DOI:10.19789/j.1004-9398.2024.01.010
文献引用:申文,孙善忠,李勇,等. Resurgence理论及其应用[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,45(1):77-115. SHEN W,SUN S Z,LI Y,et al. Resurgence theory and its applications[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2024,45(1):77-115.

Resurgence理论及其应用*

申　文[1#]，孙善忠[1,2#**]，李　勇[1#]，李　镛[3#]，邸　玥[1#]

(1. 首都师范大学数学科学学院，北京　100048；2. 首都师范大学交叉科学研究院，北京　100048；3. 清华大学丘成桐数学科学中心，北京　100084)

摘要:本文综述了法国数学家Jean Écalle发展的复现理论及其在数学和物理中的若干重要应用。系统介绍简单复现函数的基本理论及其模运算,并提及更一般奇性的处理。给出该理论基本构造的同时,以欧拉级数、斯特林级数、艾里函数以及量子双对数函数作为基本例子来阐释这一理论的精妙之处。并提及其在量子力学(精密WKB理论、半经典迹公式)、规范场理论(特别是复陈-赛蒙斯理论)以及拓扑弦理论中的若干应用。

关键词:发散级数;求和理论;复现理论;异形导数;模运算;斯托克斯现象
中图分类号:O173.1;O175;O413.1;O413.4　　**文献标识码**:A

Resurgence theory and its applications*

SHEN Wen[1#]，SUN Shanzhong[1,2#**]，LI Yong[1#]，LI Yong[3#]，DI Yue[1#]

(1. School of Mathematical Sciences，Capital Normal University，Beijing　100048；2. Academy for Multidisciplinary Studies，Capital Normal University，Beijing　100048；3. Yau Mathematical Sciences Center，Tsinghua University，Beijing　100084)

Abstract: This paper gives an introduction to the resurgence theory developed by French mathematician Jean Écalle and its important applications in mathematics and physics. The theory of simple resurgent functions and mould calculus are systematically presented with briefly mentioning general singularities. Euler series, Stirling series, Airy function and quantum dilogarithm are taken as examples to explain the subtlety of the theory. Applications in quantum mechanics (exact WKB theory, semi-classical trace formula), gauge theory (especially complex Chern-Simons theory) and topological string theory are also mentioned.

Keywords: divergence series; summability theory; resurgence theory; alien derivative; mould calculus; stokes phenomenon
CLC: O173.1; O175; O413.1; O413.4　　**DC**: A

0　引　言

复现理论(resurgence theory)是法国数学家Jean Écalle在解决动力系统中极限环有限性的希尔伯特第十六问题时发展起来的系统处理发散级数的理论。正如发散级数的渐近理论源自庞加莱理

收稿日期:2023-12-29
* 教育部重点研发计划项目(2020YFA0713300);国家自然科学基金项目(11771303,12171327,11911530092,12261131498,11871045)
# 所有作者按照姓氏笔画排序,贡献均等
** 通信作者:sunsz@cnu.edu.cn

解N-体问题的林德斯泰特级数一样[1],复现理论在哈密顿系统的研究中举足轻重,也为研究复数域上带非正则奇点的常微分方程提供了全新的工具。由于物理中各种量子理论都不可避免地会出现发散级数,复现理论和量子力学中的精密WKB(Wenzel-Kramers-Brillouin)理论几乎同时形成就是很好的例证。本文系统介绍这一理论及近年来在数学物理中的广泛应用。

发散级数在数学中的使用由来已久,如莱布尼兹、欧拉、柯西、斯托克斯、斯蒂尔杰斯、庞加莱、波雷尔、哈代等数学家都曾深入研究和大量使用发散级数。随着分析学的严格化,在柯西和阿贝尔之后,发散级数的地位越来越边缘化,在很多标准的分析学教科书中甚至被完全忽略。发散级数的被关注程度虽远不及收敛级数,但在应用数学和数学物理中发散级数的使用却从未停止过。受复现理论的影响,近年来其在理论物理特别是量子力学、规范理论和弦理论等量子场理论中的作用和研究日益增长。在数学和物理中发散级数至少和收敛级数同等重要。在某种意义上,或许比收敛级数更重要。关于发散级数的历史见文献[2-4]。

为赋予发散级数有限的含义,在数学历史上曾发展了若干求和理论,如泊松-阿贝尔求和、切萨罗求和等。本文不讨论求和理论的细节,有兴趣的读者请参考文献[5-6]。研究发散级数的很多基本想法源于欧拉,渐近展开的思想可追溯到欧拉、斯托克斯和柯西,直到Poincaré[1]才系统发展渐近展开的理论并将其应用到微分方程以及天体力学中的摄动展开。

本文首先给出若干发散级数的基本例子,陈述在复现理论出现前的一些经典结论。

例 0.1 (欧拉级数和欧拉方程)欧拉级数是指发散幂级数

$$\tilde{\phi}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!\, z^{n+1},$$

欧拉引进该级数是为了求发散的沃利斯数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!=1-1+2-6+24-\cdots$的和。

欧拉级数也是欧拉方程$z^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+y=z$的形式解。这是一个原点为非正则奇点的一阶线性非齐次变系数常微分方程。

例 0.2 (斯特林级数)当复变量z满足$\mathrm{Re}z>0$时,定义伽马函数为$\Gamma(z)\coloneqq\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$。通过比涅第一、第二公式与伯努利展开的技术,有[7]

$$\ln\Gamma(z)\sim\frac{1}{2}\ln(2\pi)+(z-\frac{1}{2})\ln(z)-z+\sum_{k=1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}z^{-2k+1}=\frac{1}{2}\ln(2\pi)+(z-\frac{1}{2})\ln(z)-z+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1\,260z^5}-\cdots,\ \mathrm{Re}z>0,z\to\infty。$$

斯特林级数$\bar{\mu}(z)\coloneqq\sum_{k=1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}z^{-2k+1}$作为其中关于$z^{-1}$的幂级数展开项出现,这也是一个伯努利多项式,$B_k$为伯努利数。两边同时复合指数函数,得到斯特林公式的另一种形式:

$$\Gamma(z)\sim\mathrm{e}^{-z}z^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51\,840z^3}-\frac{571}{2\,488\,320z^4}+\cdots\right),\ \mathrm{Re}z>0,z\to\infty,$$

刻画了自变量无穷大时伽马函数的渐近展开。

例 0.3 (艾里函数和艾里方程)艾里函数$\mathrm{Ai}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{1}{3}t^3+zt\right)\mathrm{d}t$满足微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}-zy=0$。该方程具有级数解

$$\mathrm{Ai}(z)=3^{-\frac{2}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{9^n n!\,\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)}-3^{-\frac{4}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{9^n n!\,\Gamma\left(n+\frac{4}{3}\right)}。$$

例 0.4 (法捷耶夫的量子双对数函数)对于经典的双对数函数$\mathrm{Li}_2(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2}$,满足五边形关系

$$L(x)+L(y)-L(xy)=L\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right)+L\left(\frac{y-xy}{1-xy}\right),$$

$$L(x)\coloneqq\mathrm{Li}_2(x)+\frac{\log(1-x)\log(x)}{2}。$$

这个函数的量子化版本不仅要保证半经典逼近,还要巧妙地保证五边形公式。目前有不同的对经典双对数函数进行量子化的方法,在此仅介绍著名的法捷耶夫量子双对数函数。其他的量子双对数函数可参考文献[8]。法捷耶夫所定义的量子双对数函数为

$$\Phi(z;\tau)=\exp\left(\frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}_+}\frac{\mathrm{e}^{2xz}}{\sinh x\sinh\tau x}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right),$$

其中 $\mathrm{Re}\tau>0, 2|\mathrm{Re}\tau|<1+\mathrm{Re}\tau$。$\Phi_\hbar(z):=\Phi\left(\frac{z}{2\pi\mathrm{i}};\frac{\hbar}{\pi\mathrm{i}}\right)$ 的渐近展开[8]形式为

$$\Phi_\hbar(z)\sim\exp\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^{n-1}B_n\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{Li}_{2-n}(-\mathrm{e}^z)\hbar^{n-1}}{n!}\right),$$

当 $\hbar$ 趋于 0^+。

注意到右端渐近展开式首项系数中恰好出现经典的双对数函数,可证明上式右端指数的幂次项是一个关于 $\hbar$ 的复现级数[9],整个右端也是一个复现级数(见定理2.33)。另外,如果 $[\hat{q},\hat{p}]=2\hbar$, $\Phi_\hbar(z)$ 还满足量子五边形关系

$$\Phi_\hbar(\hat{p})\Phi_\hbar(\hat{q})=\Phi_\hbar(\hat{q})\Phi_\hbar(\hat{p}+\hat{q})\Phi_\hbar(\hat{p}),$$

如何通过复现理论解释并研究上述量子五边形关系仍是非常有意思的问题。

复现理论是法国数学家Jean Écalle在20世纪80年代创建并发展起来的[10-11]。Écalle的动机是研究希尔伯特第十六问题即Dulac问题:平面多项式向量场孤立极限环的有限性。通过回归映射将该问题转化为回归映射不动点的有限性问题,进而构造其超越级数使问题迎刃而解。在Écalle之前,法国数学家波雷尔已经发展了波雷尔-拉普拉斯求和理论,Écalle系统利用解析延拓这一有利工具。在此过程中,发展了形式幂级数的奇性理论,并引入了众多刻画奇性的概念和构造,从而丰富的代数结构被揭示出来。Écalle还创造性地引入了无尽可延拓的概念,这使得在波雷尔平面上的奇性具有了某种滤子结构。对每个奇点,Écalle构造了异形导数,其在发散级数中的地位正如导数之于函数,这是具有基础重要性的构造。不仅发现了和异形导数相关的结合代数、李代数和余代数结构,还得到了联系通常导数和异形导数的联结方程。在这些结构下,简单复现函数构成一子代数,在数学物理中起着举足轻重的作用。在Écalle的理论中,模概念的引入是为了刻画复现理论中不同斯托克斯区域上函数的自同构,分界线就是熟知的斯托克斯射线,模很好地刻画了斯托克斯射线上奇点间的组合结构。值得注意的是模运算正在越来越多的领域显示其威力。

复现理论的中文文献相对匮乏,本文尽可能详尽地介绍了这些结构,并给出主要结论及其直观以及证明的基本想法,以利于读者欣赏并使用这一美妙的理论框架。

发散级数多来源于带奇性,特别是非正则奇点的微分方程、差分方程、q-差分方程或者函数方程以及振荡积分。这注定了复现理论在数学和物理中广泛而深刻的应用,也部分解释了近廿年来物理学家对复现理论持续的兴趣。事实上该理论产生伊始,就和量子力学同气连枝。在Écalle系统发展复现理论一般框架的同时,Voros[12]探讨了半经典逼近中的WKB方法,发展了精密WKB理论并详细讨论了势函数为4次单项式的情形。猜测所谓的Voros符号是复现的,旋即Écalle[10-11]声称猜测为真并宣称一般势函数时结论仍然成立。Écalle称之为量子复现理论。在后文中会详细述及此理论。

复现理论的原始文献是Écalle三卷本的法文专著[11],可以在其主页[13]上找到。第1卷的主题为复现函数的代数结构。复现函数本质上是仅具有孤立奇点的解析函数,复现代数(resurgence algebra)指在某种合适的卷积运算下封闭的复现函数空间。复现理论的新奇之处在于异形导数和异形运算,基于此奇点之间的"复现"模式被发现。和异形导数对偶的概念是伪变量。模和余模这一对互为对偶的概念与异形导数和伪变量这一对互为对偶的概念之间的关系恰如矩阵之于线性映射。第2卷为复现函数在迭代理论中的应用,这也是Écall发展复现理论的主要动机。第3卷讨论该理论在微分方程、函数方程和李理论等领域中的应用。

Écalle的复现理论鸿篇巨制,其著作中诸多细节尚付诸阙如。为使理论完备Pham和Sauzin进行了大量工作[14-16]。正是由于复现理论中分析和代数的高度融合、内部结构的和谐,在数学其他分支中的应用和在物理中的应用以及大量新问题的产生,其发展生机蓬勃。

近年来复现理论在理论物理和数学物理中近乎显学,复现理论的文献卷帙浩繁。囿于学识和文章长度所限,参考文献中仅提及笔者熟悉的部分论文。复现理论的综述性或者介绍性文章可参见文献[14-26]等。

Écalle在其理论中引入了若干基本的概念和术语,在中文文献中还没有统一的翻译,本文提出如

下建议和注记:

(1)resurgence译为复现,相应地resurgence theory译为复现理论。此翻译能反应该理论的本质,也就是说从某一点(通常取为原点)处的发散级数出发,通过波雷尔变换和alien calculus以及拉普拉斯积分可以得到其他奇点处的信息,从其他奇点出发同样可以得到原点处的信息,这反映了发散级数的自我复制性质。

(2)alien derivative译为异形导数,相应地alien calculus译为异形运算。Écalle引入异形导数是为了区别于通常的导数。

(3)mould在日常用语中意指模具,在Écalle的理论中指某些抽象结构的发生器。将mould译为模,读作mú,相应地mould calculus译为模运算。

(4)transseries建议译为超越级数,原因是transcendental通常译为超越,如transcendental numbers译为超越数,另外hyper前缀的术语通常译为超,例如hypergeometric series译为超几何级数。鉴于此,为避免混淆,本文建议将transseries译为超越级数。

(5)bridge equation直译为桥梁方程,虽然能表达在该理论中的含义,但是容易产生歧义而误认为是描述桥梁振动的方程。因此建议意译为联结方程,因为在Écalle的理论中,其联系了通常的导数和异形导数。

(6)受音乐术语的启发,关于奇性的major和minor建议分别译为大调和小调。

(7)endlessly continuable建议译为无尽可延拓。这是基于如下的考虑,一则虽然endlessly有无穷无尽之意,若译为无穷可延拓则和很多场景下的无穷有重复和歧义之嫌;另者笔者认为无尽更能体现Écalle每次考察奇性的时候总是考虑有限长线段这种层次性。

本文内容安排如下:第1节以简单复现函数为例详细介绍了复现理论的核心概念和结构;第2节介绍了模运算这一强有力的代数和组合工具;第3节介绍了复现理论在复数域上的常微分方程及动力系统中的应用;第4节分别讨论了复现理论在量子力学、规范场论和弦理论中的若干典型应用;最后,对若干可能的进展作一展望。

首先给出本文常用的一些数学记号。

$\mathbb{C}[[z^{-1}]]$, val分别指形式幂级数集及其上面的赋值映射,见定义1.1;T_c是平移算子,见定义1.3;$\mathcal{B}$为形式波雷尔变换,见定义1.5;$\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$为1-Gevery形式幂级数集,见定义1.6;$\mathcal{L}^0$、$\mathcal{L}^\theta$、$\mathcal{L}^I$分别为沿0、θ、I方向的拉普拉斯算子,见式(7)与定义1.11;Π_{c_0}、$\Pi^\theta_{\gamma(\theta)}$、$\Pi^I_{\gamma(I)}$分别代表上述拉普拉斯算子对应的解析半平面,见式(8)与定义1.11;$\mathcal{D}(I,\gamma)$被定义为$\bigcup_{\theta\in I}\Pi^\theta_{\gamma(\theta)}$,当$|I|<\pi$时,对应$\mathcal{L}^I$的解析半平面集;$\mathcal{N}(I,\gamma)$指可被解析延拓至扇形$\{\xi e^{i\theta}\in\mathbb{C}|\xi>0,\theta\in I\}$上,且指数有界的函数,见定义1.11;$\mathcal{N}(0)$指上式中$I=\{0\}$;$\tilde{\mathcal{N}}(I,\gamma)$被定义为集合$\mathbb{C}\oplus\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{N}(I,\gamma))$,称作1-可求和幂级数,见定理1.13;$\mathcal{S}^I$指沿$I$方向的波雷尔拉普拉斯变换的复合,见定理1.13;$\sim_1$指"1-Gevery"渐近,见式(9);$\tilde{\mathbb{C}}$指log型黎曼面,见定义1.17;$\hat{\mathcal{R}}_\Omega$、$\tilde{\mathcal{R}}_\Omega$分别指复现函数和复现幂级数,见定义1.24;ANA指在$\tilde{\mathbb{C}}$原点处的芽空间,$\overset{\vee}{f}$为ANA中元素,见定义1.39;SIN为奇性空间,具体见定义1.43;$\overset{\triangledown}{f}$指奇性空间中元素(一个函数等价类),代表元被称为$\overset{\triangledown}{f}$的大调;$\mathrm{sing}_0$指芽空间至奇性空间的商映射;var指奇性空间至芽空间的变差映射,见定义1.46;$\hat{f}$指变差映射var$\overset{\triangledown}{f}$的像,意为$\overset{\triangledown}{f}$在黎曼面上任意2叶之差,称为小调,见定义1.46;$\mathrm{SIN}^{\mathrm{simp}}$指简单奇性,见定义1.49,在此情况下,记号上将使用此奇性的小调代表此奇性;$\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega$指沿路径$\gamma$到$\xi$所在叶上探究解析芽$\mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi}$在$\omega$点处奇性的异形算子,见定义1.51;$\mathcal{A}^\Omega_{\omega,\varepsilon}$指在奇点方向沿$\varepsilon$规定的路径探测$\omega$处奇性的异形算子,见定义1.58;$\Delta^+_\omega$,$\Delta_\omega$分别指沿奇点方向正方向探测$\omega$处奇性的异形算子及沿奇点方向所有路径探测$\omega$处奇性的平均,见定义1.59。

下面给出本文用到的术语对照。

alien calculus-异形运算;analytic continuation-解析延拓;asymptotic expansion-渐近展开;bridge equation-联结方程;dilogarithm-双对数函数;polylogarithm-多重对数函数;endlessly continuable-无尽可延拓;mould-模;symmetral mould-对称模;altenal mould-交错模;comould-余模;major-大调;minor-小调;pseudovariable-伪变量;resurgence-复现;singularity-奇性;transseries-超越级数。

1 复现理论

本部分讨论复现理论的基本内容,包括波雷尔-

拉普拉斯求和理论、简单复现函数、异形导数等,并通过几个重要例子对其重要概念进行阐释[16,26]。

1.1　波雷尔-拉普拉斯求和理论

1.1.1　波雷尔-拉普拉斯变换

考虑复数域上所有形式幂级数作成的集合

$$\mathbb{C}[[z^{-1}]] := \{\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, a_0, a_1, \cdots \in \mathbb{C}\}, \tag{1}$$

其以柯西乘积作为乘法、形式求导$\partial := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$作为微分构成微分代数,其中柯西乘积定义为

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{-m}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^{-l},\ c_l = \sum_{l=m+n} a_m b_n \text{。} \tag{2}$$

注意以"z^{-1}"为自变量并非必要,只因在无穷远点"∞"研究问题略显方便,若需要观察在原点"0"的情形,只需做变换$t = \frac{1}{z}$并以变量t所在平面作为之后的研究对象即可。

另外,通过赋值映射可以赋予$(\mathbb{C}[[z^{-1}]], \partial)$一个度量结构。

定义1.1　如果映射$\mathrm{val}: \mathbb{C}[[z^{-1}]] \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$满足条件:若$\phi \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$非零,$\mathrm{var}(\phi) \subset \min\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\}$;$\mathrm{val}(0) = \infty$,则称$\mathrm{val}(\phi)$为$\phi$在$\mathbb{C}[[z^{-1}]]$中的赋值映射(valuation)。

因此,赋值映射记录了级数的最低阶次。例如,所有赋值$\geqslant v(\geqslant 0)$的形式幂级数的集合是$z^{-v}\mathbb{C}[[z^{-1}]] = \sum_{n=v}^{\infty} a_n z^{-n}$,其中$a_v, a_{v+1}, \cdots \in \mathbb{C}$。且赋值映射有如下性质:

命题1.2

$$\mathrm{val}(\partial\phi) \geqslant \mathrm{val}(\phi) + 1, \quad \phi \in \mathbb{C}[[z^{-1}]], \tag{3}$$

$$\mathrm{val}(\phi\cdot\psi) = \mathrm{val}(\phi) + \mathrm{val}(\psi), \quad \phi, \psi \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]\text{。} \tag{4}$$

通过映射val可为形式幂级数空间构造度量$d(\phi, \psi) := 2^{-\mathrm{val}(\phi-\psi)}, \phi, \psi \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$。此度量称为2-adic度量,所诱导的拓扑称为Krull拓扑或2-adic拓扑。在此拓扑下,有:

(1)形式幂级数空间中的一个序列$(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$是柯西列当且仅当对任意的$n \in \mathbb{N}$,存在与$n$相关的正整数$\mu_n$,使得对任意的$p \geqslant \mu_n$,$\phi_p$的第$n$个系数是同样的数。

(2)形式幂级数序列的和$\phi := \sum_{p=0} \phi_p$是形式收敛的当且仅当对每一个$p$,存在与$p$相关的正整数$v_p \to \infty\ (p \to \infty)$,使得$\phi_p \in z^{-v_p}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$。这是在说,$\phi$中的第$n$个系数是由$(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$中的有限个加出来的。在数学上,如果记$\mathrm{coeff}_n(\phi)$为$\phi$的第$n$个系数,则

$$\mathrm{coeff}_n(\phi) = \sum_{p\in M_n} \mathrm{coeff}_n(\phi_p), \quad M_n := \{p | v_p \leqslant n\}\text{。}$$

