与情形2.5的讨论类似,因此式(10)不成立。

情形 2.7 若式(10)成立,则由式(11)的第1式、引理2的(iii)和引理3可知

$$\frac{U_k}{2x_1}\cdot V_k = 2p_is^2,\ i = 1, 2, 3。 \tag{31}$$

当$k = 4r + 2\left(r \in \mathbf{N}\right)$时,由引理5可知$\gcd\left(\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1}, V_{2(2r+1)}\right) = 1$,那么式(31)的可能性有:

$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1} = u^2$或$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1} = 2u^2$或$V_{2(2r+1)} = v^2$或$V_{2(2r+1)} = 2v^2, u, v \in \mathbf{Z}^+$。

若$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1} = u^2$,则由情形1.2中式(15)的讨论可知$2r + 1 = 1$,即$r = 0$,故$k = 4r + 2 = 2$,从而$m = 2k + 1 = 5$,与情形2.3中式(28)讨论所得的结果一样。

若$\frac{U_{2(2r+1)}}{2x_1} = 2u^2$,则由情形1.6中式(20)的讨论可知,此式不成立。

若$V_{2(2r+1)} = v^2$,则由情形1.2中式(14)的讨论可知,此式不成立。

若$V_{2(2r+1)} = 2v^2$,则由情形1.6的讨论可知,此式不成立。

当$k = 4r\left(r \in \mathbf{N}\right)$时,由引理5可知$\gcd\left(\frac{U_{4r}}{2x_1}, V_{4r}\right) = 2$,那么式(31)的可能性有

$$\frac{U_{4r}}{2x_1} = 2u^2;\ \frac{U_{4r}}{2x_1} = 4u^2;$$

$$V_{4r} = 2v^2;V_{4r} = 4v^2, u, v \in \mathbf{Z}^+。$$

若$\frac{U_{4r}}{2x_1} = 2u^2$,则由式(1)的第1式可得

$$\left(\frac{V_{4r}}{2}\right)^2 - 4b^2\left(a^2b^2 \pm a\right)\left(2ab^2 \pm 1\right)^2\left(2u\right)^4 = 1, \tag{32}$$

由情形1.6中式(20)的讨论可知在式(32)中$4r = 4$,即$r = 1$,故$k = 4r = 4$,从而$m = 2k + 1 = 9$,式(2)可化为

$$8x_1^2\left(2x_1^2 - 1\right)\left(16x_1^4 - 12x_1^2 + 1\right)\left(8x_1^4 - 8x_1^2 + 1\right)\cdot\left(16x_1^4 - 20x_1^2 + 5\right) = p_1p_2p_3\left(\frac{z}{2b}\right)^2, \tag{33}$$

式中$x_1 = 2ab^2 + 1$,但式(33)右边2的方幂为偶数,而左边2的方幂为奇数,显然不成立。

若$\frac{U_{4r}}{2x_1} = 4u^2$,则由式(1)的第1式可得

$$\left(\frac{V_{4r}}{2}\right)^2 - 16b^2\left(a^2b^2 \pm a\right)\left(2ab^2 \pm 1\right)^2\left(2u\right)^4 = 1,$$

由引理13可知$2u = 1$,而$u \in \mathbf{Z}^+$,显然不成立。

若$V_{4r} = 2v^2$,则由情形2.1中的讨论可知$r = 0$,故$k = 4r = 0$,从而$m = 2k + 1 = 1$,与$m > 1$矛盾,因此不成立。

若$V_{4r} = 4v^2$,则由引理2的(iv)可知

$$V_{4r}=V_{2r}^2-2=(2v)^2,$$

显然不成立。

情形 2.8　若式(12)成立,已知 $2|k$,故 $2\nmid(k+1)$,则由式(12)的第2式和引理2的(iii)可知

$$U_{k+1}\cdot\frac{V_{k+1}}{2x_1}=p_it^2,\ i=1,2,3, \tag{34}$$

由引理4可知 $\gcd\left(U_{k+1},\ \frac{V_{k+1}}{2x_1}\right)=1$,那么式(34)的可能性有

$$U_{k+1}=f^2\text{或}\frac{V_{k+1}}{2x_1}=g^2,f,g\in\mathbf{Z}^+。$$

当 $U_{k+1}=f^2$ 时,由引理7可知 $k+1\leqslant 2$,即 $k\leqslant 1$,显然只有 $k=0$ 时满足,故 $m=2k+1=1$,与 $m>1$ 矛盾,因此不成立。