此时$(\mathbb{C}[[z^{-1}]], d)$成为一个度量空间,这也是完备的度量空间(一般地,由赋值映射诱导的p-adic度量是完备的)。根据式(3),发现算子∂在空间$(\mathbb{C}[[z^{-1}]], d)$上是一个收缩映射,其李普希兹常数为$\frac{1}{2}$,

$$d(\partial\phi, \partial\psi) = 2^{-\mathrm{val}(\partial\phi-\partial\psi)} \leqslant 2^{-\mathrm{val}(\phi-\psi)-1} = \frac{1}{2} d(\phi, \psi)\text{。}$$

如果$\phi, \chi \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$,可以定义其复合为

$$\phi(z + \chi(z)) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z)}{n!} \chi(z)^n\text{。}$$

这本质上是函数$\phi(z + \chi(z))$在z点的泰勒展开式。由形式收敛的充分必要条件以及赋值映射的性质式(3)和(4)知:对任意$n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{val}\left(\frac{1}{n!}\chi^n\partial^n\phi\right) \geqslant n\cdot\mathrm{val}(\chi) + \mathrm{val}(\phi) + n\text{。}$$

从而这个复合依然在$\mathbb{C}[[z^{-1}]]$中。

取定χ,考虑算子$\Theta: \phi \mapsto \phi(z + \chi)$,可证明此算子在代数层面上是一个自同构,且在Krull拓扑下是连续映射。平移算子是Θ的一个特殊例子,给出如下定义。

定义1.3　对任意$c \in \mathbb{C}$,$T_c: \mathbb{C}[[z^{-1}]] \to \mathbb{C}[[z^{-1}]]$,$\phi(z) \mapsto \phi(z + c)$。

T_c与∂是交换的,所以T_c是$(\mathbb{C}[[z^{-1}]], \partial)$这个微分代数的连续自同构。

注1.4　在一个分次空间上定义一个赋值映射,用这个映射定义p-adic度量,在诱导拓扑下,这个分次空间是一个完备的度量空间。在此空间上形式收敛的级数具有很好的性质,并且这个级数和依然在这个空间中。

$(\mathbb{C}[[z^{-1}]], \partial)$中包含许多发散级数,波雷尔-拉普拉斯求和理论仅研究其中一部分具有特定发散行为的形式幂级数,以下通过波雷尔变换来进行分离。

定义 1.5 线性映射 $\mathcal{B}: z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]] \to \mathbb{C}[[\zeta]]$ 为形式波雷尔变换,若

$$\mathcal{B}: \tilde{\phi}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1} \mapsto \hat{\phi}(\zeta) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\zeta^n,$$

其中 $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ 是没有常数项的形式幂级数组成的空间。在不引起歧义的情况下,有时直接称之为波雷尔变换。

形式波雷尔变换是一个双射,其将 $\tilde{\phi}$ 的第 $n+1$ 阶系数除以 $n!$,且移到了 $\hat{\phi}$ 的第 n 阶系数。分别记 z 平面(或拉普拉斯平面)与 ζ 平面(或波雷尔平面)为波雷尔变换前后所在的复平面。由定义可知,波雷尔变换具有改善敛散性的作用:对于本身在无穷远点邻域内收敛的无常数项级数,即 $\tilde{\phi}(z) \in z^{-1}\mathbb{C}\{z^{-1}\}$,在波雷尔变换后成为 ζ 平面上的整函数且被指数函数控制;对于 z 平面上在无穷远点 ∞ 发散的级数,波雷尔变换也能将其中一部分映为 ζ 平面关于原点邻域内收敛的幂级数。波雷尔-拉普拉斯求和理论的主要研究对象即为这些"发散性不太坏"的形式幂级数,被称为 1-Gevrey 形式幂级数:

定义 1.6 对于级数 $\tilde{\phi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$,若存在 $A, B > 0$,使得对任意 n,

$$|a_n| \leqslant AB^n n!, \tag{5}$$

称 $\tilde{\phi}$ 为一个 1-Gevrey 形式幂级数,记为 $\tilde{\phi}(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$。记没有常数项的 1-Gevrey 形式幂级数空间为 $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$。

可以验证,$\tilde{\phi} \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$ 等价于 $\hat{\phi} \in \mathbb{C}\{\zeta\}$。"1-Gevrey"中的"1"代表的是式(5)中"$n!$"的一次方。在求和理论中也可对"k-Gevrey 形式幂级数"进行讨论,即 a_n 满足 $|a_n| \leqslant AB^n (n!)^k$。

命题 1.7 对于任意的 $\tilde{\phi}, \tilde{\psi} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$,有 $\tilde{\phi}\cdot\tilde{\psi}$, $\partial\tilde{\psi}$, $\tilde{\phi}(z+\tilde{\psi}) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$。简言之,$(\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1, \partial)$ 是微分代数 $(\mathbb{C}[[z^{-1}]], \partial)$ 的一个微分子代数,关于复合也是封闭的。可以得到 $\mathbb{C}\oplus z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$ 也是一个代数。

用狄拉克符号"δ"定义形式波雷尔变换的扩张,仍记为 $\mathcal{B}$,即

$$\mathcal{B}: \mathbb{C}[[z^{-1}]] \to \mathbb{C}\delta\oplus\mathbb{C}[[\zeta]], \quad \mathcal{B}1 = \delta。 \tag{6}$$

对无常数项"1-Gevrey 形式幂级数"在波雷尔变换后的结果 $\hat{\phi}(\zeta) \in \mathcal{B}(z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1) = \mathbb{C}\{\zeta\}$ 进一步限制。

定义 1.8 如果 $\hat{\phi}(\zeta)$ 沿正实轴可以作解析延拓,且存在 $A, c_0 > 0$,使得

$$|\hat{\phi}(\zeta)| \leqslant Ae^{c_0|\zeta|}, \quad \zeta \in S_\alpha^0,$$
$$S_\alpha^0 := \{\zeta \in \mathbb{C} | \mathrm{dist}(\zeta, \mathbb{R}^+) < \alpha\}, \quad \alpha > 0,$$

则记 $\hat{\phi} \in \mathcal{N}(0)$。定义拉普拉斯变换

$$(\mathcal{L}^0\hat{\phi})(z) := \int_0^\infty e^{-z\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\mathrm{d}\zeta。 \tag{7}$$

注 1.9 由控制收敛定理可验证:若 $\hat{\phi} \in \mathcal{N}(0)$,则 $(\mathcal{L}^0\hat{\phi})(z)$ 在半平面 $\Pi_{c_0} := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}z > c_0\}$ 上为解析函数(图 1(a)),而对于一般的 $\hat{\phi}(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ 则不能达到如此好的结果。实际上在 0 点处解析的条件可以放宽至可积,见后文一般奇性叙述。

同样地,与式(6)定义的扩张空间对应,拉普拉斯变换也可以如下形式定义。

定义 1.10 $\mathcal{L}^0: \mathbb{C}\delta\oplus N(0) \to \mathbb{C}\oplus\mathcal{O}(\Pi_*)$,

$$\mathcal{L}^0(a\delta + \hat{\phi}) := a + \mathcal{L}^0\hat{\phi}。$$

在拉普拉斯变换的定义中,"$\mathcal{L}^0$"的上角标"0"代表沿幅角为 0 的方向,即正实轴方向作积分,即"$\mathcal{N}(0)$"中的"0"。事实上,若解析芽 $\hat{\phi}$ 在其他方向也可以解析延拓,可类似作出如下定义。

定义 1.11 如果 $\hat{\phi}(\zeta)$ 沿 $e^{i\theta}\mathbb{R}^+$ 可以作解析延拓,且存在 $A, c_0 > 0$,使得

$$|\hat{\phi}(\zeta)| \leqslant Ae^{c_0|\zeta|}, \quad \zeta \in S_\alpha^\theta,$$
$$S_\alpha^\theta := \{\zeta \in \mathbb{C} | \mathrm{dist}(\zeta, e^{i\theta}\mathbb{R}^+) < \alpha\}, \quad \alpha > 0,$$

则记 $\hat{\phi} \in \mathcal{N}(\theta)$。取 $a\delta + \hat{\phi} \in \mathbb{C}\delta\oplus\mathcal{N}(\theta)$,定义

$$\mathcal{L}^\theta(a\delta + \hat{\phi})(z) := a + \int_0^{e^{i\theta}\infty} e^{-z\zeta}\hat{\phi}\mathrm{d}\zeta =$$
$$a + \int_0^\infty e^{-z\xi e^{i\theta}}\hat{\phi}(\xi e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\xi。$$

由注 1.9,$\mathcal{L}^\theta\hat{\phi}$ 是在半平面

$$\Pi_{c_0}^\theta := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(ze^{i\theta}) > c_0\} \tag{8}$$

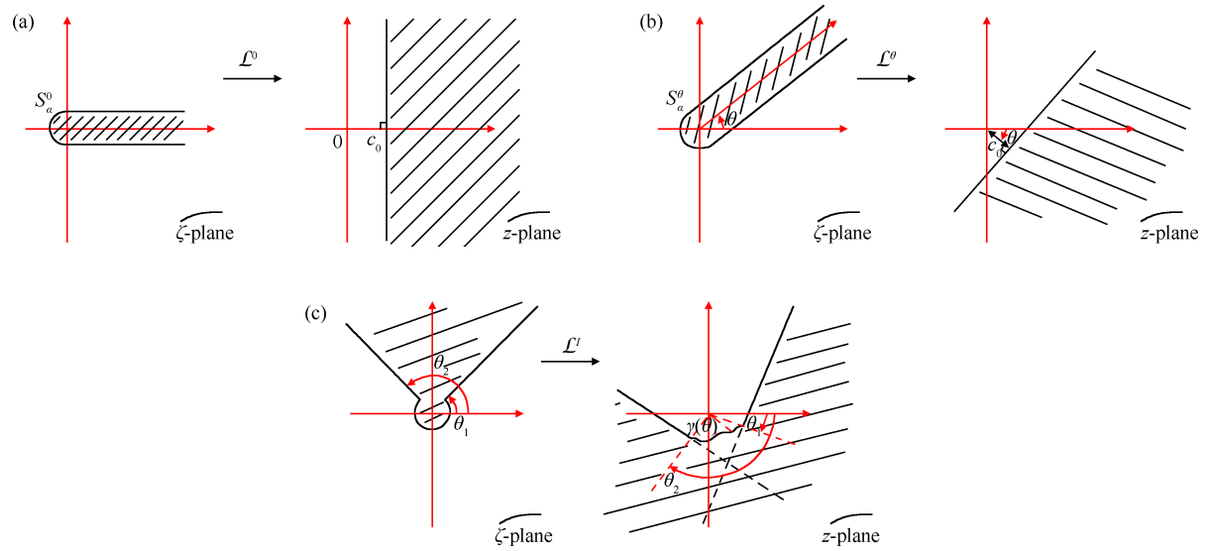
上的解析函数(见图 1(b))。

更广泛地,取 I 是 $\mathbb{R}$ 中开集,可以定义解析芽 $\hat{\phi} \in \mathcal{N}(I, \gamma)$,是指 $\hat{\phi}$ 可以解析延拓至扇形 $\{\xi e^{i\theta} \in \mathbb{C} | \xi > 0, \theta \in I\}$ 上,且当 $\xi > 0, \theta \in I$ 时,存在局部有界函数 $\alpha, \gamma: I \to \mathbb{R}$,使得 $|\hat{\phi}(\xi e^{i\theta})| \leqslant \alpha(\theta)e^{\gamma(\theta)\xi}$。其上拉普拉斯变换定义为

$$\mathcal{L}^I\hat{\phi}(z) = \mathcal{L}^\theta\hat{\phi}(z), \quad \theta \in I \text{ 且 } z \in \Pi_{\gamma(\theta)}^\theta。$$

命题 1.12 假设 $\hat{\phi} \in \mathcal{N}(I, \gamma)$,且 $\theta_1, \theta_2 \in I$, $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$。则对于任意的 $z \in \Pi_{\gamma(\theta_1)}^{\theta_1} \cap \Pi_{\gamma(\theta_2)}^{\theta_2}$, $\mathcal{L}^{\theta_1}\hat{\phi} = \mathcal{L}^{\theta_2}\hat{\phi}$。

因此对于开区间 $|I| < \pi$, $\mathcal{L}^I\hat{\phi}(z)$ 在 $\mathcal{D}(I, \gamma) :=$



注:左方为ζ平面,如果$\hat{\phi}$在阴影上解析且有指数控制,则沿I方向的拉普拉斯变换得到$\mathcal{L}^I\hat{\phi}$在右图阴影区域内解析。

图1　$\hat{\phi}$的拉普拉斯变换及其变换后解析区域

(a)0方向;(b)θ方向;(c)扇形I($|I|<\pi$)

$\bigcup_{\theta\in I}\Pi^{\theta}_{\gamma(\theta)}$上良定义且解析。而对于$|I|\geqslant\pi$或许会有多值性出现,称之为斯托克斯(Stokes)现象。这将在之后的例子中体现,直观解释见图1(c)。

对形式幂级数$\tilde{\phi}(z)\in\mathbb{C}[[z^{-1}]]$作进一步限制,使其满足拉普拉斯变换的条件。可证明操作后的结果与原形式幂级数"十分相近"。

定理1.13[26]135　取开区间$I\in\mathbb{R}$,$|I|<\pi$。如果形式幂级数$\tilde{\phi}(z)\in\mathbb{C}[[z^{-1}]]$的波雷尔变换$a\delta+\hat{\phi}(\zeta)$在$\mathbb{C}\delta\oplus\mathcal{N}(I,\gamma)$中,称$\tilde{\phi}$是在$I$方向上1-可求和的形式幂级数(简称为1-可求和级数),组成的空间记为$\tilde{\mathcal{N}}(I,\gamma)$。对1-可求和的形式幂级数$\tilde{\phi}$沿$I$方向上作波雷尔-拉普拉斯变换$\mathcal{S}^I:=\mathcal{L}^I\circ\mathcal{B}$,称变换后得到的函数为$\tilde{\phi}$的波雷尔和,那么$\mathcal{S}^I(\tilde{\phi})(z)$在对应的$\mathcal{D}(I,\gamma)$上解析,且有渐近关系$\mathcal{S}^I\tilde{\phi}(z)\sim_1\tilde{\phi}(z)$,$z\in\mathcal{D}(I,\gamma)$。符号$\sim_1$代表"1-Gevrey"渐近,对其进行如下定义。

定义1.14　取无限区域$\mathcal{D}\subset\mathbb{C}^*$,$\phi:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$为其上函数,$\tilde{\phi}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^{-n}\in\mathbb{C}[[z^{-1}]]$为形式幂级数。若存在一列正数$(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$使得

$$|\phi(z)-c_0-c_1z^{-1}-\cdots-c_{N-1}z^{-(N-1)}|\leqslant K_N|z|^{-N},\quad z\in\mathcal{D},\ N\in\mathbb{N},$$

则称$\tilde{\phi}$是ϕ在$\mathcal{D}$上的渐近展开,记为$\phi(z)\sim\tilde{\phi}(z)$。若存在$L,M$,使得$K_N=LM^NN!$,称$\tilde{\phi}$是$\phi$在$\mathcal{D}$上的1-Gevrey渐近展开,记为

$$\phi(z)\sim_1\tilde{\phi}(z),\ z\in\mathcal{D}。\tag{9}$$

1-Gevery渐近展开有如下性质:

命题1.15　对无限区域$\mathcal{D}\subset\mathbb{C}^*$,$\phi:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$,$\tilde{\phi}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^{-n}\in\mathbb{C}[[z^{-1}]]$为形式幂级数。那么:

(1)若$\tilde{\phi}$是某个函数在$\mathcal{D}$上的渐近展开,则$\tilde{\phi}$是唯一的。

(2)若在$\mathcal{D}$上有$\phi(z)\sim_1\tilde{\phi}(z)$,则$\tilde{\phi}\in\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$。

(3)若$\tilde{\phi}\in z^{-1}\mathbb{C}\{z^{-1}\}$,其渐近展开就是其泰勒展开。

计算可得,波雷尔-拉普拉斯变换$\mathcal{S}^0$后的函数不仅与原级数十分"相近",还保持形式求导与平移、"乘法"等关系。

命题1.16

(1)对任意$n\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{S}^0(z^{-n-1})=z^{-n-1}。\tag{10}$$

(2)在$\mathbb{C}\oplus\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{N}(0))$上,$\mathcal{S}^0$与$\partial$,$T_c$都是交换的,即

$$\mathcal{S}^0\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{\phi}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathcal{S}^0\tilde{\phi}),\qquad \mathcal{S}^0(\tilde{\phi}(z+c))=(\mathcal{S}^0\tilde{\phi})(z+c)。\tag{11}$$

(3)拉普拉斯变换与波雷尔变换保持代数乘法,即

$$(\mathbb{C}\oplus\tilde{\mathcal{N}}(I),\cdot)\xrightarrow{\mathcal{B}}(\mathbb{C}\delta\oplus\mathcal{N}(I),*)\xrightarrow{\mathcal{L}^I}(\mathcal{O}(\mathcal{D}(I)),\cdot)$$

其中:$\mathbb{C}\oplus\tilde{\mathcal{N}}(I)$中代数乘法为式(2)定义的柯西乘积;$\mathbb{C}\delta\oplus\mathcal{N}(I)$中代数乘法被定义为2个收敛函数

在其收敛区域的卷积 $\hat{\phi}*\hat{\psi}(\zeta)=\int_0^{\zeta}\hat{\phi}(\zeta_1)\hat{\psi}(\zeta-\zeta_1)\mathrm{d}\zeta_1$,并且可验证狄拉克函数 δ 在卷积下是代数 $(\mathbb{C}\delta\oplus\mathcal{N}(I),*)$ 的乘法单位。$\mathcal{O}(\mathcal{D}(I))$ 中代数乘法为函数乘法,如果 $\tilde{\phi},\tilde{\psi}\in\mathbb{C}\oplus\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{N}(I))$,则 $\mathcal{S}^I(\tilde{\phi}\cdot\tilde{\psi})=(\mathcal{S}^I\tilde{\phi})\cdot(\mathcal{S}^I\tilde{\psi})$。

(4)设 I 是 $\mathbb{R}$ 上的开集,$\tilde{\phi}_0(z),\tilde{\psi}_0(z)\in\mathbb{C}\oplus\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{N}(I))$ 是 I 方向上的1-可求和形式幂级数,将 $\tilde{\phi}_0(z)$ 写为 $a+\tilde{\phi}(z)$,其中 $a\in\mathbb{C}$,$\tilde{\phi}(z)\in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$。$H(t)\in\mathbb{C}\{t\}$ 为一个在原点的解析芽,那么

$$\tilde{\psi}_0(z+\tilde{\phi}_0(z))\in\mathbb{C}\oplus\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{N}(I)),$$
$$H(\tilde{\phi}(z))\in\mathbb{C}\oplus\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{N}(I)),$$

并且

$$\mathcal{S}^I(\tilde{\psi}_0(z+\tilde{\phi}_0))=(\mathcal{S}^I\tilde{\psi}_0)(z+\mathcal{S}^I\tilde{\phi}_0),$$
$$\mathcal{S}^I(H(\tilde{\phi}))=H(\mathcal{S}^I\tilde{\phi})。$$

总结以上过程,在无穷远处有一个发散级数 $\tilde{\phi}(z)$ 且是1-Gevrey的。作形式波雷尔变换从而得到一个在波雷尔平面原点的解析芽。若这个解析芽还能沿某方向(或某个角度区间)作解析延拓,且在无穷远处有指数控制。则再作拉普拉斯变换成一个关于 z 的在某半平面(或某些半平面之并)上解析的函数。定理1.13说明,原先的发散级数是这个函数在相应半平面上的渐近展开。此过程可由图2示意。

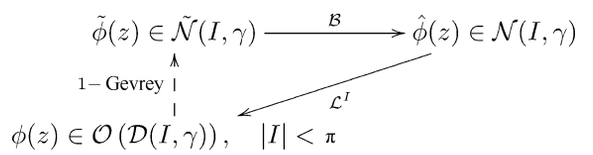


图2　波雷尔-拉普拉斯求和示意

1.1.2　多值性

为解释图1中尚未提及的拉普拉斯变换在变换角度 $|I|\geqslant\pi$ 时可能出现的“多值性”,引入对数型黎曼面(logrithmic Riemann surface)的概念。

定义1.17　对数型黎曼面 $\tilde{\mathbb{C}}$ 是底空间 $\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}-\{0\}$ 的万有复叠空间。被定义为固定起点的道路空间模去定端同伦关系 $\tilde{\mathbb{C}}:=\mathcal{P}/\sim$,其中

$$\mathcal{P}:=\{\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}^*|\gamma\text{连续},\gamma(0)=1\}。$$

复叠映射定义为:

$$p:\tilde{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}^*,\quad p(\zeta)=\gamma(1)。$$

对任意 $\gamma\in\mathcal{P}$ 使得 $[\gamma]=\zeta$。

注释1.18

(1)$\tilde{\mathbb{C}}$ 中每个等价类都有一个典则的选取方式:对 $r>0,\theta\in\mathbb{R}$,有 $\zeta=r\underline{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}\theta}$,表示先由1沿实轴走到 r,再围绕0点逆时针转 θ 角的路径。记 $\arg(r\underline{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}\theta})=\theta\in\mathbb{R}$,则 $p(r\underline{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}\theta})=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。

(2)之所以称之为对数型黎曼面,是因为log可以视为在等价类上的曲线积分,而黎曼面 $\tilde{\mathbb{C}}$ 经此建立了 $\tilde{\mathbb{C}}$ 到 $\mathbb{C}$ 的微分同胚(图3)

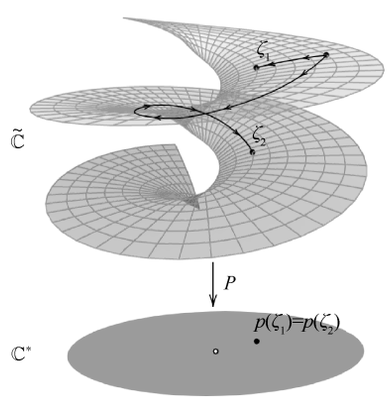
$$\log(r\underline{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}\theta}):=\ln r+\mathrm{i}\theta,$$

其中 $r>0,\theta\in\mathbb{R}$。利用此关系,定义 $\tilde{\mathbb{C}}$ 的主分支为

$$\{r\underline{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}\theta}|\theta\in(-\pi,\pi),r\in(0,+\infty)\}。$$

可验证,在此分支上,$\log([\zeta])=\int_1^{\zeta}\frac{\mathrm{d}z}{z}$,特记为 $\mathrm{Log}(\zeta)$。对于其他分支上的函数,其与主分支的关系为

$$\log(\zeta)=\mathrm{Log}(p(\zeta))+2k\pi\mathrm{i},k\in\mathbb{Z}。$$



注:在黎曼面 $\tilde{\mathbb{C}}$ 上每个点都代表一个同伦路径类,经 p 投影至 $\mathbb{C}^*$ 上路径的终点。

图3　对数黎曼曲面与 $\mathbb{C}^*$

接下来在对数型黎曼面上重述 $\mathcal{L}^{\theta}\hat{\phi}$ 的解析域。如果 $\theta\in\mathbb{R}$,$\hat{\phi}(\zeta)\in\mathcal{N}(\theta,\gamma)$ 且有如上指数控制,则 $\mathcal{L}^{\theta}\hat{\phi}$ 在

$$\tilde{\Pi}^{\theta}_{\gamma(\theta)}:=\left\{r\underline{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}\theta}\in\tilde{\mathbb{C}}|r>\gamma(\theta),t\in\left(-\theta-\arccos\frac{\gamma(\theta)}{r},-\theta+\arccos\frac{\gamma(\theta)}{r}\right)\right\}$$

上解析。其与复平面上解析半平面式(8)的关系为 $p(\tilde{\Pi}^{\theta}_{\gamma(\theta)}):=\Pi^{\theta}_{\gamma(\theta)}$。定义

$$\tilde{\mathcal{D}}(I,\gamma):=\bigcup_{\theta\in I}\tilde{\Pi}^{\theta}_{\gamma(\theta)}。\tag{12}$$

则上述结论可用对数型黎曼面的语言表述。

定理1.19[26]　取 $I\in\mathbb{R}$,$\tilde{\phi}(z)\in\mathbb{C}\oplus\mathcal{B}^{-1}\mathcal{N}(I,\gamma)$,那么 $\mathcal{S}^I\tilde{\phi}(z)$ 是在 $\tilde{\mathcal{D}}(I,\gamma)$ 上的解析函数,且 $\mathcal{S}^I\tilde{\phi}(z)\sim_1\tilde{\phi}(z),z\in\tilde{\mathcal{D}}(I,\gamma)$。

注1.20　如果 $|I|>\pi,\theta_1,\theta_2\in I$ 且 $\theta_1-\theta_2>\pi$,那么 $\tilde{\Pi}^{\theta_1}_{\gamma(\theta_1)}$ 与 $\tilde{\Pi}^{\theta_2}_{\gamma(\theta_2)}$ 在 $\tilde{\mathbb{C}}$ 上一定不相交,这样就把原来

$\mathcal{S}^{\theta}\tilde{\phi}$在$\mathbb{C}^{*}$上的多值问题变为了其在对数型黎曼面上的单值问题。

下面介绍2个例子,用对数型黎曼面的语言描述这个例子下的斯托克斯现象。

(1)欧拉级数。欧拉级数(见例0.1)是一个经典的发散级数。经波雷尔变换后在单位圆盘内收敛。

$$\hat{\phi}^{E}(\zeta):=\mathcal{B}(\tilde{\phi}^{E}(z))=\sum_{n=0}(-1)^{n}\zeta^{n}=\frac{1}{\zeta+1}。\quad(13)$$

因此$\tilde{\phi}^{E}(z)\in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]_{1}$。且对于$K=(-\pi,\pi)$时,存在局部有界的函数$\alpha:K\to\mathbb{R}$,使得$|\hat{\phi}^{E}(\zeta)|\leqslant\alpha(\theta)$,其中

$$\alpha(\theta)=\begin{cases}1, & \text{如果}|\theta|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1/|\sin\theta|, & \text{其他},\end{cases}$$

这意味着$\hat{\phi}^{E}(\zeta)\in\mathcal{N}(K,0)$。

首先观察俯角为0这个特殊方向。由式(10)和(11)知$\phi^{E}(z):=\mathcal{S}^{0}\tilde{\phi}^{E}(z)=\mathcal{L}^{0}\hat{\phi}^{E}(z)$是欧拉方程在半平面$\Pi_{0}$上的解析解(读者也可以直接证明$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\zeta}\hat{\phi}^{E}(\zeta)\mathrm{d}\zeta$满足欧拉方程)。在对数型黎曼面上有

$$\phi^{E}\in\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{D}}(0,0)),\tilde{\mathcal{D}}(0,0):=\{z\in\tilde{\mathbb{C}}|-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\}。$$

由于$\hat{\phi}^{E}\in\mathcal{N}(K,0)$,根据定义1.10,$\phi^{E}$实际上在更大区域上解析(图4):

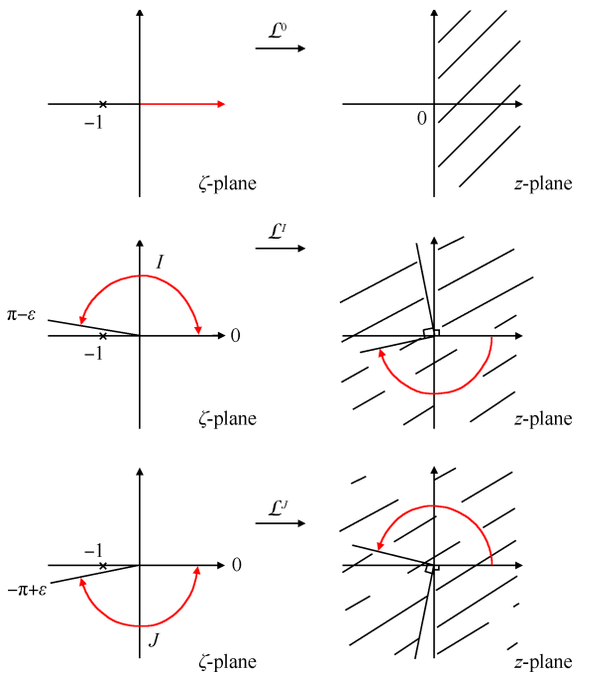
$$\tilde{\mathcal{D}}(K,0):=\{z\in\tilde{\mathbb{C}}|-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\}。$$

根据图4,$\mathcal{S}^{I}\tilde{\phi}^{E}$与$\mathcal{S}^{J}\tilde{\phi}^{E}$在右半平面$\tilde{\mathcal{D}}(I,0)\cap\tilde{\mathcal{D}}(J,0)=\tilde{\mathcal{D}}(0,0)$上相等。这与命题1.12相符。而在左半平面$\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$中:

$$\phi^{E}(z\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}})-\phi^{E}(z)=\int_{0}^{+\infty\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}}\mathrm{e}^{-\zeta}\hat{\phi}^{E}(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{0}^{+\infty\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi+\varepsilon)}}\mathrm{e}^{-\zeta}\hat{\phi}^{E}(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\oint\mathrm{e}^{-\zeta}\frac{1}{\zeta+1}\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{z}。\quad(14)$$

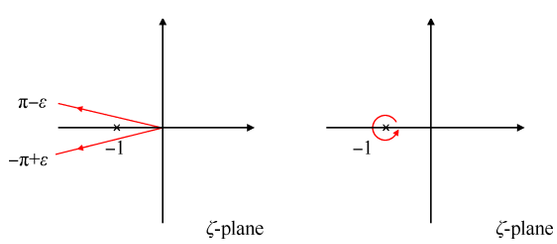
意味着ϕ^{E}从最开始定义的解析区域$\tilde{\mathcal{D}}(0,0)$的逆时针延拓与顺时针延拓的函数差为$2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{z}$,这就是斯托克斯(Stokes)现象。此非零项与$\hat{\phi}^{E}$的奇点位置与性质有关。例如此处斯托克斯项由$\hat{\phi}^{E}$的奇点$-1$处的留数贡献。图5为直观解释。

利用式(14),可将$\phi^{E}(z)$延拓至整个$\mathbb{C}$上,相邻2叶的差总为$2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{z}$。由此得到欧拉方程的通解



注:左方均在ζ平面中,由上至下分别表示对函数沿正实轴方向、区间I、区间J做拉普拉斯变换,得到右边拉普拉斯变换后函数由上至下分别在$\tilde{\mathcal{D}}(0,0)$与$\tilde{\mathcal{D}}(I,0)$、$\tilde{\mathcal{D}}(J,0)$上解析。

图4　欧拉级数波雷尔-拉普拉斯变换



注:左图中的2个拉普拉斯变换相减等于右图,为$\hat{\phi}^{E}$在-1处的留数。

图5　欧拉级数斯托克斯现象

$$\phi(z)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-z\zeta}}{\zeta+1}\mathrm{d}\zeta+c\mathrm{e}^{z}。$$

(2)斯特林级数。已知Γ-函数在复平面上的奇点是非正整数点(每个奇点的奇性是单极点),并且对于$x\in\mathbb{R}^{+}$,$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-x}\mathrm{e}^{x}\Gamma(x)=1$。因此可定义$\lambda(z):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^{\frac{1}{2}-z}\mathrm{e}^{z}\Gamma(z)$为$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-x}\mathrm{e}^{x}\Gamma(x)$从$\mathbb{R}^{+}$出发的解析延拓,其中$z^{\frac{1}{2}-z}:=\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-z)\mathrm{Log}z}$。

定理1.21[26]150　假设$I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,那么存在

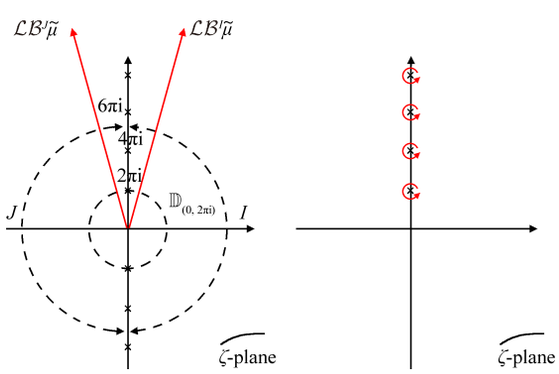
唯一的奇的(odd)I方向上1-可求和的形式幂级数$\tilde{\mu}(z)\in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$,使得$\mathrm{e}^{S^I\tilde{\mu}(z)}=\lambda(z)$。

更具体地,$\tilde{\mu}$的波雷尔变换为

$$\tilde{\mu}(\zeta)=\frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{\zeta}{2}\coth\frac{\zeta}{2}-1\right),\tag{15}$$

称$\hat{\mu}$为斯特林级数。对这个定理做如下解释:已知$\coth(\frac{\zeta}{2})=\frac{\mathrm{e}^{\zeta}+1}{\mathrm{e}^{\zeta}-1}$,所以$\zeta=2k\pi\mathrm{i},k\in\mathbb{Z}$为$\coth(\frac{\zeta}{2})$的单极点,这导致$\hat{\mu}(\zeta)$的奇点为$\zeta=2k\pi\mathrm{i},k\in\mathbb{Z}^*$。0不是奇点,因为其是可去的。观察到这些奇点都在波雷尔平面的虚轴上且都是单极点,因此可以简单计算斯特林级数的斯托克斯现象(图6):如果定义$J=(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$,那么$\tilde{\mu}$是$J$方向上的1-可求和级数,则

$$-\pi<\arg z<0\Rightarrow S^I\tilde{\mu}(z)-S^J\tilde{\mu}(z)=\sum_{k=1}\oint_{2k\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-z\zeta}\hat{\mu}(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{k=1}\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kz}。$$



注:左图中的2个拉普拉斯变换相减等于右图,为$\mathrm{e}^{-z\zeta}\hat{\mu}$在$2k\pi\mathrm{i},\ k\in\mathbb{N}^*$处的留数和。

图6　斯特林级数斯托克斯现象

如果定义$\tilde{\lambda}(z):=\mathrm{e}^{\tilde{\mu}(z)}$,那么根据性质1.16,有

$$\lambda(z)=\mathrm{e}^{S^I\tilde{\mu}(z)}=S^I\mathrm{e}^{\tilde{\mu}(z)}=S^I\tilde{\lambda}(z)。$$

可以证明:对任意的$c>0,\beta\in(0,\pi)$,

$$\lambda\sim_1\tilde{\lambda},\quad |z|>c\text{ 且 }\arg z\in(-\beta,\beta)。$$

在同样的区域上,有Γ函数的渐近展开$\Gamma(z)\sim_1\mathrm{e}^{-z}z^{z-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\,\tilde{\lambda}(z)$。

从数值上来看,如果记B_{2k}为伯努利数,则

$$\tilde{\mu}(z)=\sum_{k=1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}z^{-2k+1}=\frac{1}{12}z^{-1}-\frac{1}{360}z^{-3}+\frac{1}{1260}z^{-5}+\cdots。\tag{16}$$

因此,

$$\tilde{\lambda}(z)=1+\frac{1}{12}z^{-1}+\frac{1}{288}z^{-2}-\frac{159}{51840}z^{-3}-\frac{571}{2488320}z^{-4}+\frac{163879}{209018880}z^{-5}+\cdots。$$

1.1.3　题外话:多重求和理论

与收敛级数不同,由于发散级数的发散行为千差万别,不可能有一个对所有发散级数都适用的求和理论。前文已经定义了1-Gevrey发散级数,本节简要阐述另外一些发展比较成熟的求和理论,即k-可求和(k-summability)理论和多重求和理论(multi-summability)。关于这些理论更细节的刻画参见文献[27]及其所引参考文献。

定义1.22[27]　(k-波雷尔-拉普拉斯可求和)设k_0是满足条件$k_0\geqslant k>0$的正整数。若下面2个条件满足,则称级数$\tilde{f}(x)=\sum_{n>k_0}a_nx^n$沿方向$\theta_0$,$k$-波雷尔-拉普拉斯可求和。

(1)级数$\tilde{f}(x)$为k-Gevrey,即k-波雷尔变换$\hat{f}(\zeta)=\sum_{n>k_0}a_n\frac{\zeta^{n-k}}{\Gamma(\frac{n}{k})}$收敛;

(2)波雷尔级数$\hat{f}(\zeta)$的和$\varphi(\zeta)$可以解析延拓到一个无穷开扇形区域$\sigma=\sigma_{\theta_1,\theta_2}(\infty),(\theta_1<\theta_0<\theta_2)$,且在无穷远处具有$k$-阶指数增长。

用φ表示此解析延拓,如有必要适当缩小扇形区域,可以假定存在常数$A,K>0$,使得在σ上总有$|\varphi(\zeta)|\leqslant K\exp(A|\zeta|^k)$。显见,$k=1$时即为前文的定义。事实上至少有4种等价的方式定义$k$-可求和性[27]。对此类级数可平行地定义和研究复现理论,亦可以证明线性微分方程的解是复现的[27]。

多重求和理论是k-可求和理论的推广,至少有6种等价的方式来定义[27],本文给出如下最接近前文的递归形式的定义[27]。多重求和理论是k-可求和理论从一个层级向多个层级的推广,本文给出2个层级的定义,一般情形自明。

给定正整数$0<k_1<k_2$和$-(k_1,k_2)$-多弧(I_1,I_2),即弧$I_1\supseteq I_2$且弧I_j的张角至少为$\frac{\pi}{k_j}$,并令$\frac{1}{\kappa_1}=\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}$。记$I_1$和$I_2$的垂直平分方向分别为$\theta_1$和$\theta_2$,并记$\hat{I}_1$和$\hat{I}_2$分别以$\theta_1$和$\theta_2$为中心的弧,其张角分别为$|\hat{I}_1|=|I_1|-\frac{\pi}{k_2}\geqslant\frac{\pi}{\kappa_1}$和$|\hat{I}_2|=|I_2|-\frac{\pi}{k_2}$。还假设其同时为开扇形区域或者闭扇形区域。

定义 1.23[27]（(k_1,k_2)-拉普拉斯迭代积分可求和）若级数$\tilde{f}(x)$的k_2-波雷尔变换$\hat{g}(\zeta)=\mathcal{B}_{k_2}(\tilde{f})(\zeta)$满足2个条件：

（1）$\hat{g}(\zeta)$在$\hat{I}_1$上κ_1-可求和；

（2）$\hat{g}(\zeta)$的κ_1-和$g(\zeta)$可以解析延拓到一个包含$\hat{I}_2\times[0,+\infty)$的开扇形区域$\Sigma$上，并且在无穷远处具有$k_2$-阶指数增长。

则称之为在拉普拉斯迭代积分意义下在(I_1,I_2)上(k_1,k_2)-可求和，且定义其和为

$$f^{\mathrm{Li}}(x)\coloneqq\mathcal{L}_{k_2,\theta}(g)(x),\forall\theta\in\Sigma。$$

特别值得说明的是，多重求和理论正是Écalle的加速-求和（accelero-summation）理论[27]可以很好地纳入复现理论的框架。

1.2　简单复现函数

1.2.1　复现函数的定义和例子

为研究更一般的发散级数经波雷尔变换后在ζ平面出现奇点导致的斯托克斯现象，引入简单复现函数与异形导数的概念。以下均在孤立奇点的情况下考虑问题，即被考虑的均是“复现”的函数。首先规定：

$$D(p,R)\coloneqq\{z\in\mathbb{C}||z-p|<R\},$$
$$D_R\coloneqq\{z\in\mathbb{C}||z|<R\},$$
$$D_R^*\coloneqq\{z\in\mathbb{C}^*||z|<R\}。$$

定义 1.24　取Ω是$\mathbb{C}$中的离散闭子集，$\hat{\phi}(\zeta)\in\mathbb{C}\{\zeta\}$为原点处的解析芽。如果存在$<\hat{\phi}$收敛半径的$R>0$，使得

$$D_R^*\cap\Omega=\varnothing,$$

并且$\hat{\phi}$可以从D_R上出发，沿在$\mathbb{C}$上任意不过Ω的道路γ做解析延拓，记$\mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi}$为$\hat{\phi}$沿$\gamma$解析延拓至终点处的解析芽，则称$\hat{\phi}$为$\Omega$-复现函数。记作

$$\hat{\phi}(\zeta)\in\hat{\mathcal{R}}_\Omega\subset\mathbb{C}\{\zeta\}。$$

在不造成歧义的情况下，称扩张空间$\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}_\Omega$中的元素为$\Omega$-复现函数。如果一个形式幂级数$\tilde{\phi}(z)\in\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$的波雷尔变换$a\delta+\hat{\phi}\in\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}_\Omega$，那么称$\tilde{\phi}(z)$为$\Omega$-复现形式幂级数。记作

$$\tilde{\phi}(z)\in\tilde{\mathcal{R}}_\Omega:=\mathcal{B}^{-1}(\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}_\Omega)\subset\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1。$$

定义 1.25　称函数$\hat{\phi}$是复现函数，如果存在$\mathbb{C}$中的离散闭子集Ω，使得$\hat{\phi}\in\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}_\Omega$。

例 1.26　整函数都是复现函数。因为对任意的离散闭子集Ω，都有$\mathbb{C}\{z^{-1}\}\subset\tilde{\mathcal{R}}_\Omega$。

例 1.27　取$\hat{\phi}(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta}$为点1处的解析芽，将其沿道路$\gamma:t\in[0,1]\to\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}\in\mathbb{C}$做解析延拓，则$(\mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi})(\zeta)=(\mathrm{cont}_{\circlearrowleft}\hat{\phi})(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta}$。

取$\hat{\phi}(\zeta)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\zeta}}$也会得到相同性质。因此，欧拉级数$\tilde{\phi}^E(z)$（见式(13)经波雷尔变换后$\hat{\phi}^E(\zeta)=\dfrac{1}{1+\zeta}$）是一个$\{-1\}$-复现级数，写作$\tilde{\phi}^E\in\tilde{\mathcal{R}}_{\{-1\}}$。

例 1.28　斯特林级数$\tilde{\mu}(z)$（见式(15)、(16)）经波雷尔变换后$\hat{\mu}(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta^2}\left(\dfrac{\zeta}{2}\coth\dfrac{\zeta}{2}-1\right)$是一个$2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}^*$-复现级数，写作$\tilde{\mu}\in\tilde{\mathcal{R}}_{2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}^*}$。