当 $\frac{V_{k+1}}{2x_1}=g^2$ 时,由式(1)的第1式可知

$$(2ab^2\pm 1)^2g^4-4b(a^2b^2\pm a)U_{k+1}^2=1,$$

由引理2.9可知 $U_{k+1}=1$,故 $k=0$,从而 $m=2k+1=1$,与 $m>1$ 矛盾,因此不成立。综上所述,定理得证。

3　结束语

对于Pell方程组的可解性研究一直是丢番图方程的热点问题,本研究通过对Pell方程组 $x^2-(a^2b^2\pm a)y^2=1$,$y^2-2p_1p_2p_3z^2=4b^2$ 的公解进行研究,给出了该Pell方程组的所有非负整数解 (x,y,z),研究结果推广了文献[12]的一般性结论,可为研究此类Pell方程组的公解问题提供借鉴。

参 考 文 献

[1] ARWIN A. Common solutions of two simultaneous Pell equations[J]. Annals of Mathematics, 1922, 23(4): 307-312.

[2] LJUNGGREN W. Litt om simultane Pellske ligninger [J]. Norsk Matematisk Tidsskrift, 1941, 23: 132-138.

[3] YUAN P Z. On the number of solutions of $x^2-4m(m+1)y^2=y^2-bz^2=1$ [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2004, 132(6): 1561-1566.

[4] CIPU M, MIGNOTTE M. On the number of solutions to systems of Pell equations [J]. Journal of Number Theory, 2007, 125(2): 356-392.

[5] WANG T T, JIANG Y Z. On the simultaneous Pell equations $x^2-(4m^2-1)y^2=y^2-pz^2=1$[J]. Quaestiones Mathematicae, 2017, 40(5): 1-7.

[6] KESKIN R, KARAATL O, ŞIAR Z, et al. On the determination of solutions of simultaneous Pell equations $x^2-(a^2-1)y^2=y^2-pz^2=1$ [J]. Periodica Mathematica Hungarica, 2017, 75(2): 336-344.

[7] CIPU M. Explicit formula for the solution of simultaneous Pell equations $x^2-(a^2-1)y^2=1$, $y^2-bz^2=1$[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2018, 146(3): 983-992.

[8] 管训贵. Pell方程组 $x^2-(c^2-1)y^2=y^2-2p_1p_2p_3z^2=1$ 的公解[J].数学学报(中文版),2020,63(2):157-170.

[9] 管训贵. Pell方程组 $x^2-(c^2-1)y^2=y^2-2\prod_{i=1}^{n}p_iz^2=1$ 的公解[J].数学的实践与认识,2021,51(24):311-319.

[10] YANG H, FU R Q. Complete solutions of the simultaneous Pell's equations $x^2-(a^2-1)y^2=1$ and $y^2-pz^2=1$[J]. International Journal of Number Theory, 2019, 15(5): 1069-1074.

[11] 王志兰.一类Pell方程组的非负整数解[J].南宁师范大学学报(自然科学版),2021,38(2):66-70.

[12] RIHANE S E, TCHAMMOU E B, TOGBÉ A. On the system of Pell equations $x^2-(a^2b^2\pm a)y^2=1$ and $y^2-pz^2=4b^2$ [J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2021, 52(1): 224-230.

[13] 吕小龙,杨海,闫档档.关于Pell方程 $x^2-(a^2b^2c^2\pm 2ab)y^2=1$ 与 $y^2-pz^2=c^2$ 的公解[J].南宁师范大学学报(自然科学版),2022,39(3):6-10.

[14] LUO J G, YUAN P Z. On the solutions of a system of two Diophantine equations [J]. Science China Mathematics, 2014, 57(7): 1401-1418.

[15] MIGNOTTE M, PETHÖ A. Sur les carrés dans certaines suites de Lucas[J]. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1993, 5(2): 333-341.

[16] BOSMA W, CANNON J, PLAYOUST C. The magma algebra system I: the user language [J]. Journal of Symbolic Computation, 1997, 24(3/4): 235-265.

[17] CAO Z. Complete solution of the diophantine equation $A^2x^4-By^2=1$ and some related problems [J]. Harbin Institute of Technology (New Series), 2001, 8(2): 108-110.

[18] 孙琦,袁平之.关于不定方程 $x^4-Dy^2=1$ 的一个注记[J].四川大学学报(自然科学版),1997,34(3):265-267.

[19] WALSH G. A note on a theorem of Ljunggren and the Diophantine equations $x^2-kxy^2+y^4=1$ or 4[J]. Archiv Mathematik, 1999, 73(2): 119-125.

[20] TOGBE A, VOUTIER P M, WALSH P G. Solving a family of Thue equations with an application to the equation $x^2-Dy^4=1$ [J]. Acta Arithmetica, 2005, 120(1): 39.

(责任编辑:马田田)