除此之外还可以借助积分进行解析延拓。

引理 1.29　$\hat{\psi}$是q点的解析芽，可以沿道路γ作解析延拓。如果在q点的足够小邻域$D(q,\varepsilon)$内（$\hat{\psi}$的收敛圆内）有$\hat{\psi}$的原函数$\hat{\phi}(\zeta)\coloneqq\int_q^\zeta\hat{\psi}(s)\,\mathrm{d}s$，当$\zeta\in D(q,\varepsilon)$，那么$\hat{\phi}(\zeta)$也可以沿$\gamma$作解析延拓，且延拓至$\gamma(t)$处的解析芽为

$$(\mathrm{cont}_{\gamma_{|t}}\hat{\phi})(\zeta)=\int_q^{\gamma(t)}+\int_{\gamma(t)}^{\zeta}(\mathrm{cont}_{\gamma_{|t}}\hat{\psi})(s)\,\mathrm{d}s。$$

直观解释见图7。

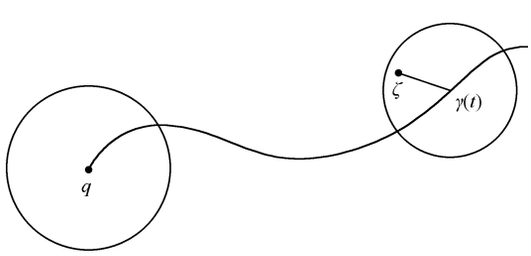


图7　变上限积分的解析延拓示意

例 1.30　取$\hat{\phi}(\zeta)=\mathrm{Log}\zeta=\int_1^\zeta\dfrac{1}{z}\mathrm{d}z$为点1处的解析芽，那么对数函数Log可以沿道路：$t\in[0,1]\to\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}\in\mathbb{C}$做解析延拓，且延拓一圈之后在1处的解析芽为

$$(\mathrm{cont}_{\circlearrowleft}\hat{\phi})(\zeta)=\mathrm{Log}\zeta+2\pi\mathrm{i}。$$

如果取$\hat{\phi}(\zeta)=\zeta^\alpha\coloneqq\mathrm{e}^{(\mathrm{Log}\zeta)\alpha},\alpha\in\mathbb{C}$，那么$(\mathrm{cont}_{\circlearrowleft}\hat{\phi})(\zeta)=\mathrm{e}^{(\mathrm{Log}\zeta+2\pi\mathrm{i})\alpha}=\zeta^\alpha\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$。

例 1.31　双对数函数$\hat{\phi}(\zeta)=\sum_{n=0}\dfrac{\zeta^n}{n^2}\in\hat{\mathcal{R}}_\Omega$，其中$\Omega=\{0,1\}$。注意到$\hat{\phi}'\coloneqq\sum_{n=0}\dfrac{\zeta^{n-1}}{n}=\dfrac{\log(1-\zeta)}{-\zeta}$在以0为圆心，1为半径的开圆盘上解析，并以1为分支点（0不是奇点是因为分子$\log(1-\zeta)$在0处泰

勒展开最低次为ζ,与分母的ζ抵消)。但$\mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi}'=\dfrac{\mathrm{cont}_\gamma\log(1-\zeta)}{-\zeta}$,根据对数函数的解析延拓,$(\mathrm{cont}_\circlearrowleft\log)(\zeta)=\mathrm{Log}\zeta+2\pi\mathrm{i}$。当延拓曲线$\gamma$从0出发,围绕1转完一圈后,分母上$\zeta$不再能被泰勒展开抵消,此时0成为极点。用数学语言表达,即$\hat{\phi}'$的解析延拓路径为

$$P_{\hat{\phi}'}=\{\gamma\in E(\mathbb{C}-\{1\},0)|\forall s\in\gamma^{-1}(0),\mathrm{ind}(\gamma|_{[0,s]},1)=0\},$$

其中E表示由0出发,不经过I的复平面上路径集。根据上述命题,$\hat{\phi}$作为$\hat{\phi}'$的积分,沿$P_{\hat{\phi}'}$中的路径也可以作解析延拓,能够证明$\hat{\phi}$没有其他的解析延拓路径。

推论 1.32　取$\mathbb{C}$中Ω离散闭子集。如果$\hat{B},\hat{\phi}\in\hat{\mathcal{R}}_\Omega$,则$\hat{B}\cdot\hat{\phi}\in\hat{\mathcal{R}}_\Omega$。特殊的,对任意$c\in\mathbb{C}$,

$$\hat{\phi}(\zeta)\in\hat{\mathcal{R}}_\Omega\Rightarrow-\zeta\hat{\phi}(\zeta),\ \mathrm{e}^{-c\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\in\hat{\mathcal{R}}_\Omega,$$

$$\hat{\phi}(\zeta)\in\hat{\mathcal{R}}_\Omega\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\in\hat{\mathcal{R}}_\Omega。$$

另外,如果离散子集Ω关于加法封闭,那么$\hat{\mathcal{R}}_\Omega$关于函数卷积也是封闭的。

定理 1.33[26]188　取Ω_1,Ω_2为2个离散闭子集,那么

$$\hat{\phi}\in\hat{R}_{\Omega_1},\hat{\psi}\in\hat{R}_{\Omega_2}\Rightarrow\hat{\phi}*\hat{\psi}\in\hat{R}_{\Omega_1\cup\Omega_2\cup(\Omega_1+\Omega_2)},$$

其中

$$\Omega_1+\Omega_2:=\{\omega_1+\omega_2|\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2\}。$$

定理 1.34　取Ω为$\mathbb{C}$中离散闭子集且对加法封闭。则$\tilde{\mathcal{R}}_\Omega$是$\mathbb{C}[[z^{-1}]]$的子代数。

类比在1-可求和级数空间中讨论的性质1.16,可得如下定理。

定理 1.35[26]192　假设$\tilde{\phi}(z),\tilde{\psi}(z),\tilde{\chi}(z)\in\tilde{\mathcal{R}}_\Omega$,其中$\chi(z)$没有常数项。取$H(t)\in\mathbb{C}\{t\}$。那么$\tilde{\psi}(z+\tilde{\phi}(z))\in\tilde{\mathcal{R}}_\Omega,H(\tilde{\chi}(z))\in\tilde{\mathcal{R}}_\Omega$。

在复现函数类中,与“解析延拓”相对应的是“奇点”的概念。

定义 1.36　假设f是一个在开集$U\subset\mathbb{C}$上的解析函数,称U边界上的点ω是一个奇点,如果不能找到ω的邻域V和在V上的解析函数g,以及在U中的开子集U,使得$\omega\in\partial U$,$f|_{U\cap V}=g|_{U\cap V}$成立。

注 1.37　可依据解析延拓后函数在复平面上的奇点单值性(monodromy)是否平凡为奇点分类。第1类其“单值性平凡”,这是说函数绕奇点解析延拓一圈后的值与起点值相同,均由本性奇点与极点构成。第2类对应于单值性非平凡的奇点,复变函数中将其归为分支点(branch point)。使得解析延拓后的函数具有多值性。一般研究方法是定义割线使相应解析函数成为单值的。

1.2.2　奇性与简单复现函数

接下来将以0点为例,具体描述复现函数在奇点处的奇性情况。

定义 1.38　取f在圆盘D中解析,0是D的边界点。对任意实数$L>0$,存在$\rho>0$,使得f可以沿任意长度$<L$的道路γ作解析延拓,其中要求γ的起点在$D\cap D_\rho^*$内,并且γ整体包含于D_ρ^*中,那么称f围绕0是螺旋的(直观解释如图8所示)。

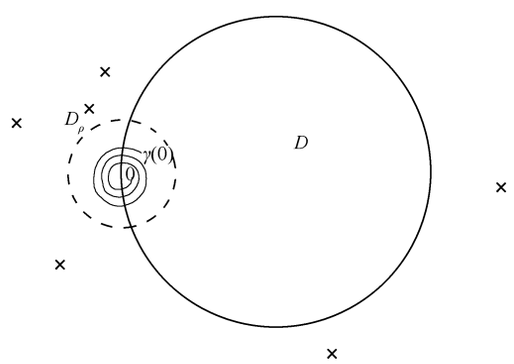


图8　绕原点0的螺旋型函数

如果f是螺旋的,可以证明f在$\mathbb{C}$上的提升$\overset{\vee}{f}$在$V(h)$上可以做解析延拓,其中$V(h):=\{\zeta=r\underline{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}\theta}|0<r<h(\theta),\theta\in\mathbb{R}\}\in\tilde{\mathbb{C}},h:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$为$>0$的连续函数。

定义 1.39　如果$h:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$是连续函数,$\overset{\vee}{f}:V\to\mathbb{C}$解析,那么对于所有的$(\overset{\vee}{f},h)$,定义等价关系:

$$(\overset{\vee}{f}_1,h_1)\sim(\overset{\vee}{f}_2,h_2)\Leftrightarrow$$

$$\zeta\in V(h_1)\cap V(h_2)\text{时},\overset{\vee}{f}_1(\zeta)\equiv\overset{\vee}{f}_2(\zeta)。$$

称等价类为零点处的芽,组成的集合记作ANA。

因为$\tilde{\mathbb{C}}$中没有“原点”,不妨把空间ANA想象成“所有在$\tilde{\mathbb{C}}$原点处的芽”。在记号上对ANA中的元素以及其任意一个代表元不作任何区分。

例 1.40　假设$\rho>0$,f是D_ρ^*上的解析函数。特殊地,假设在$D=D(\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2})$上解析。此时$\overset{\vee}{f}:=f\circ p$在$V(h)$上解析,$h\equiv\rho$。相应的ANA中的元素可以写为洛朗级数形式

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\zeta^n=S(\frac{1}{\zeta})+R(\zeta),$$

其中 $R(\zeta)\coloneqq\sum_{n\geqslant 0}a_n\zeta^n$ 有 $\geqslant\rho$ 的收敛半径，$S(\xi)\coloneqq\sum_{n>0}a_{-n}\xi^n$ 有无穷的收敛半径。

例 1.41　假设 $f(\zeta)=\hat{\phi}(\zeta)\mathrm{Log}\zeta$，其中 $\hat{\phi}$ 在圆盘 $D_\rho(\rho>0)$ 上解析。只需定义 $h\equiv\rho$，当 $\zeta\in V(h)$ 时，$\overset{\vee}{f}(\zeta)\coloneqq\hat{\phi}(p(\zeta))\log\zeta$。

上式意味着，选取对数函数的主分支上的点作为提升的起始点。如果选取其他的分支，就有

$$\overset{\vee}{f}(\zeta)\coloneqq\hat{\phi}(p(\zeta))\log\zeta+2k\pi\mathrm{i}\hat{\phi}(p(\zeta)),k\in\mathbb{Z}。$$

事实上，上式为 f 提升到第 $-k$ 层的解析芽，其相应的在 ANA 中的元素也可以写作 $\left(\sum_{n\geqslant 0}^{\infty}a_n\zeta^n\right)\log\zeta$，其中 $\sum_{n\geqslant 0}a_n\zeta^n$ 是 $\hat{\phi}$ 在零点处的泰勒展开，有 $\geqslant\rho$ 的收敛半径。

例 1.42　取 $\alpha\in\mathbb{C}^*$，$f_\alpha(\zeta)\coloneqq\dfrac{1}{\zeta^\alpha-\zeta^{-\alpha}}$。可以证明 f_α 是围绕 0 螺旋的。当 α 非实数且非纯虚数时，f_α 任一个提升 $\overset{\vee}{f}_\alpha$ 的解析域 $V(h)$ 中，h 不能取成常值函数。

除了可以限制函数类在 0 点附近取值相同，也可以将在 0 点相差一个正则函数的 2 类 $\tilde{\mathbb{C}}$ 上解析芽视为同一类，这样才能真正得到在 0 点处的函数奇性等价类。

例 1.43　记 ANA 空间模掉一个加解析芽的作用为 SIN 空间：$\mathrm{SIN}\coloneqq\mathrm{ANA}/\mathbb{C}\{\zeta\}$。

相应的商映射记作

$$\mathrm{sing}_0:\overset{\vee}{f}\in\mathrm{ANA}\to\overset{\triangledown}{f}\in\mathrm{SIN}。$$

称 SIN 空间中的元素为零点处的奇性，并记奇性 $\overset{\triangledown}{f}$ 的任意代表元为 $\overset{\triangledown}{f}$ 的大调。

取零点处不同的奇性芽 $\log\zeta$ 和 $\log\zeta+\dfrac{1}{1-\zeta}$，二者在原点处的奇性相同。原因是 $\dfrac{1}{1-\zeta}$ 在零点处解析。这 2 个奇芽都可以作为这一奇性的代表元，即同一个奇性的 2 个不同的大调。但 $\dfrac{1}{\zeta}$ 与 $\dfrac{2}{\zeta}$ 代表不同的奇性，因为二者可以被留数区分。

例 1.44　例 1.40 中 $\mathrm{sing}_0(\overset{\vee}{f}(\zeta))=\mathrm{sing}_0(S(\dfrac{1}{\zeta}))$。记

$$\delta\coloneqq\mathrm{sing}_0\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\zeta}\right),\delta^{(k)}\coloneqq\mathrm{sing}_0\left(\frac{(-1)^k k!}{2\pi\mathrm{i}\zeta^{k+1}}\right),\ k\geqslant 0。$$

注 1.45　上述 δ 同时为式(6)中所用到的形式符号。

定义 1.46　记变差(variation)映射为

$$\mathrm{var}:\begin{cases}\mathrm{SIN}\to\mathrm{ANA},\\ \overset{\triangledown}{f}=\mathrm{sing}_0(\overset{\vee}{f})\mapsto\hat{f}(\zeta)=\overset{\vee}{f}(\zeta)-\overset{\vee}{f}(\zeta\underline{e}^{-2\pi\mathrm{i}})。\end{cases}$$

称 $\hat{f}=\mathrm{var}\overset{\triangledown}{f}$ 为奇性 $\overset{\triangledown}{f}$ 的小调。

注 1.47　因为正则函数没有“单值性”，所以这个映射与在 $\mathrm{sing}_0\overset{\vee}{f}$ 中大调的选取无关。

例 1.48　若 $\hat{\phi}(\zeta)$ 在去心圆盘 D_ρ^* 上解析，则 $\mathrm{var}\left(\mathrm{sing}_0(\hat{\phi}(\zeta)\dfrac{\log\zeta}{2\pi\mathrm{i}})\right)=\hat{\phi}(\zeta)$。这是因为 $\mathrm{var}(\log(\zeta))=\log(\zeta)-\log(\zeta\underline{e}^{-2\pi\mathrm{i}})=2\pi\mathrm{i}$。

显然，线性映射 var 的核是由形如洛朗级数的奇性组成的。接下来仅考虑由极点与对数函数造成的分支点分别贡献奇性的等价类。

定义 1.49　如果一个零点处的奇性有形式

$$\overset{\triangledown}{\phi}=a\delta+\mathrm{sing}_0\left(\hat{\phi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi\mathrm{i}}\right),\ a\in\mathbb{C},\hat{\phi}\in\mathbb{C}\{\zeta\},$$

就称 $\overset{\triangledown}{\phi}$ 是一个零点处的简单奇性。将所有的简单奇性组成的子空间记为 $\mathrm{SIN}^{\mathrm{simp}}\subset\mathrm{SIN}$。称函数 f 对应一个在零点的简单奇性，如果 f 在以 0 为边界点的开圆盘 D 上解析，在 0 是螺旋的，且取任意的分支 $\tilde{D}\in\tilde{\mathbb{C}}$(其中 $p(\tilde{D})=D$)，$\overset{\vee}{f}\coloneqq f\circ p_{|\tilde{D}}$ 都是简单奇性的大调。

换一种说法，$\mathrm{SIN}^{\mathrm{simp}}$ 是下述 $\mathbb{C}$-线性同构映射的像：

$$a\delta+\hat{\phi}(\zeta)\in\mathbb{C}\delta\oplus\mathbb{C}\{\zeta\}\mapsto$$
$$a\delta+\mathrm{sing}_0\left(\hat{\phi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi\mathrm{i}}\right)\in\mathrm{SIN}^{\mathrm{simp}}。$$

一个函数 f 对应一个简单奇性当且仅当具有形式

$$f(\zeta)=\frac{a}{2\pi\mathrm{i}\zeta}+\hat{\phi}(\zeta)\frac{\mathrm{Log}\zeta}{2\pi\mathrm{i}}+R(\zeta),\quad\zeta\in D,$$

其中 $a\in\mathbb{C},\hat{\phi}(\zeta),R(\zeta)\in\mathbb{C}\{\zeta\}$。所有的提升都具有形式：

$$\overset{\vee}{f}(\zeta)=\frac{a}{2\pi\mathrm{i}\zeta}+\hat{\phi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi\mathrm{i}}+K(\zeta),\quad\zeta\in D,$$

其中 $K(\zeta)\in\mathbb{C}\{\zeta\}$。

在之后的叙述中，将 $\mathrm{sing}_0\left(\hat{\phi}(\zeta)\dfrac{\log\zeta}{2\pi\mathrm{i}}\right)$ 与 $\hat{\phi}(\zeta)$

作等同,并用如下记号:

$$\mathrm{sing}_0(f(\zeta))=\overset{\triangledown}{\phi}=a\delta+\hat{\phi}(\zeta)\in\mathbb{C}\delta\oplus\mathbb{C}\{\zeta\}。$$

简便来说,一个简单奇性是一个常数a加上一个原点处的解析函数芽$\hat{\phi}$。要注意的是,a代表的是单极点的系数,$\hat{\phi}$代表的是这个简单奇性的小调。

1.3　异形导数

接下来利用异形算子将0点处的奇性沿着延拓路径γ计算在Ω上任意一个奇点处的奇性,然而这么做对奇性空间有进一步的要求:

定义1.50　称$\overset{\triangledown}{\phi}$是$\Omega$-复现奇性,若其单值性$\hat{\phi}$是$\Omega$-可延拓的,即$\hat{\phi}$可以沿任意从$V(h)$出发的道路$\tilde{\gamma}\in\tilde{\mathbb{C}}$在$\tilde{\mathbb{C}}$上作解析延拓,且保证$p\circ\tilde{\gamma}\subset\mathbb{C}-\Omega$,其中$\hat{\phi}$在$V(h)\subset\tilde{\mathbb{C}}$上解析,记为$\overset{\triangledown}{\phi}\in\mathrm{SIN}_\Omega$。

可总结如下包含关系:其中左边为无穷级数空间,变量是z,通过波雷尔变换映成右边的波雷尔平面上的复现函数(图9)。或许读者会对函数存在的空间有疑惑,但请注意,对于$\mathrm{SIN}^{\mathrm{simp}}$型的奇性,已将$\mathrm{sing}_0\left(\hat{\phi}(\zeta)\dfrac{\log\zeta}{2\pi\mathrm{i}}\right)$与$\hat{\phi}(\zeta)$作了等同。

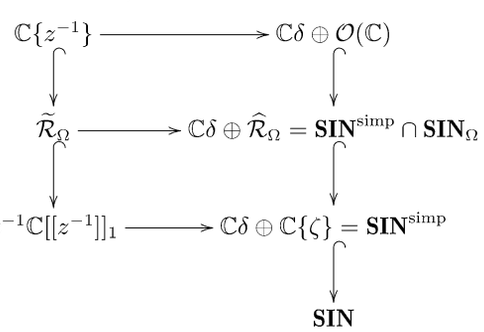


图9　波雷尔变换下级数空间与函数空间奇性对照示意

定义1.51　假设$\omega\in\Omega$,γ是$\mathbb{C}-\Omega$中的一条道路,其起点为$\zeta_0\in D^*_{\rho(\Omega)}$,终点$\zeta_1$与$\omega$相近(即存在开圆盘$D\subset\mathbb{C}-\Omega$,使得$\zeta_1$是$D$的中心,$\omega$是$D$的边界点),并有$\xi\in\mathbb{C}$满足$p(\xi)=-\omega+\zeta_1$。那么可以定义一个依赖$(\omega,\gamma,\xi)$的线性映射

$$\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega:\mathbb{C}\delta\oplus\widehat{\mathcal{R}}_\Omega\to\mathrm{SIN}$$

满足$\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega(a\delta+\hat{\phi}):=\mathrm{sing}_0(\overset{\vee}{f}(\zeta)),\overset{\vee}{f}(\zeta)=\mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi}(\omega+p(\zeta)),\zeta\in\tilde{D}(\xi)$,其中$\tilde{D}(\xi)$是$p^{-1}(-\omega+D)$包含$\xi$的分支。

这个定义是说,$\hat{\phi}$随着沿γ(或其同伦类)的延拓,最终得到在ζ_1处的一个解析芽$\mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi}$,在$D$内解析。点$\omega$在$D$的边界上并且有可能是一个奇点。由$\hat{\phi}\in\widehat{\mathcal{R}}_\Omega$可知$\mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi}$在$\omega$处是螺旋的。利用此性质通过算子$T_\omega$将$\omega$搬至原点,并固定一个分支$\tilde{D}(\xi)$使得提升唯一,最后对这个提升取零点的奇性。简单来说,异形算子$\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega$就是要探究解析芽$\mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi}$在$\omega$点处的奇性,见图10。

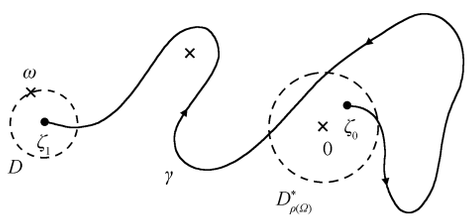


图10　异形算子$\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega$

注1.52　如果ω不是$\mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi}$的奇点,那么$\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega\overset{\triangledown}{\phi}=0$。事实上,所有异形算子的核的交构成空间$\mathbb{C}\delta\oplus\mathcal{O}(\mathbb{C})$。

例1.53　取$\hat{\phi}(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta}\mathrm{Log}(1+\zeta),\Omega=\{-1,0\}$,可以通过异形算子来讨论这个解析芽在相应的黎曼面上每一奇点的奇性。首先考虑在区间$(-1,0)$里,终点为$\zeta_1=-\dfrac{1}{2}$的道路γ。对任意满足$p(\xi)=-\dfrac{1}{2}$的ξ,当$\omega=0$时,计算发现$\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega\hat{\phi}=0$。当$p(\xi)=\dfrac{1}{2}$时,考虑$\omega=-1$,那么

$$\xi=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m}\Rightarrow\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega\hat{\phi}=$$

$$\mathrm{sing}_0\left(\frac{1}{-1+\zeta}(-2\pi\mathrm{i}m+\log\zeta)\right)=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\zeta}。$$

由于这里的奇性是简单奇性,因此将$\mathrm{sing}_0\left(\hat{\phi}(\zeta)\dfrac{\log\zeta}{2\pi\mathrm{i}}\right)$与$\hat{\phi}(\zeta)$作了等同。实际上这里的结果为$\dfrac{1}{-1+\zeta}\log\zeta$。以下在简单奇性中也需注意此点。如果$\gamma$围绕$-1$点绕$N$圈,可以发现$\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega$是不变的。若此时$\omega=0$,则

$$\xi=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m}\Rightarrow\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega\hat{\phi}=\mathrm{sing}_0\left(\frac{2\pi\mathrm{i}N}{\zeta}\right)=(2\pi\mathrm{i})^2N\delta。$$

通过异形算子和简单奇性的定义,可以得到一类特殊的复现函数。

定义1.54　取一个Ω-复现奇性$\overset{\triangledown}{\phi}$。如果对于一切如定义1.51中的$(\omega,\gamma,\xi)$所对应的$\mathcal{A}^{\gamma,\xi}_\omega\hat{\phi}$都是简单奇性,那么称$\overset{\triangledown}{\phi}$为简单$\Omega$-复现奇性,记为$\overset{\triangledown}{\phi}\in\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}^{\mathrm{simp}}_\Omega$。记$\tilde{\mathcal{R}}^{\mathrm{simp}}_\Omega:=\mathcal{B}^{-1}(\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}^{\mathrm{simp}}_\Omega)$,称其中的元素为简单$\Omega$-复现级数。

一个Ω-复现奇性$\overset{\triangledown}{\phi}$是简单的,是说其小调$\hat{\phi}=\mathrm{var}\overset{\triangledown}{\phi}$不管如何延拓,在$\Omega$的点上都只做成简单奇性。关系$\mathcal{A}_\omega^\gamma\overset{\triangledown}{\phi}=a\delta+\hat{\psi}(\zeta)$代表了

$$(T_\omega \mathrm{cont}_\gamma\hat{\phi})(\zeta)=\frac{a}{2\pi\mathrm{i}\zeta}+\hat{\psi}(\zeta)\frac{\mathrm{Log}\zeta}{2\pi\mathrm{i}}+R(\zeta),$$

其中ζ离零足够近,$R(\zeta)\in\mathbb{C}\{\zeta\}$。在$z$平面上的级数空间上,用$\mathcal{B}$将异形算子$\mathcal{A}_\omega^\gamma$拉回,仍记作$\mathcal{A}_\omega^\gamma$,这样就有交换图11。

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}} & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \widehat{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}_\omega^\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}_\omega^\gamma}\\ \widetilde{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{\mathrm{simp}} & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{\mathrm{simp}}\end{array}$$

图11　异形算子与波雷尔变换可交换

例1.55　回顾欧拉级数和斯特林级数,

$$\tilde{\phi}^E\in\tilde{\mathcal{R}}_{\{-1\}}^{\mathrm{simp}},\quad \tilde{\mu}\in\tilde{\mathcal{R}}_{2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}^*}^{\mathrm{simp}}。$$

可以计算:

$$\mathcal{A}_{\{-1\}}^\gamma\hat{\phi}^E=2\pi\mathrm{i}\delta,\quad \mathcal{A}_{2\pi\mathrm{i}m}^\gamma\hat{\mu}=\frac{1}{m}\delta。$$

命题1.56　取Ω在$\mathbb{C}$中离散闭子集,则:

(1)如果$\hat{B}$是一个整函数,那么$\hat{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}}$在乘以$\hat{B}$作用下是不变的,确切地说

$$\mathcal{A}_\omega^\gamma\hat{\phi}=a\delta+\hat{\psi}(\zeta)\Rightarrow\mathcal{A}_\omega^\gamma(\hat{B}\hat{\phi})=$$
$$a\hat{B}(\omega)\delta+\hat{B}(\omega+\zeta)\hat{\psi}(\zeta)。$$

(2)$\tilde{R}_\Omega^{\mathrm{simp}}$在$\partial$和$T_c$作用下也是不变的,确切地说

$$\tilde{\phi}\in\tilde{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}}\Rightarrow\mathcal{A}_\omega^\gamma(\partial\tilde{\phi})=(-\omega+\partial)\mathcal{A}_\omega^\gamma\tilde{\phi},$$
$$\mathcal{A}_\omega^\gamma(T_c\tilde{\phi})=\mathrm{e}^{-c\omega}T_c(\mathcal{A}_\omega^\gamma(\tilde{\phi}))。$$

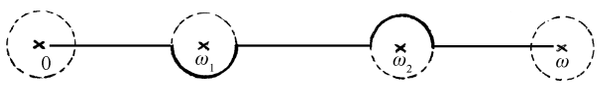
下述定理将卷积与异形算子联系在一起,这里只阐述有一个整函数的情况。

定理1.57[26]213　如果$\overset{\triangledown}{B}\in\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}}$的小调$\hat{B}:=\mathrm{var}\overset{\triangledown}{B}$是整函数,那么对任意的$\omega\in\Omega$,所有的异形算子$\mathcal{A}_\omega^\gamma:\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}}\to\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{\mathrm{simp}}$与$\hat{B}$的卷积是可交换的,即对任意$\overset{\triangledown}{\phi}\in\mathbb{C}\delta\oplus\hat{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}}$,有$\mathcal{A}_\omega^\gamma(\overset{\triangledown}{B}*\overset{\triangledown}{\phi})=\overset{\triangledown}{B}*(\mathcal{A}_\omega^\gamma\overset{\triangledown}{\phi})$。

除此之外,也有更加简洁的方法指定路径:

定义1.58　取$\omega\in\Omega-\{0\}$。考虑映射:$t\in[0,1]\mapsto t\omega\in[0,\omega]$,有$\Omega$中的点$\omega_i,i=0,\cdots,r$,使得$[0,\omega]\bigcap\Omega=\{\omega_0,\cdots,\omega_r\}$。

这些交点按照离零的远近有自然的序,记为$0=\omega_0<\omega_1<\cdots<\omega_{r-1}<\omega_r=\omega$。取$\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r)\in\{+,-\}^{r-1}$,可以定义异形算子$\mathcal{A}_{\omega,\varepsilon}^\Omega:\tilde{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}}\to\tilde{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{\mathrm{simp}}$。因为从0到$\omega$一共要经过$r-1$个$\Omega$中的点,选取的曲线$\gamma$要绕过这$r-1$个点,绕的方式由$\varepsilon$给出。$\varepsilon_i$取"-"时,曲线$\gamma$从左方(顺时针)绕过$\omega_i$,取"+"时,曲线从右方(逆时针)绕过,$\mathcal{A}_{\omega,\varepsilon}^\Omega$算子就是用这样的延拓线路来探究解析芽延拓至$\omega$处的奇性,见图12。



注:沿图中实线道路从左向右解析延拓至点ω附近,记为$\mathcal{A}_{\omega,\{+,-\}}^\Omega$。

图12　延拓路径

定义1.59　对任意的$\omega\in\Omega-\{0\}$,可在ω点处定义2种特殊的异形算子

$$\Delta_\omega^+,\Delta_\omega:\tilde{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}}\to\tilde{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{\mathrm{simp}}$$

满足

$$\Delta_\omega^+:=\mathcal{A}_{\omega,\{+,\cdots,+\}}^\Omega,\Delta_\omega:=\sum_{\varepsilon\in\{+,-\}^{r-1}}\frac{p(\varepsilon)!\,q(\varepsilon)!}{r!}A_{\omega,\varepsilon}^\Omega,$$

其中$p(\varepsilon)$和$q(\varepsilon)$分别代表ε中"+"和"-"的个数。在不会引起混淆的情况下,用同样的记号表示,$\Delta_\omega^+,\Delta_\omega:\hat{\mathcal{R}}_\Omega^{\mathrm{simp}}\to\hat{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{\mathrm{simp}}$。

不妨写出,当$r=1,2,3$时,

$$\Delta_{\omega_1}^+=\mathcal{A}_{\omega_1,()}^\Omega,\Delta_{\omega_1}=\mathcal{A}_{\omega_1,()}^\Omega,$$

$$\Delta_{\omega_2}^+=\mathcal{A}_{\omega_2,(+)}^\Omega,\Delta_{\omega_2}=\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\omega_2,(+)}^\Omega+\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\omega_2,(-)}^\Omega,$$

$$\Delta_{\omega_3}^+=\mathcal{A}_{\omega_3,(+,+)}^\Omega,\Delta_{\omega_3}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_{\omega_3,(+,+)}^\Omega+\frac{1}{6}\mathcal{A}_{\omega_3,(-,+)}^\Omega+$$
$$\frac{1}{6}\mathcal{A}_{\omega_3,(+,-)}^\Omega+\frac{1}{3}\mathcal{A}_{\omega_3,(-,-)}^\Omega。$$

固定$r\geqslant1$,$p=p(\varepsilon)$有r种可能性,且对每一个p,有$\binom{r-1}{p}$种ε满足$p(\varepsilon)=p$。因为在异形算子Δ_ω的定义中,$\mathcal{A}_{\omega,\varepsilon}^\Omega$前面的系数正好是$r\binom{r-1}{p(\varepsilon)}$的倒数,即所有这些$2^{r-1}$个系数和正好是1。那么,$\Delta_\omega(c\delta+\hat{\phi})$可以看成$\hat{\phi}$在$\omega$点处的"平均奇性"。如果小调$\hat{\phi}$是亚纯(meromorphic)的,且$\omega$是其单极点,那么

$$\Delta_\omega(c\delta+\hat{\phi})=\Delta_\omega^+(c\delta+\hat{\phi})=2\pi\mathrm{i}c_\omega\delta,$$

其中c_ω是$\hat{\phi}$在ω点的留数。

例1.60　回顾欧拉级数和斯特林级数,可以发现

$$\Delta_{-1}\tilde{\phi}^E=2\pi\mathrm{i},\quad \Delta_{2\pi\mathrm{i}m}\tilde{\mu}=\frac{1}{m},\quad m\in\mathbb{Z}^*。$$

定理1.61[26]　取$\omega\in\Omega$,任意在ω处的异形算

子都可以表示成如下形式的线性组合:

$$\Delta^{+}_{\eta_1,\cdots,\eta_s} \coloneqq \Delta^{+}_{\eta_s-\eta_{s-1}} \circ \cdots \circ \Delta^{+}_{\eta_2-\eta_1} \circ \Delta^{+}_{\eta_1},$$

其中 $s \geqslant 1, \eta_1, \cdots, \eta_{s-1} \in \Omega, \eta_s = \omega, \eta_1 \neq 0, \eta_j \neq \eta_{j+1}$, 对于 $1 \leqslant j < s$。

例 1.62

$$\mathcal{A}^{\Omega}_{\omega_2,(+)} = \Delta^{+}_{\omega_2}, \mathcal{A}^{\Omega}_{\omega_2,(-)} = \Delta^{+}_{\omega_2} - \Delta^{+}_{\omega_2-\omega_1} \circ \Delta^{+}_{\omega_1},$$

$$\mathcal{A}^{\Omega}_{\omega_3,(+,+)} = \Delta^{+}_{\omega_3}, \mathcal{A}^{\Omega}_{\omega_3,(-,+)} = \Delta^{+}_{\omega_3} - \Delta^{+}_{\omega_3-\omega_1} \circ \Delta^{+}_{\omega_1},$$

$$\mathcal{A}^{\Omega}_{\omega_3,(+,-)} = \Delta^{+}_{\omega_3} - \Delta^{+}_{\omega_3-\omega_2} \circ \Delta^{+}_{\omega_2},$$

$$\mathcal{A}^{\Omega}_{\omega_3,(-,-)} = \Delta^{+}_{\omega_3} - \Delta^{+}_{\omega_3-\omega_1} \circ \Delta^{+}_{\omega_1} - \Delta^{+}_{\omega_3-\omega_2} \circ \Delta^{+}_{\omega_2} + \Delta^{+}_{\omega_3-\omega_2} \circ \Delta^{+}_{\omega_2-\omega_1} \circ \Delta^{+}_{\omega_1}。$$

事实上,Δ_ω 与 Δ^{+}_{ω} 有类似于指数、对数展开的极为复杂的关系:

$$\Delta_\omega = \sum_{s\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \sum_{(\omega_1,\cdots,\omega_{s-1})} \Delta^{+}_{\omega-\omega_{s-1}} \circ \cdots \circ \Delta^{+}_{\omega_2-\omega_{s-1}} \circ \Delta^{+}_{\omega_1},$$

$$\Delta^{+}_{\omega} = \sum_{s\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{s!} \sum_{(\omega_1,\cdots,\omega_{s-1})} \Delta_{\omega-\omega_{s-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{\omega_2-\omega_{s-1}} \circ \Delta_{\omega_1}\circ$$

即可以用 Δ_ω 的复合的线性组合生成异形算子空间,这意味着 Δ_ω 与 Δ^{+}_{ω} 的地位同等重要。由命题 1.56,下面的命题是显然的。

命题 1.63　取 $\tilde{\phi} \in \tilde{\mathcal{R}}^{\mathrm{simp}}_{\Omega}, c \in \mathbb{C}$,则

$$\Delta^{+}_{\omega}\partial\tilde{\phi} = (-\omega+\partial)\Delta^{+}_{\omega}\tilde{\phi}, \quad \Delta_{\omega}\partial\tilde{\phi} = (-\omega+\partial)\Delta_{\omega}\tilde{\phi},$$

$$\Delta^{+}_{\omega}T_c\tilde{\phi} = e^{-c\omega}T_c\Delta^{+}_{\omega}\tilde{\phi}, \quad \Delta_{\omega}T_c\tilde{\phi} = e^{-c\omega}T_c\Delta_{\omega}\tilde{\phi}。$$

异形算子与卷积有如下关系,相关证明可参考文献[26]。

假设 Ω_1, Ω_2 是 $\mathbb{C}$ 上 2 个非空离散闭子集,定义 $\Omega \coloneqq \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_1 + \Omega_2)$。由卷积的相关性质类似可得如下命题。

定理 1.64　如果 $\tilde{\phi}\in\tilde{R}^{\mathrm{simp}}_{\Omega_1}$, $\tilde{\psi}\in\tilde{R}^{\mathrm{simp}}_{\Omega_2}$,则 $\tilde{\phi}\tilde{\psi}\in\tilde{R}^{\mathrm{simp}}_{\Omega}$。对 $\omega \in \Omega - \{0\}$,有

$$\Delta^{+}_{\omega}(\tilde{\phi}\tilde{\psi}) = (\Delta^{+}_{\omega}\tilde{\phi})\tilde{\psi} + \sum_{\substack{\omega=\omega_1+\omega_2\\ \omega_1\in\Omega_1\cap(0,\omega)\\ \omega_2\in\Omega_2\cap(0,\omega)}} (\Delta^{+}_{\omega_1}\tilde{\phi})(\Delta^{+}_{\omega_2}\tilde{\psi}) + \tilde{\phi}(\Delta^{+}_{\omega}\tilde{\psi})。$$

固定方向 d 且规定集合 $\Omega_1 \cap d$ 和 $\Omega_2 \cap d$ 都包含 0,在约定 $\Delta^{+}_{0} \coloneqq \mathrm{Id}$ 的情况下,有

$$\Delta^{+}_{\sigma}(\tilde{\phi}\tilde{\psi}) = \sum_{\substack{\sigma=\sigma_1+\sigma_2\\ \sigma_1\in\Omega_1\cap d\\ \sigma_2\in\Omega_2\cap d}} (\Delta^{+}_{\sigma_1}\tilde{\phi})(\Delta^{+}_{\sigma_2}\tilde{\psi})。$$

更特别地,若 $-\omega+\Omega\subset\Omega$,则 Δ_ω 满足莱布尼茨性质:

$$\Delta_\omega(\tilde{\phi}\tilde{\varphi}) = \Delta_\omega(\tilde{\phi})\tilde{\varphi} + \tilde{\phi}\Delta_\omega(\tilde{\varphi}),$$

此时称之为异形导数。以下在不引起误解的情况下,将混用异形算子与异形导数。

定理 1.65[26]　如果 Ω 关于加法封闭,取 $\tilde{\phi}(z), \tilde{\psi}(z), \tilde{\chi}(z) \in \tilde{R}^{\mathrm{simp}}_{\Omega}$,假设 $\tilde{\chi}$ 没有常数项,$H(t) \in \mathbb{C}\{t\}$,则 $\tilde{\psi}(z+\tilde{\phi}(z)) \in \tilde{\mathcal{R}}^{\mathrm{simp}}_{\Omega}, H(\tilde{\chi}(z)) \in \tilde{\mathcal{R}}^{\mathrm{simp}}_{\Omega}$ 对任意的 $\omega \in \Omega - \{0\}$,有 $(\Delta_\omega\tilde{\psi})(z+\tilde{\phi}(z)) \in \tilde{\mathcal{R}}^{\mathrm{simp}}_{-\omega+\Omega}$,且

$$\Delta_\omega(\tilde{\psi}(z+\tilde{\phi}(z))) = (\partial\tilde{\psi})(z+\tilde{\phi}(z))\cdot\Delta_\omega\tilde{\phi} + e^{-\omega\tilde{\phi}}\cdot(\Delta_\omega\tilde{\psi})(z+\tilde{\phi}(z)),$$

$$\Delta_\omega(H(\tilde{\chi}(z))) = \left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(\tilde{\chi}(z))\right)\cdot\Delta_\omega\tilde{\chi}。$$

异形算子可以用来计算波雷尔-拉普拉斯变换所产生的斯托克斯项,固定 Ω 和一个方向 $d \coloneqq \{te^{i\theta} | t \geqslant 0\}$,取包含角度 θ 且长度<π的区间 I,记 $I^+ \coloneqq \{\theta^+ \in I | \theta^+ < \theta\}$ 和 $I^- \coloneqq \{\theta^- \in I | \theta^- > \theta\}$。约定 0 在 $\Omega \cap d$ 中,并用 $\prec$ 记 $\Omega \cap d$ 中元素的序:

$$\Omega \cap d = \{\omega_m\}_{m\in\mathbb{N}}, \quad \omega_0 = 0 \prec \omega_1 \prec \omega_2 \prec \cdots。$$

取 $\omega = \omega_m$,有如下定理。

定理 1.66[26]228-229　对于 $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{R}}^{\mathrm{simp}}_{\Omega} \cap \mathcal{N}(I^+,\gamma) \cap \mathcal{N}(I^-,\gamma)$,

$$\mathcal{L}^{+}\hat{\varphi}(z) = \mathcal{L}^{-}\hat{\varphi}(z) + \sum_{\omega_m} e^{-\omega_m z}\mathcal{L}^{-}(\Delta^{+}_{\omega_m}\hat{\varphi}(z))。$$

证明　对固定的 $j \leqslant m$。给定 $z \in \mathcal{D}(I^{+}_{\varepsilon}, \gamma+\varepsilon) \cap \mathcal{D}(I^{-}_{\varepsilon}, \gamma+\varepsilon)$,取 $\theta^+ \in I^{+}_{\varepsilon}$ 和 $\theta^- \in I^{-}_{\varepsilon}$,使得 $\zeta \mapsto e^{-z\zeta}$ 是沿 $\mathbb{R}^+e^{i\theta^+}$ 指数增长的,则

$$\varphi^+(z) = \varphi^-(z) + \left(\int_{\omega_j}^{e^{i\theta^-}\infty} + \int_{\gamma_1} + \cdots + \int_{\gamma_{m-j}} + \int_{C_\rho}\right) e^{-z\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\mathrm{d}\zeta。$$

其中,C_ρ 是从 θ^- 的无穷远处沿直线至 $\rho e^{i\theta}$ 再沿 θ^+ 的直线至无穷远处的曲线,见图 13。

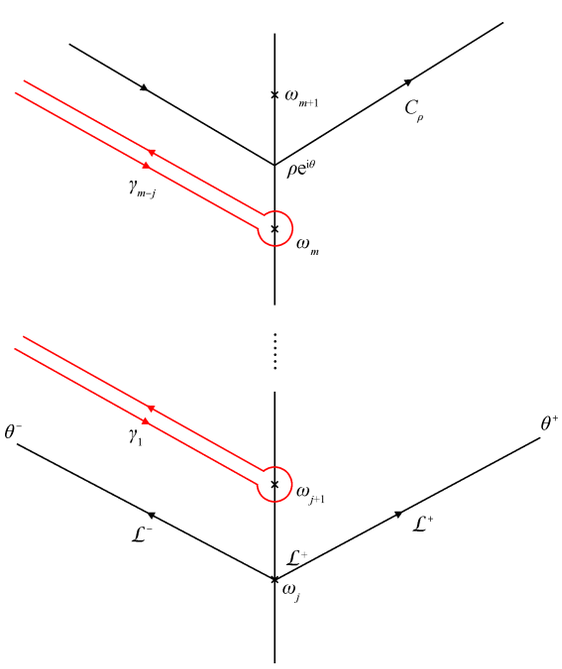


图 13　ϕ 沿 θ^+ 与 θ^- 方向拉普拉斯变换之差

当$m \to \infty$时,即$\rho \to \infty$,就得到了以上结果。

注1.67　由于$\tilde{\phi}$与$\mathcal{L}^{\theta^+}\hat{\varphi}(z)$有1-Gevery渐近关系,上述定理可给出函数沿不同方向(奇点)的渐近幂级数展开的全部信息,其由沿不同方向(奇点)的幂级数展开之和组成,每项幂级数之间由与波雷尔平面上奇点相关的指数函数区分,因此这个加和形式被称之为"超越级数"。具体例子见后文应用部分。

例1.68　以熟悉的欧拉级数为例。取$-1 \in \Omega \subset \mathbb{R}^-$,则$\Delta^+_{-1}\hat{\phi}^E = 2\pi\mathrm{i}\delta_{-1}$。如果取$I^+ := (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $I^- := (\pi, \frac{3\pi}{2})$,且$\phi^+ := \mathcal{L}^{I^+}\hat{\phi}^E$, $\phi^- := \mathcal{L}^{I^-}\hat{\phi}^E$,那么在相应的解析区域的交$\{\mathrm{Re}z < 0\}$上,有$\phi^+ = \phi^- + 2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^z$。

在定理1.66证明中的记号下,取$\rho > 1$,这个例子在C_ρ上的积分为0。

例1.69　用相同的方法研究斯特林级数,得到

$$\Delta^+_{2\pi\mathrm{i}m}\tilde{\mu} = \frac{1}{m}\delta_{2\pi\mathrm{i}m},\ m \in \mathbb{Z}^*,$$

那么

$$\mathrm{Im}z < 0 \Rightarrow \mu^+(z) = \mu^-(z) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mz} = \mu^-(z) - \log(1 - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z}),$$

以及

$$\mathrm{Im}z > 0 \Rightarrow \mu^-(z) = \mu^+(z) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mz} = \mu^+(z) - \log(1 - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z})。$$

1.4　一般奇性

Écalle[10]给出了更一般奇性所在空间的代数结构,在这些结构的基础上进行模运算和求解异形导数等,在这里给出代数结构和异形导数的计算。

首先给出3个空间:

(1)$\mathcal{A}_{\mathrm{gen}}$是$\mathbb{C}$上在点$Q_0$处的解析芽组成的空间。即在$Q_0$的去心邻域上的全纯函数组成的空间。

(2)$\mathcal{A}_{\mathrm{int}}$是$Q_0$处的可积芽组成的空间,即如果$\varphi \in \mathcal{A}_{\mathrm{int}}$,则$\int_{Q_0}^{P}|\varphi(M)|\mathrm{d}M < \infty$,以及在一个给定扇叶$\theta_1 < \arg P < \theta_2$上,当点$P$趋于$Q_0$时$\int_{Q_0}^{P}|\varphi(M)|\mathrm{d}M \rightrightarrows 0$是一致的。

(3)$\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}$是$Q_0$处的正则芽组成的空间,即如果$\varphi \in \mathcal{A}_{\mathrm{reg}}$,那么$\varphi(P) = \sum_{n \geqslant 0}a_n z^n$ $(z = P, \lim|a_n|^{1/n} < \infty)$。

定理1.70　取$\varphi, \psi \in \mathcal{A}_{\mathrm{int}}$,定义卷积运算

$$\varphi * \psi(P) = \int_{Q_0}^{P}\varphi(M)\psi(M')\mathrm{d}M,$$

这里积分路径是沿着线段Q_0P,同时M'与M关于Q_0P的中点P^*对称的路径。进一步添加δ,使得$\mathcal{A}_{\mathrm{int}} \oplus \delta$为关于运算$*$的交换代数,简记为$(\mathcal{A}, *)$。

接下来考虑商空间$\mathcal{A}_{\mathrm{gen}}/\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}$。记自然映射

$$\sim: \mathcal{A}_{\mathrm{gen}} \to \mathcal{A}_{\mathrm{gen}}/\mathcal{A}_{\mathrm{reg}},$$
$$\Phi \mapsto \tilde{\Phi}。$$

给空间$\mathcal{A}_{\mathrm{gen}}/\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}$按照如下方式赋予卷积运算。设$\Phi, \Psi \in \mathcal{A}_{\mathrm{gen}}$为定义在$Q_0$的$V_{2r}$邻域内的2个元素。对于任意$P_0 \in V_r$及

$$P \in V^{P_0} = \{P: 0 < |P| < |P_0|, 0 < \arg P - \arg P_0 < \pi\},$$

定义

$$(\Phi *_{P_0} \Psi)(P) = \int_{P_0'}^{P_0}\Phi(M)\Psi(M')\mathrm{d}M,\quad (17)$$

P_0, P_0'和M, M'都关于线段Q_0P的中点对称,积分路径沿着$P_0'P_0$。

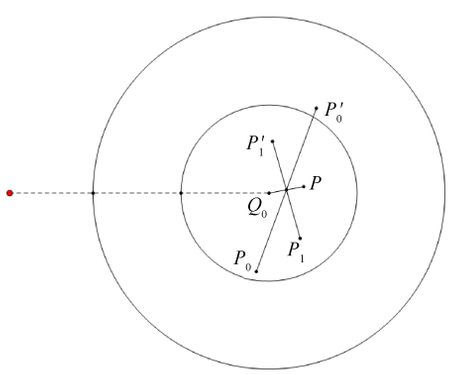


图14　积分路径$P_0'P_0$

定理1.71　任取芽$\Phi, \Psi \in \mathcal{A}_{\mathrm{gen}}$以及任意充分接近$Q_0$的点$P_0$,关系式(17)在解析延拓的意义下定义了一个卷积$\Phi *_{P_0} \Psi$。其等价类$\widetilde{\Phi *_{P_0} \Psi}$与$P_0$无关,只依赖于等价类$\tilde{\Phi}$和$\tilde{\Psi}$。因此可以用符号$\tilde{\Phi} \circledast \tilde{\Psi}$来表示这个元素。运算$\circledast$是$\mathcal{A}_{\mathrm{gen}}/\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}$上的双线性、对称、连续的运算。

取$\varphi \in \mathcal{A}_{\mathrm{int}}$是定义在$Q_0$的$V_{2r}$邻域上边的全纯函数。$P_0$是$V_r$中的任意点。定义集合

$$V_{P_0} = \{P|0 < |\dot{P}| < |\dot{P}_0|, 0 < \arg P_0 - \arg P < \pi\}。$$

对任意$P \in V_{P_0}$,设

$$\Phi_{P_0}(P) = \int_{Q_0}^{Q_0'}\varphi(M)\mathfrak{V}(M')\mathrm{d}M。\quad (18)$$

Q_0', Q_0以及M', M关于线段PP_0的中点P^*对称,其中的积分路径为Q_0Q_0',$\mathfrak{V}$定义为$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{z - z_0}$ $(z = \dot{P}, z_0 = \dot{P}_0)$。

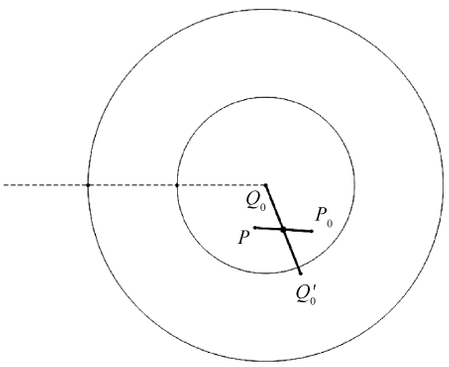


图15　积分路径Q_0Q_0'

定理1.71的完整证明需要用到以下的定理。

定理1.72　任意芽$\varphi\in\mathcal{A}_{\mathrm{int}}$相应的积分式(18)在解析延拓的意义下给定一个芽$\Psi_{P_0}\in\mathcal{A}_{\mathrm{gen}}$,其等价类$\tilde{\Phi}_{P_0}$不依赖$P_0$的选取。用$\pi(\varphi)$表示这个等价类,这样就定义了一个从$\mathcal{A}_{\mathrm{int}}$到$\mathcal{A}_{\mathrm{gen}}/\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}$的线性单射。这个映射满足同态关系,即对于任意$\varphi,\psi\in\mathcal{A}_{\mathrm{int}}$,$\pi(\varphi*\psi)=\pi(\varphi)\circledast\pi(\psi)$。

这些构造和结论完整给出了一般奇性所在空间的代数结构。定义1.51中给出了异形算子作用到简单奇性上边的行为,更一般的情形下异形算子作用到可积奇性上的行为,通过如下例子说明。

例1.73　取函数$\hat{f}(\xi)=\xi^{-1/6}(2+\xi)^{-1/6}$,则函数$\hat{f}(\xi)$是奇性

$$\overset{\nabla}{f}:=\mathrm{sing}_0\left(\frac{\xi^{-1/6}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/6}}(2+\xi)^{-1/6}\right),$$

的小调。称$\overset{\nabla}{f}$是一个可积奇性(详情见文献[20])。

借助此例叙述异形算子的作用。$\Delta_{2\underline{e}^{\mathrm{i}\pi}}$的定义是考虑小调$\hat{f}$沿着射线$\underline{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathbb{R}_{>0}\subset\mathbb{C}$的解析延拓,因为$2\underline{e}^{\mathrm{i}\pi}$是其碰到的第一个奇点,所以有以下的解析延拓:$\mathrm{cont}_{\gamma}\hat{f}(2\underline{e}^{\mathrm{i}\pi}+\xi)$,这里$\xi$的辐角范围为$-\pi<\arg\xi<\pi$。通过计算可以得到

$$\overset{\vee}{g}(\xi)=\mathrm{cont}_{\gamma}\hat{f}(2\underline{e}^{\mathrm{i}\pi}+\xi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}\xi^{-1/6}(2-\xi)^{-1/6}。$$

取$\overset{\vee}{g}$的简单奇性可以得到

$$\Delta_{2\underline{e}^{\mathrm{i}\pi}}\overset{\nabla}{f}=\mathrm{sing}_0(\overset{\vee}{g}(\xi))=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/6})\overset{\nabla}{f}_{-},$$

其中$\overset{\nabla}{f}_{-}=\mathrm{sing}_0\left(\frac{\xi^{-1/6}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/6}}(2-\xi)^{-1/6}\right)$。进一步化简得到

$$\Delta_{2\underline{e}^{\mathrm{i}\pi}}\overset{\nabla}{f}=-\mathrm{i}\overset{\nabla}{f}_{-}。$$

由此看出异形算子可以作用到更一般的情形,甚至是没有可积性假设的情形[10]。

2　模运算

本节介绍模的定义、基本性质,特别是对称模(symmetral mould)和交错模(altenal mould),以及若干重要例子。介绍了李理论中的Baker-Campbell-Hausdorff公式、鞍点-结点型奇点、向量场标准型和多重泽塔值(multiple zeta values,MZV)。关于模更多的性质、推广(特别是双模(bimould))和应用,见文献[10]的第一卷。

2.1　模代数

记$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$,$\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$,$\mathbb{K}$是一个特征为0的域。定义字母集$\mathcal{N}$,其中元素称为字母。非空集$\underline{\mathcal{N}}:=\{\underline{n}=n_1\cdots n_r|r\in\mathbb{N},n_1,\cdots,n_r\in\mathcal{N}\}$表示单词(或字符串)的集合,其每一个单词是由字母组成的有限序列,长度$r=r(\underline{n})$可以是任何非负整数。$\varnothing$表示唯一一个长度为0的单词,即空单词。

定义$(a_1\cdots a_r,b_1\cdots b_s)\in\underline{\mathcal{N}}\times\underline{\mathcal{N}}\mapsto a_1\cdots a_rb_1\cdots b_s\in\underline{\mathcal{N}}$为单词的联结(concatenation)。这个作用诱导出了$\underline{\mathcal{N}}$的幺半群(monoid)结构,其单位元是空单词$\varnothing$。

定义2.1　一个$\mathcal{N}$上的$\mathbb{K}$-值模是一个从$\underline{\mathcal{N}}$映到$\mathbb{K}$的函数。用$\mathbb{K}^{\underline{\mathcal{N}}}$表示所有模的集合。

给定一个模M,$M^{\underline{n}}$表示单词取为$\underline{n}$时这个模的值。如果一个模值在数域上,那么称为数量模。模的乘法定义为

$$(M\times N)^{\underline{n}}:=\sum_{(\underline{a},\underline{b})\mathrm{s.t.}\underline{n}=\underline{a}\,\underline{b}}M^{\underline{a}}N^{\underline{b}},\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}。\tag{19}$$

对$M,N\in\mathbb{K}^{\underline{\mathcal{N}}}$,当单词取为$n_1n_2$时,

$$(M\times N)^{n_1n_2}=M^{\varnothing}N^{n_1n_2}+M^{n_1}N^{n_2}+M^{n_1n_2}N^{\varnothing}。$$

可以得到$\mathbb{K}^{\underline{\mathcal{N}}}$是一个结合的$\mathbb{K}$-代数,当字母集$\mathcal{N}$中多于一个元素时此代数非交换。其单位元$\mathbf{1}$定义为

$$\mathbf{1}^{\underline{n}}=\begin{cases}1 & ,\underline{n}=\varnothing,\\ 0 & ,\underline{n}\neq\varnothing。\end{cases}$$

若对任意长度小于p的单词$\underline{n}$,模$M^{\underline{n}}$的值都为0,则称这个模的阶数$\geqslant p$,记为$\mathrm{ord}M\geqslant p$。当$\mathrm{ord}M\geqslant p$,$\mathrm{ord}N\geqslant q$时,$\mathrm{ord}(M\times N)\geqslant p+q$。特别地,如果$M^{\varnothing}=0$,则对任意$k\in\mathbb{N}^*$,有$\mathrm{ord}M^{\times k}\geqslant k$,因此模

$$\mathrm{e}^M:=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}M^{\times k},\log(\mathbf{1}+M):=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{k-1}}{k}M^{\times k}\tag{20}$$

都是良定义的,因为对每个$\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}$,只有有限项对$(\mathrm{e}^{M})^{\underline{n}}$或$(\log(\mathbf{1}+M))^{\underline{n}}$产生贡献。

模导子是$\mathbb{K}^{\underline{\mathcal{N}}}$上满足莱布尼兹法则的$\mathbb{K}$-线性算子$D$,即$D(M^{\cdot}\times N^{\cdot})=(DM^{\cdot})\times N^{\cdot}+M^{\cdot}\times(DN^{\cdot})$。

对任意$\varphi:\mathcal{N}\to\mathbb{K}$,定义模导子$D_{\varphi}$为

$$D_{\varphi}M^{\underline{n}}=\begin{cases}0, & \text{当 } \underline{n}=\varnothing,\\ (\varphi(n_1)+\cdots+\varphi(n_r))M^{\underline{n}}, & \text{当 } \underline{n}=(n_1,\cdots,n_r),\end{cases}$$

当$\varphi\equiv 1$时,有$DM^{\underline{n}}=r(\underline{n})M^{\underline{n}}$。当$\mathcal{N}$是一个交换子群时,定义非空单词的和为

$$\|\underline{n}\|=n_1+\cdots+n_r\in\mathcal{N},\ \underline{n}=(n_1,\cdots,n_r)\in\underline{\mathcal{N}}。$$

对任意满足$u^{\varnothing}=0$的模$U^{\cdot}$,定义了一个模导子$\nabla_{U^{\cdot}}$为$\nabla_{U^{\cdot}}M^{\underline{n}}=\sum_{\underline{n}=\underline{\alpha\beta\gamma},\ \underline{\beta}\neq\varnothing}U^{\underline{\beta}}M^{\underline{\alpha}\cdot\mathrm{l}\underline{\beta}\mathrm{l}\cdot\underline{\gamma}}$。

当$U^{\underline{n}}=\begin{cases}\varphi(n_1), & \underline{n}=(n_1)\\ 0, & r(\underline{n})\neq 1\end{cases}$时,前文介绍的模导子$D_{\varphi}$即是这里$\nabla_{U^{\cdot}}$的特殊情况。

当$\mathcal{N}\subset\mathbb{K}$,$\varphi(n)\equiv n$时可得一种重要的模导子$\nabla M^{\underline{n}}=\|\underline{n}\|M^{\underline{n}}$。另一方面,每个导子$d:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$也诱导出一个模导子$D$,在任意一个模$M^{\cdot}$上的作用定义为

$$DM^{\underline{n}}=d(M^{\underline{n}})。\tag{21}$$

当$\mathcal{N}$是一个交换群时,模之间的复合运算定义为

$$C^{\cdot}=M^{\cdot}\circ U^{\cdot}:\varnothing\mapsto C^{\varnothing}=M^{\varnothing}$$

$$\varnothing\neq\underline{n}\mapsto C^{\underline{n}}=\sum_{s\geqslant 1,\ \underline{n}^1,\cdots,\underline{n}^s\neq\varnothing,\ \underline{n}=\underline{n}^1\cdots\underline{n}^s}M^{(\mathrm{l}\underline{n}^1\mathrm{l},\cdots,\mathrm{l}\underline{n}^s\mathrm{l})}U^{\underline{n}^1},\cdots,U^{\underline{n}^s},$$

这里的求和是对将$\underline{n}$分解为非空单词的所有可能性进行的。在复合运算中,$\mathbf{1}^{\cdot}\circ U^{\cdot}=\mathbf{1}^{\cdot}$对任意模$U^{\cdot}$都成立。

复合运算的单位模定义为

$$I^{\cdot}:\underline{n}\mapsto I^{\underline{n}}=\begin{cases}1, & r(\underline{n})=1,\\ 0, & r(\underline{n})\neq 1。\end{cases}$$

事实上,对任意模$M^{\cdot}$都满足$M^{\cdot}\circ I^{\cdot}=M^{\cdot}$。一般情况下$I^{\cdot}\circ U^{\cdot}=U^{\cdot}-U^{\varnothing}\mathbf{1}^{\cdot}$,只在$U^{\varnothing}=0$时$I^{\cdot}\circ U^{\cdot}=U^{\cdot}$才成立。

接下来的讨论中,$\mathcal{N}$不一定总是交换群,所以模的复合不总是可以定义的。如果将$\mathcal{N}$是交换群这个条件替换为:如果一个模$M^{\cdot}$满足$M^{\underline{n}}$的值只依赖$r(\underline{n})$,那么复合运算仍是可定义的。在这类特殊的情况下,上述复合的性质仍适用。

2.2　模-余模展开

为了处理无限项展开,$\mathcal{A}$需是一个完备的滤子结合代数(filtered associative algebra),即存在一个阶数函数

$$\mathrm{ord}:\mathcal{A}\to\mathbb{N}\bigcup\{\infty\},$$

与求和、群作用都相容,这使得$\mathcal{A}$中每一族$(A_i)_{i\in I}$都是形式可求和的,即对每个$p\in\mathbb{N}$,除有限项外,所有A_i都满足阶数$\geqslant p$。接下来叙述一般结论时,将$\mathcal{A}$取为结合代数$\mathcal{A}[[t]]$,其阶数函数定义见定义1.1。此外,预设在$\mathcal{A}$中给定一族$(B_n)_{n\in\mathcal{N}}$使得所有B_n阶数都$\geqslant 1$,且对任意$p\in\mathcal{N}$,除有限项外,其余所有B_n阶数都$\geqslant p$。

定义2.2　称$B_{\varnothing}:=1_{\mathcal{A}}$,$B_{n_1,\cdots,n_r}:=B_{n_1}\cdots B_{n_r}$,$n_1,\cdots,n_r\in\mathcal{N}$为由$(B_n)_{n\in\mathcal{N}}$生成的结合余模(associative comould),记为$(B_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}}$。

引理2.3　映射

$$M\in\mathbb{K}^{\underline{\mathcal{N}}}\mapsto MB:=\sum_{\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}}M^{\underline{n}}B_{\underline{n}}\in\mathcal{A}\tag{22}$$

定义了结合代数的一个态射。式(22)右边称为模-余模展开。进一步有

$$M^{\varnothing}=0\Rightarrow(\mathrm{e}^{M})B=\mathrm{e}^{MB},$$

$$M^{\varnothing}=1\Rightarrow(\log M)B=\log(MB)。$$

例2.4　$\mathcal{A}$是一个结合代数,给定$X,Y\in\mathcal{A}$,取$\mathbb{K}=\mathbb{Q}$,$\mathcal{N}=\Omega:=\{x,y\}$是一个有2个字母的字母表,$\mathcal{A}=\mathcal{A}[[t]]$。考虑由$B_x:=tX,B_y:=tY$生成的结合余模。当$I_i\in\mathbb{Q}^{\underline{\Omega}}$,$i=x,y$定义为

$$I_i^{\underline{\omega}}:=\begin{cases}1, & \text{如果}\underline{\omega}\text{是单字母单词}i,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

时,有$tX=I_xB$和$tY=I_yB$。因此有$\mathrm{e}^{tX}=\mathrm{e}^{I_x}B$和$\mathrm{e}^{tY}=\mathrm{e}^{I_y}B$,同时可得$\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}=S_{\Omega}B$,其中$S_{\Omega}:=\mathrm{e}^{I_x}\times\mathrm{e}^{I_y}$,$\log(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY})=T_{\Omega}B$其中$T_{\Omega}:=\log S_{\Omega}$。由式(19)、(20)可得

$$S_{\Omega}^{\underline{\omega}}=\begin{cases}\dfrac{1}{p!\,q!}, & \text{如果}\underline{\omega}\text{形如}x^py^q,\text{其中}p,q\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$$

定义2.5　称$B_{[\varnothing]}:=0$且$B_{[n_1\cdots n_r]}:=\mathrm{ad}_{B_{n_1}}\cdots\mathrm{ad}_{B_{n_{r-1}}}B_{n_r}=[B_{n_1},[\cdots[B_{n_{r-1}},B_{n_r}]\cdots]]$为由$(B_n)_{n\in\mathcal{N}}$生成的李余模(Lie comould),记为$(B_{[\underline{n}]})_{\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}}$。定义模$M\in\mathbb{K}^{\underline{\mathcal{N}}}$的李余模展开为

$$M[B]:=\sum_{\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}\setminus\{\varnothing\}}\frac{1}{r(\underline{n})}M^{\underline{n}}B_{[\underline{n}]}\in\mathcal{A},$$

其中$r(\underline{n})$表示单词$\underline{n}$的长度。

2.3　对称模与交错模

定义$\underline{\mathcal{N}}$中的洗牌(shuffle)运算为:给定2个非空单词$\underline{n}^1=(n_1,\cdots,n_l)$,$\underline{n}^2=(n_{l+1},\cdots,n_r)$,如果单

词$\underline{n}$可由其通过置换σ而写成$(n_{\sigma(1)},\cdots,n_{\sigma(r)})$,且置换$\sigma$满足$\sigma(1)<\cdots<\sigma(l)$和$\sigma(l+1)<\cdots<\sigma(r)$,则称单词$\underline{n}$是单词$\underline{n}^1$与单词$\underline{n}^2$的一种洗牌,或者说$\underline{n}$是一个通过交错排列$\underline{n}^1$和$\underline{n}^2$中字母且保持$\underline{n}^1$与$\underline{n}^2$内在顺序得到的单词。用$\mathrm{sh}\binom{\underline{n}^1\ \underline{n}^2}{\underline{n}}$表示这种置换$\sigma$的数目,如果$\underline{n}$无法由$\underline{n}^1$与$\underline{n}^2$做洗牌运算得到,则令$\mathrm{sh}\binom{\underline{n}^1\ \underline{n}^2}{\underline{n}}=0$。

定义 2.6 若$M^{\varnothing}=0$,且对任意2个非空单词$\underline{n}^1,\underline{n}^2$有

$$\sum_{\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}}\mathrm{sh}\binom{\underline{n}^1\ \underline{n}^2}{\underline{n}}M^{\underline{n}}=0,$$

则称模$M\in\mathbb{K}^{\underline{\mathcal{N}}}$是交错的。若$M^{\varnothing}=1$,且对任意2个非空单词$\underline{n}^1,\underline{n}^2$有

$$\sum_{\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}}\mathrm{sh}\binom{\underline{n}^1\ \underline{n}^2}{\underline{n}}M^{\underline{n}}=M^{\underline{n}^1}M^{\underline{n}^2},$$

则称模$M\in\mathbb{K}^{\underline{\mathcal{N}}}$是对称的。

例 2.7 当$r(\underline{n})\neq1$时,任意满足$M^{\underline{n}}=0$的模都是交错的。例2.4中的I_x和I_y都是交错的。定义为$E^{\underline{n}}:=\dfrac{1}{r(\underline{n})!}$的模$E$是对称的。对任意$\underline{a},\underline{b}\in\underline{\mathcal{N}}$做洗牌运算一共会得到$\binom{r(\underline{a}\,\underline{b})}{r(\underline{a})}$个元素,所以$\sum_{\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}}\mathrm{sh}\binom{\underline{a}\,\underline{b}}{\underline{n}}E^{\underline{n}}=\dfrac{r(\underline{a}\,\underline{b})!}{r(\underline{a})!\,r(\underline{b})!}\dfrac{1}{r(\underline{a}\,\underline{b})!}=E^{\underline{a}}E^{\underline{b}}$。

对任意$\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}$,李余模与结合余模满足$B_{[\underline{n}]}=\sum_{(\underline{a},\underline{b})\in\underline{\mathcal{N}}\times\underline{\mathcal{N}}}(-1)^{r(\underline{b})}r(\underline{a})\,\mathrm{sh}\binom{\underline{a}\,\underline{b}}{\underline{n}}B_{\underline{\tilde{b}}\,\underline{a}}$,式中$\underline{\tilde{b}}:=b_s\cdots b_1$表示任意单词$\underline{b}=b_1\cdots b_s$翻转后的单词。由此关系和李模展开的定义,可得以下结论。

命题 2.8 如果M是一个交错模,那么$M[B]=MB$,即

$$\sum\nolimits_{\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}\setminus\{\varnothing\}}\frac{1}{r(\underline{n})}M^{\underline{n}}B_{[\underline{n}]}=\sum_{\underline{n}\in\underline{\mathcal{N}}}M^{\underline{n}}B_{\underline{n}}。$$

因为任意交错模只需要利用B_n的交换子就可以写成李模展开,由此命题可知其属于由B_n生成的$\mathcal{A}$的子李代数。下面的命题给出了模代数的性质。

命题 2.9 2个对称模的乘积是对称的;对称模取对数得到的模是交错的;交错模取指数得到的模是对称的。

例 2.10 由例2.7知模I是交错的,故命题2.9知e^I是对称模。

2.4 应用一:Baker-Campbell-Hausdorff公式

关于Baker-Campbell-Hausdorff公式有下面2个定理。

定理 2.11 令$X,Y\in\mathcal{A},\Psi=\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\in\mathcal{A}[[t]]$,则$\log\Psi\in\mathrm{Lie}(X,Y)$,其中$\mathrm{Lie}(X,Y)$是$\mathcal{A}$中由$X,Y$生成的李代数。

证明 由$\Omega=\{x,y\},B_x=tX,B_y=tY$即例2.4知$\log\Psi=T_\Omega B$,其中$T_\Omega=\log S_\Omega$,$S_\Omega=\mathrm{e}^{I_x}\times\mathrm{e}^{I_y}$。因为$I_x$与$I_y$都是交错的,则其乘积是对称的。由命题2.9知模$S_\Omega$是对称的,$T_\Omega$是交错的。由命题2.8得

$$\log\Psi=T_\Omega[B]。\tag{23}$$

即$\log\Psi\in\mathrm{Lie}(X,Y)$。

定理 2.12 在上述情形下,$\log\Psi=\sum\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\dfrac{t^\sigma}{\sigma}\dfrac{[X^{p_1}Y^{q_1}\cdots X^{p_k}Y^{q_k}]}{p_1!\,q_1!\cdots p_k!\,q_k!}$,其中求和是对所有$k\in\mathbb{N}^*$且$(p_1,q_1),\cdots,(p_k,q_k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{(0,0)\}$,$\sigma:=p_1+q_1+\cdots+p_k+q_k$,

$$[X^{p_1}Y^{q_1}\cdots X^{p_k}Y^{q_k}]:=\begin{cases}\mathrm{ad}_X^{p_1}\mathrm{ad}_Y^{q_1}\cdots\mathrm{ad}_X^{p_k}\mathrm{ad}_Y^{q_k-1}Y, & \text{若}q_k\geqslant1,\\ \mathrm{ad}_X^{p_1}\mathrm{ad}_Y^{q_1}\cdots\mathrm{ad}_X^{p_{k-1}}X, & \text{若}q_k=0。\end{cases}$$

证明 由$T_\Omega^{\underline{\omega}}$的定义知,对任意单词$\underline{\omega}$,有$T_\Omega^{\underline{\omega}}=\sum_{k\geqslant1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{\underline{\omega}^1,\cdots,\underline{\omega}^k\in\underline{\Omega}\setminus\{\varnothing\},\underline{\omega}=\underline{\omega}^1\cdots\underline{\omega}^k}S_\Omega^{\underline{\omega}^1}\cdots S_\Omega^{\underline{\omega}^k}$。由式(23)有

$$\log\Psi=\sum_{k\geqslant1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{\underline{\omega}^1,\cdots,\underline{\omega}^k\in\underline{\Omega}\setminus\{\varnothing\}}\frac{1}{r(\underline{\omega}_1)+\cdots+r(\underline{\omega}_k)}\cdot S_\Omega^{\underline{\omega}^1}\cdots S_\Omega^{\underline{\omega}^k}B_{[\underline{\omega}^1\cdots\underline{\omega}^k]},$$

则结论显然可得。

若字母表取为$\mathcal{N}:=\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$,$\mathbb{K}:=\mathbb{Q}$,利用模运算可得如下定理。

定理 2.13[28] 令$X,Y\in\mathcal{A}$,满足定理2.11中条件,则$\Psi=\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}$可写为

$$\Psi=1_{\mathcal{A}}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n_1,\cdots,n_r=1}^{\infty}\frac{1}{n_r(n_r+n_{r-1})\cdots(n_r+\cdots+n_1)}D_{n_1}\cdots D_{n_r}。\tag{24}$$

其中,对任意$n\geqslant1$,

$$D_n:=\frac{t^n}{(n-1)!}\mathrm{ad}_x^{n-1}(X+Y)。\tag{25}$$

证明 因为$\Psi=\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}$是$\mathcal{A}[[t]]$中唯一满足

条件

$$\Psi|_{t=0}=1_{\mathcal{A}},\ t\partial_t\Psi=D\Psi \tag{26}$$

的元素,式(26)中$\mathcal{N}\coloneqq\mathbb{N}^*$时,$D\coloneqq te^{tX}(X+Y)e^{-tX}$。利用阿达玛引理有$D=\sum_{n\in\mathcal{N}}D_n=ID$。

引理2.14　对任意模$S\in\mathbb{Q}^{\mathcal{N}}$,$t\partial_t(SD)=(\nabla S)D$,$(\nabla S)^{n_1\cdots n_r}\coloneqq(n_1+\cdots+n_r)S^{n_1\cdots n_r}$,$n_1\cdots n_r\in\underline{\mathcal{N}}$。

若如果能找到$S\in\mathbb{Q}^{\mathcal{N}}$是模方程

$$S^{\varnothing}=1,\nabla S=IS \tag{27}$$

的解,就可以找到(26)形如$\Psi=SD$的模展开形式的解。式(27)的第2式有唯一解

$$S_{\mathcal{N}}^{n_1\cdots n_r}\coloneqq\frac{1}{n_r(n_r+n_{r-1})\cdots(n_r+\cdots+n_1)},\forall n_1\cdots n_r\in\underline{\mathcal{N}}。$$

这说明$S_{\mathcal{N}}$是式(27)的解,因此$S_{\mathcal{N}}D$是式(26)的解,有$S_{\mathcal{N}}D=\Psi=e^{tX}e^{tY}$。这就证明了定理中的等式(24)。因为$S_{\mathcal{N}}$是对称模,所以$\log S_{\mathcal{N}}$是交错模,因此可以将$e^{tX}e^{tY}$的导子$\log(e^{tX}e^{tY})$写成交错的李模展开。

推论2.15　令$T_{\mathcal{N}}\coloneqq\log S_{\mathcal{N}}\in\mathbb{Q}^{\mathcal{N}}$,沿用定理2.1中各记号,有$\log\Psi=T_{\mathcal{N}}[D]$即$\log(e^{tX}e^{tY})=\sum_{r\geqslant1}\sum_{n_1,\cdots,n_r=1}^{\infty}\frac{1}{r}T_{\mathcal{N}}^{n_1\cdots n_r}[D_{n_1},[\cdots[D_{n_{r-1}},D_{n_r}]\cdots]]$。

至此利用模运算给出了李理论中几个基本公式的统一证明,利用模运算可以进一步将$\Psi=e^{tX_1}\cdots e^{tX_N}\in\mathcal{A}[[t]]$这种任意多个因子的乘积进行展开。

定理2.16[29]　$\mathcal{A}$是结合代数,$X_1,\cdots,X_N\in\mathcal{A}$,$N\geqslant2$。令$\mathbb{N}_*^N\coloneqq\{p\in\mathbb{N}^N|p_1+\cdots+p_N\geqslant1\}$,有

$$\log\Psi=\sum\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{t^{\sigma}}{\sigma}\frac{[X_1^{p_1^1}\cdots X_N^{p_N^1}\cdots X_1^{p_1^k}\cdots X_N^{p_N^k}]}{p_1^1!\cdots p_N^1!\cdots p_1^k!\,p_N^k!}。$$

其中求和是对所有$k\in\mathbb{N}^*,p^1,\cdots,p^k\in\mathbb{N}_*^k$,式中$\sigma\coloneqq\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N}p_j^i$,括号定义与定理2.12中一样。

对$\Psi=e^{tX_1}\cdots e^{tX_N}$利用模展开,上述定理可叙述如下。

定理2.17[29]　在上述条件下,$\Psi=e^{tX_1}\cdots e^{tX_N}$可以写为

$$\Psi=1_{\mathcal{A}}=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n_1,\cdots,n_r=1}^{\infty}\frac{1}{n_r(n_r+n_{r-1})\cdots(n_r+\cdots+n_1)}\mathcal{D}_{n_1}\cdots\mathcal{D}_{n_r},$$

其中,对任意$n\geqslant1$,

$$\mathcal{D}_n\coloneqq t^n\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{m_1,\cdots,m_{j-1}\in\mathbb{N},\\ m_1+\cdots+m_{j-1}=n-1}}\frac{\mathrm{ad}_{X_1}^{m_1}\cdots\mathrm{ad}_{X_{N-1}}^{m_{N-1}}}{m_1!\cdots m_{N-1}!}X_N。$$

2.5　应用二:鞍点-结点型奇点

2.5.1　背景

考虑解析微分方程的鞍点-结点(saddle-node)型奇点的形式分类。当一个微分方程$B(x,y)\mathrm{d}y-A(x,y)\mathrm{d}x=0$,其中$A(x,y),B(x,y)\in\mathbb{C}\{x,y\}$,原点是奇点(即$A(0,0)=B(0,0)=0$),且其1-截(jet)特征值为0和1时,可以形式共轭到$x^{p+1}\mathrm{d}y-(1+\lambda x)y\mathrm{d}x=0$($p\in N^*,\lambda\in\mathbb{C}$)或$y\mathrm{d}x=0$,称可以共轭到前一类的是鞍点-结点型奇点。当$p=1,\lambda=0$时是标准的鞍点-结点型叶状结构。对这类奇点分类等价于对相应的复二维向量场进行分类,接下来研究的对象是复二维向量场上的芽,其形如

$$\boldsymbol{X}=x^2\frac{\partial}{\partial x}+A(x,y)\frac{\partial}{\partial y},\text{其中}A(x,y)\in\mathbb{C}\{x,y\}。 \tag{28}$$

假设

$$A(0,y)=y,\ \frac{\partial^2A}{\partial x\partial y}(0,0)=0, \tag{29}$$

式(29)保证了利用Dulac标准型理论$\boldsymbol{X}$可以形式共轭到标准型

$$\boldsymbol{X}_0=x^2\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}。 \tag{30}$$

这即是标准的鞍点-结点型叶状结构对应的向量场。在标准型理论中找到$\boldsymbol{X}$共轭到的标准型$\boldsymbol{X}_0$后,接下来使$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{X}_0$共轭的形式变换,即寻找共轭方程

$$\boldsymbol{X}=\theta^*\boldsymbol{X}_0$$

的形式微分同胚解θ。由$\boldsymbol{X}$的表达式能找到唯一的形如

$$\theta(x,y)=(x,\varphi(x,y)),$$
$$\varphi(x,y)=y+\sum_{n\geqslant0}\varphi_n(x)y^n,\varphi_n(x)\in x\mathbb{C}[[x]]$$

的形式解θ。当对θ做复现分析时,首先证明形式级数φ_n关于变量$z=\frac{1}{x}$是复现的,这就是接下来要利用模证明的结论。

2.5.2　鞍点型奇点的模-余模展开

解析向量场$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{X}_0$可看做代数$\mathbb{C}\{x,y\}$上的导子,由于考虑形式共轭,所以将这2个向量场看做$\mathbb{C}[[x,y]]$上的导子。先将问题转化为代数上的算子进行考虑。因为共轭方程可写为$\boldsymbol{X}f=[X_0(f\circ\theta)]\circ\theta^{-1},f\in\mathbb{C}[[x,y]]$,所以问题转化为找$\mathbb{C}[[x,y]]$上的连续自同构$\Theta$,使得对任意$f$,都有$\Theta(\boldsymbol{X}f)=\boldsymbol{X}_0(\Theta f)$,即

$$\Theta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0\Theta。 \tag{31}$$

构造式(31)解的思路是从$\boldsymbol{X}$展开项各项着手。利用泰勒展开,

$$A(x,y)=y+\sum_{n\in\mathcal{N}}a_n(x)y^{n+1},\text{ 其中}$$
$$\mathcal{N}:=\{n\in\mathbb{Z}|n\geqslant -1\},$$

有

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+\sum_{n\in\mathcal{N}}a_n(x)B_n,\quad B_n=y^{n+1}\frac{\partial}{\partial y},\quad(32)$$

其中$a_n(x)\in x\mathbb{C}\{x\},a_0(x)\in x^2\mathbb{C}\{x\}$。将余模取为$B_\varnothing=\mathrm{Id},\quad B_{\omega_1,\cdots,\omega_r}=B_{\omega_r}\cdots B_{\omega_1}$, 其中$\omega_1,\cdots,\omega_r\in\mathcal{N}$,

$$(33)$$

接下来要找的方程(31)的自同构解Θ是一个模-余模展开,形式为

$$\Theta=\sum_{r\geqslant 0}\sum_{\omega_1,\cdots,\omega_r\in\mathcal{N}}\mathcal{V}^{\omega_1,\cdots,\omega_r}(x)B_{\omega_1,\cdots,\omega_r},\quad(34)$$

这里唯一一个$r=0$的项是$\mathcal{V}^\varnothing B_\varnothing$,其中$\mathcal{V}^\varnothing$取为1,系数$\mathcal{V}^{\omega_1,\cdots,\omega_r}(x)\in x\mathbb{C}[[x]]$由$\{a_n,n\in\mathcal{N}\}$的信息来决定,须同时满足以下3点:

(1)算子(34)是$\mathbb{C}[[x,y]]$上收敛的形式级数且在Krull拓扑下连续。此处Krull拓扑可类似1.1.1中定义。

(2)算子Θ是代数自同构。

(3)算子Θ满足共轭方程(31)。

将Θ简记为$\Theta=\sum\mathcal{V}^{\cdot}B_{\cdot}$。式(32)可以写成$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0=\sum J_a^{\cdot}B_{\cdot}$,其中

$$J_a^\omega=\begin{cases}a_{n_1}, & \text{若 }\omega=(n_1),\\ 0, & \text{若 }r(\omega)\neq 1。\end{cases}$$

则共轭方程(31)等价于

$$\Theta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0)=[\boldsymbol{X}_0,\Theta]。\quad(35)$$

关于$[X_0,\Theta]$有下面结论。

引理2.18 令$\mathcal{V}^{\cdot}$是使得$(\mathcal{V}^{\cdot}B_{\cdot})$在$\mathcal{F}$中形式收敛的模,那么

$$[\boldsymbol{X}_0,\sum\mathcal{V}^{\cdot}B_{\cdot}]=\sum(x^2\partial_x\mathcal{V}+\nabla\mathcal{V}^{\cdot})B,$$

其中$\nabla\mathcal{V}^\varnothing=0$且当$\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_r)$非空时$\nabla\mathcal{V}^\omega=(n_1+\cdots+n_r)\mathcal{V}^\omega$。

寻找方程(35)形如$\Theta=\sum\mathcal{V}^{\cdot}B_{\cdot}$的解就转化为解模方程

$$x^2\partial_x\mathcal{V}^{\cdot}+\nabla\mathcal{V}^{\cdot}=J_a^{\cdot}\times V^{\cdot}。\quad(36)$$

则有如下引理。

引理2.19 方程(36)有唯一解$\mathcal{V}^{\cdot}$满足$\mathcal{V}^\varnothing=1$且对任意非空单词$\omega\in\mathcal{N}^*$,有$\mathcal{V}^\omega\in x\mathbb{C}[[x]]$,更进一步

$$\mathcal{V}^{n_1,\cdots,n_r}\in x^{\lceil r/2\rceil}\mathbb{C}[[x]],$$

其中记号$\lceil s\rceil$表示$\geqslant$实数s的最小整数。

利用引理的结论证明$(\mathcal{V}^\omega B_\omega)$具有形式收敛性。令$\Theta=\sum\mathcal{V}^{\cdot}B_{\cdot}$,得到了共轭方程(31)的一个解,且$\Theta$是$\mathcal{A}$上的连续算子。可由归纳法证明如下引理。

引理2.20 引理2.19定义的模是一个对称模。

由此即可推知Θ为代数自同构。$\varphi(x,y)$中的每一项系数$\varphi_n(x)$都可以通过计算得到,利用归纳法有$B_\omega y^{n_1+\cdots+n_r+1},\omega=(n_1,\cdots,n_r),r\geqslant 1$。当$r=1$时,$\beta_\omega=1$,当$r\geqslant 2$时,$\beta_\omega=(n_1+1)(n_1+n_2+1)\cdots(n_1+\cdots+n_{r-1}+1)$。当$n_1+\cdots+n_r\leqslant -2$时,$\beta\omega=0$。所以

$$\varphi(x,y)=\Theta y=y+\sum_{n\geqslant 0}\varphi_n(x)y^n,\varphi_n=\sum_{r\geqslant 1,\omega\in\mathcal{N}^r,\atop n_1+\cdots+n_r+1=n}\beta_\omega\mathcal{V}^\omega。$$

类似地,若利用对称模的逆来定义$\mathcal{V}^{\cdot}$的逆为$\mathcal{V}^{\cdot},\Theta^{-1}=\sum\mathcal{V}^{\cdot}B_{\cdot}$的作用为

$$\psi(x,y)=\Theta^{-1}y=y+\sum_{n\geqslant 0}\psi_n(x)y^n,$$

其中每个系数都可以写成形式收敛级数$\psi_n=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\beta_\omega\mathcal{V}^\omega$。解模方程得到的$\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$表达式与通常情况下待定系数得到的表达式不同。这个写法的优势是可以在变量取为$z=-\frac{1}{x}$时证明问题中的所有形式级数都是复现的。当$\omega=(n_1,\cdots,n_r),r\geqslant 1$时,$\tilde{\mathcal{V}}^\omega$满足的等式为$(\partial+n_1+\cdots+n_r)\tilde{\mathcal{V}}^{n_1,\cdots,n_r}=\tilde{a}_{n_1}\tilde{\mathcal{V}}^{n_2,\cdots,n_r}$。

收敛级数$\tilde{a}_n(z)=a_n(-\frac{1}{z})$的波雷尔变换是整函数$\hat{a}_n(\zeta)$,做波雷尔变换后算子$\partial=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$变成乘以$-\zeta$,则$\hat{\mathcal{V}}^\omega(\zeta)$可以逐项写出

$$\hat{\mathcal{V}}^{n_1}(\zeta)=-\frac{1}{\zeta-n_1}\hat{a}_{n_1}(\zeta),$$
$$\hat{\mathcal{V}}^{n_1,n_2}(\zeta)=\frac{1}{\zeta-(n_1+n_2)}(\hat{a}_{n_1}*\hat{\mathcal{V}}^{n_2}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\hat{\mathcal{V}}^{n_1,n_2,\cdots,n_r}=(-1)^r\frac{1}{\zeta-\hat{n}_1}(\hat{a}_{n_1}*(\frac{1}{\zeta-\hat{n}_2}*$$
$$(\cdots(\frac{1}{\zeta-\hat{n}_r}\hat{a}_{n_r})\cdots))),$$

其中$\hat{n}_i=n_i+\cdots+n_r$。因为$\hat{a}_{n_i}$都是关于ζ的整函数,所以函数$\hat{\mathcal{V}}^{n_1,n_2,\cdots,n_r}$除了在$\hat{n}_1,\cdots,\hat{n}_r$处可能有奇

点外是全纯的。$\mathscr{V}^{n_1,n_2,\cdots,n_r}$也可得到相同结论。由此可以证明全纯函数组成的级数$\hat{\varphi}_n=\sum_{n_1+\cdots+n_r+1=n}\beta_\omega\hat{\mathscr{V}}^\omega$与$\hat{\psi}_n=\sum_{n_1+\cdots+n_r+1=n}\beta_\omega\hat{\mathscr{V}}^\omega$是一致收敛的,即形式幂级数$\hat{\varphi}_n$和$\hat{\psi}_n$关于变量$z=-\frac{1}{x}$是复现的。

对鞍点-结点问题做复现分析能得到以下结论。

定理2.21[30]　$\theta(x,y)=(x,y+\sum_{n\geqslant 0}\varphi_n(x)y^n)$表示共轭到标准型的形式变换,转化成算子问题后为$\Theta=\sum\mathscr{V}^{\cdot}B_{\cdot}$。令$\theta^{-1}(x,y)$表示形式变换的逆变换。则对任意$n\in\mathbb{N}$,形式级数$\tilde{\varphi}_n(z)=\varphi_n(-\frac{1}{z})$和$\tilde{\psi}_n(z)=\psi_n(-\frac{1}{z})$属于$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{Z}}$,且形式波雷尔变换$\hat{\varphi}_n(\zeta),\hat{\psi}_n(\zeta)\in\mathbb{C}\{\zeta\}$的解析延拓满足:

(1)$\hat{\varphi}_n$解析延拓的所有分支在$n+\mathbb{N}=\{n,n+1,n+2,\cdots\}$处正则。

(2)$\hat{\psi}_n$解析延拓的所有分支在$-\mathbb{N}^*=\{-1,-2,-3,\cdots\}$处正则,唯一例外的是$\hat{\psi}_0$的分支可能在$-1$处有简单奇点。

(3)给定$\rho\in\,]0,\frac{1}{2}[$和$N\in\mathbb{N}^*$,那么存在只依赖ρ、N的正常数K、L、C,使得对任意$(\rho,N,n-\mathbb{N}^*)$-容许(adapted),从原点出发且无限长的路径γ和任意$t\geqslant 0$有

$|\hat{\varphi}_n(\gamma(t))|\leqslant KL^n\mathrm{e}^{(n^2+1)Ct}$对任意$t\geqslant 0,n\in\mathbb{N}$。

对任意$(\rho,N,\mathbb{N}^*)$-容许,从原点出发且无限长的路径γ和任意$t\geqslant 0$有

$$|\hat{\psi}_n(\gamma(t))|\leqslant KL^n\mathrm{e}^{Ct},\text{当}n\geqslant 1,$$
$$|(\gamma(t)+1)\hat{\psi}_0(\gamma(t))|\leqslant K\mathrm{e}^{Ct},$$

其中$\tilde{R}_{\mathbb{Z}}$和容许定义详见文献[88]。

定理2.22　令$\Omega\in\mathbb{Z},a=(\hat{a}_\eta)_{\eta\in\Omega}$是一族整函数,若$0\in\Omega$,则假设$\hat{a}_0(0)=0$。令$\tilde{a}_\eta=\mathcal{B}^{-1}\hat{a}_\eta\in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$。对任意$m\in\mathbb{Z}^*$,用$\Delta_m$表示$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{simp}}$上指数为$m$的异形导数,模导子由式(21)定义,则存在一个满足

$$\Delta_m\tilde{\mathscr{V}}_a=\tilde{\mathscr{V}}_a^{\cdot}\times V_a^{\cdot}(m),\Delta_m\tilde{\mathscr{V}}_a^{\cdot}=-V_a^{\cdot}(m)\times\tilde{\mathscr{V}}_a^{\cdot}$$

的数量值交错模$V_a^{\cdot}(m)$。更进一步,如果$\omega\in\Omega^{\cdot}$非空,那么$\|\underline{\omega}\|\neq m\Rightarrow V_a^{\cdot}(m)=0$。

接下来计算$V_a^{\cdot}(m)$。在波雷尔平面上,当$r(\underline{\omega})=0$时,因为$\hat{\mathscr{V}}_a^{\varnothing}=\hat{\mathscr{V}}_a^{\varnothing}=\delta$,则有

$$\Delta_m\hat{\mathscr{V}}_a^{\varnothing}=\Delta_m\hat{\mathscr{V}}_a^{\varnothing}=0。$$

当$r(\underline{\omega})=1$时,对亚纯函数$\hat{\mathscr{V}}_a^{\omega_1}(\zeta)=-\hat{\mathscr{V}}_a^{\omega_1}(\zeta)=-\frac{\hat{a}_{\omega_1}(\zeta)}{\zeta-\omega_1}$计算留数,得到$\hat{\mathscr{V}}$

$$\Delta_m\hat{\mathscr{V}}_a^{\omega_1}=-\Delta_m\hat{\mathscr{V}}_a^{\omega_1}=V_a^{\omega_1}(m)\delta。$$

将$V_a^{\omega_1}(m)$显式写出,有$\omega_1=m\Rightarrow V_a^{\omega_1}(m)=-2\pi\mathrm{i}\hat{a}_m(m),\omega_1\neq m\Rightarrow V_a^{\omega_1}(m)=0$。

当$r(\underline{\omega})\geqslant 2$时,通过关系式

$$\Delta_m\hat{\mathscr{V}}_a^{\underline{\omega}}=V_a^{\underline{\omega}}(m)\delta+\sum_{i=1}^{r-1}V_a^{\omega_{i+1},\cdots,\omega_r}(m)\hat{\mathscr{V}}_a^{\omega_1,\cdots,\omega_i},$$

$$\Delta_m\hat{\mathscr{V}}_a^{\underline{\omega}}=-V_a^{\underline{\omega}}(m)\delta-\sum_{i=1}^{r-1}V_a^{\omega_1,\cdots,\omega_i}(m)\hat{\mathscr{V}}_a^{\omega_{i+1},\cdots,\omega_r},$$

可以将$V_a^{\underline{\omega}}(m)$写成多重积分的形式

$$V_a^{\underline{\omega}}(m)=-2\pi\mathrm{i}\sum_{\varepsilon\in\{+,-\}^{m-1}}\frac{p_\varepsilon!\,q_\varepsilon!}{|m|!}\int_{\Gamma_\varepsilon}\hat{a}_{\omega_r}(m-\zeta_{r-1})\cdot\frac{\hat{a}_{\omega_r}(\zeta_{r-1}-\zeta_{r-2})}{\zeta_{r-1}-\overset{\vee}{\omega}_{r-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\hat{a}_{\omega_2}(\zeta_2-\zeta_1)}{\zeta_2-\overset{\vee}{\omega}_2}\cdot\frac{\hat{a}_{\omega_1}(\zeta_1)}{\zeta_1-\overset{\vee}{\omega}_1}\mathrm{d}\zeta_1\cdots\mathrm{d}\zeta_{r-1}。$$

其中$m=\|\underline{\omega}\|,\Gamma_\varepsilon$定义详见文献[30]。

当$\Omega\subset\mathbb{Z}^*$且对任意$\eta\in\Omega,\tilde{a}_\eta=z^{-1}$时,由于每一个$\hat{a}_\eta$变成了值为1的常值函数,上式可以简化为

$$\|\underline{\omega}\|=m\Rightarrow V_a^{\underline{\omega}}(m)=-2\pi\mathrm{i}\sum_{\varepsilon\in\{+,-\}^{m-1}}\frac{p_\varepsilon!\,q_\varepsilon!}{|m|!}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\zeta_1\cdots\mathrm{d}\zeta_{r-1}}{(\zeta_1-\overset{\vee}{\omega}_1)\cdots(\zeta_{r-1}-\overset{\vee}{\omega}_{r-1})}。$$

在这种情况下,$V_a^{\underline{\omega}}(m)$的值与多重对数函数有关,这个模Écalle称之为典则超对数模(canonical hyperlogarithmic mould)。

下面介绍鞍点-结点问题的联结方程,由此给出鞍点-结点型向量场的分类定理。

命题2.23　对任意$m\in\mathbb{Z}^*$,定义$(\beta_{\underline{\omega}}V_a^{\underline{\omega}}(m))_{\underline{\omega}\in\Omega^{\cdot},\|\underline{\omega}\|=m}$这一族复数的和为

$$C_m=\sum_{\underline{\omega}\in\Omega^{\cdot},\|\underline{\omega}\|=m}\beta_{\underline{\omega}}V_a^{\underline{\omega}}(m),m\in\mathbb{Z}^*,$$

那么当$m\leqslant -2$时,$C_m=0$。

将复数$C_{-1},C_1,C_2,\cdots,C_m,\cdots$称为向量场$\boldsymbol{X}$的Écalle不变量,有如下定理。

定理2.24[30]　形式级数$\tilde{\varphi}_n(z)$和$\tilde{\psi}_n(z)$都是简单复现函数,因此$\tilde{\varphi}(z,y)$和$\tilde{\psi}(z,y)$属于$\tilde{R}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{simp}}[[y]]$对任意$m\in\mathbb{Z}^*$上的形式级数$\Delta_m\tilde{\varphi}:=\sum_{n\geqslant 0}(\Delta_m\tilde{\varphi}_n)y^n$,$\Delta_m\tilde{\psi}:=\sum_{n\geqslant 0}(\Delta_m\tilde{\psi}_n)y^n$。可以由下式给出

$$\Delta_m\tilde{\varphi}=C_m y^{m+1}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y},\quad \Delta_m\tilde{\psi}=-C_m\tilde{\psi}^{m+1}。\tag{37}$$

方程(37)是鞍点-结点问题联结方程的等价形式之一,联结方程的意思是这个等式将异形导数与通常意义下的微分算子联系起来。利用常微分算子$\mathcal{C}(m)=C_m y^m\frac{\partial}{\partial y}$将方程(37)改写成

$$\Delta_m\tilde{\varphi}=\mathcal{C}(m)\tilde{\varphi}=\mathcal{C}(m)\tilde{\Theta}y,\Delta_m\tilde{\psi}=-\tilde{\Theta}^{-1}\mathcal{C}(m)y$$

的形式后可以更清晰地看到联结方程的形式。也可以继续改写成下式这样等式左边只有算子$\tilde{\Theta}$或$\tilde{\Theta}^{-1}$和异形导数Δ_m,等式右边只有$\mathcal{C}(m)$,且更对称的联结方程

$$[\Delta_m,\tilde{\Theta}]=\mathcal{C}(m)\tilde{\Theta},\ [\Delta_m,\tilde{\Theta}^{-1}]=-\tilde{\Theta}^{-1}\mathcal{C}(m)。\tag{38}$$

接下来解释C_m为什么是向量场$\boldsymbol{X}$的解析不变量。假设给定2个满足式(28)和(29)的鞍点-结点型向量场$\boldsymbol{X}_1$和$\boldsymbol{X}_2$,且二者均与标准型$\boldsymbol{X}_0$共轭,因此其之间也形式共轭,用算子$\Theta_i,i=1,2$分别表示其与$\boldsymbol{X}_0$形式共轭的算子,那么有

$$\Theta\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_2\Theta,\quad \Theta=\Theta_2^{-1}\Theta_1,$$

其中Θ是由θ诱导的$\boldsymbol{X}_1$与$\boldsymbol{X}_2$间的共轭算子,

$$\theta:(x,y)\mapsto(x,\varphi(x,y)),$$
$$\varphi(x,y)=\Theta y=\varphi_1(x,\varphi_2(x,y))。$$

利用式(63)可以证明当变量取为$z=-\frac{1}{x}$时,

$$[\Delta_m,\tilde{\Theta}]=\tilde{\Theta}_2^{-1}(\mathcal{C}_1(m)-\mathcal{C}_2(m))\tilde{\Theta}_1,\quad m\in\mathbb{Z}^*,$$

$$(Taa)^{\omega_1\cdots\omega_r}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{r-1}}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)\cdots(\omega_1+\cdots+\omega_{r-1})},& \omega_1+\cdots+\omega_r=0,(\omega_1+\cdots+\omega_{r-1})\cdots(\omega_1+\omega_2)\omega_1\neq0,\\ 0,& 其他。\end{cases}$$

同时$\Theta=\sum\mathrm{Scarr}^{\cdot}B_{\cdot}$,可以由一个模-余模展开唯一确定,这里$\mathrm{Scarr}^{\cdot}$是一个由关于模的方程组确定的对称模,有兴趣的读者可参考文献[31]。

$$\mathrm{Sa}^{\omega_1\cdots\omega_r}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{r}}{\omega_1(\omega_1+\omega_2)\cdots(\omega_1+\cdots+\omega_r)},& (\omega_1+\cdots+\omega_r)\cdots(\omega_1+\omega_2)\omega_1\neq0,\\ 0,& 其他。\end{cases}$$

2.7 应用四:模和多重泽塔值

给定$k\geqslant0$和数组$s=(s_1,s_2,\cdots,s_k),(s_i\geqslant1)$,多重泽塔值为如下定义的值

$$\zeta(s):=\sum_{n_1>\cdots>n_k>0}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_k^{s_k}},$$

当$k\geqslant1$时,上式收敛当且仅当$s_1\geqslant2$;$k=1$时这就是经典黎曼ζ-函数。MZV有迭代积分表示,如无理数$\zeta(3)$可以写成$\zeta(3)=\iiint_{0<x<y<z<1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1-x)yz}$,是多重对数函数(polylogarithm)在1处的值。MZV和多重对数函数出现在数论、代数几何、周期理论、动机理论、德林费尔德结合子(Drinfeld associator)、纽结理论、形变量子化、摄动化量子场论中费曼图对应积分、共形场论、重整化群等领域,其在数学中的地位近乎常见的数学常数如π、e等[32-33]。

其中$\mathcal{C}_i(m)=C_{i,m}y^{m+1}\frac{\partial}{\partial y}$是每个$\boldsymbol{X}_i$对应联结方程(38)右边出现的微分算子。如果$\boldsymbol{X}_1$与$\boldsymbol{X}_2$解析共轭,那么二者间的变换$\theta(x,y)$可以由收敛级数给出,因此$\tilde{\varphi}$的所有异形导数都为0,且对任意$m$,有$\mathcal{C}_1(m)=\mathcal{C}_2(m)$,从而$\varphi_1(x,\varphi_2(x,y))$收敛。得到以下定理。

定理2.25[30] 2个满足式(28)和(29)的鞍点-结点型向量场相互解析共轭当且仅当其联结方程(37)具有相同的系数$(C_m)_{m\in\mathbb{Z}^*}$。

这说明了C_m是向量场$\boldsymbol{X}$的解析不变量。

2.6 应用三:模理论与线性标准型

Écalle用模理论给出了满足共轭方程(31)中Θ存在性的等价条件,也可以解释为将方程通过恰当的坐标变换写为线性标准型的等价条件。与鞍点-结点型方程讨论略有不同的是,此处所选取的标准型类型是线性的,而前文的标准型$\boldsymbol{X}_0$(式(30))并不是线性的。关于本小节介绍的相关结论,详情参见文献[31]。对于向量场$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{lin}}+\sum B_{\cdot}$,其中线性标准型为$\boldsymbol{X}^{\mathrm{lin}}=\sum\lambda_i x_i\partial_{x_i},\lambda_i\in\mathbb{C},B_\omega$是齐次算子(式(33))。在这些假设下,叙述如下定理。

定理2.26 如果系统的向量场$\boldsymbol{X}$是共振(resonant)的,那么存在坐标变换Θ使得$\Theta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{lin}}\Theta\Leftrightarrow\boldsymbol{X}^{aa}=0$,其中$\boldsymbol{X}^{aa}=\sum(Taa)^{\cdot}B_{\cdot}$,这里$Taa$是一个模(既不是对称的也不是交错的)。

如果向量场是非共振的,总存在坐标变换Θ使得$\Theta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{lin}}\Theta$,并且$\Theta$具有模-余模展开表达式$\Theta=\sum\mathrm{Sa}^{\cdot}B_{\cdot}$,这里对称模$\mathrm{Sa}^{\cdot}$具有如下形式

Écalle、Zagier、Goncharov、Brown等数学家深入探讨了MZV之间的关系,发现MZV构成的空间具有丰富的代数结构(李代数、霍普夫代数、洗牌代数等),并提出了若干有趣的猜想。文献中有几种不同的方式来研究MZV,本文仅给出Écalle基于模理论的方式,希望引起读者对这一方法的关注。尽管Écalle使用了一套独特的学术语言而使得其著作晦涩难懂,文献[34]仍可作为了解Écalle理论的入门读物。下面介绍双洗牌李代数(double shuffle Lie algebra)。为此需要扩充MZV的定义。

令$\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$为非交换变量$x,y$生成的多项式环。对$\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$中任意单词$w$,按照如下方式定义$\zeta(w)$。如果$w$以$x$开始且以$y$结尾,记$w=x^{k_1-1}y\cdots x^{k_r-1}y(k_1\geqslant 2)$,则令$\zeta(w):=\zeta(k_1,\cdots,k_r)$。对于一般单词$w=y^rvx^s$,令

$$\zeta(w):=\sum_{a=0}^{r}\sum_{b=0}^{s}(-1)^{a+b}\zeta(\pi(\mathrm{sh}(y^a,y^{r-a}vx^{s-b},x^b))),$$

这里π是多项式向收敛单词(即以x开始且以y结尾的单词)的投影。这种定义称为洗牌正则化。

定义2.27　空间$\mathfrak{ds}$由满足下面2个性质的多项式$f\in\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$组成:

(1)(洗牌关系)对于任意单词u、v,f的系数满足$\sum_{w\in\mathrm{sh}(u,v)}(f|w)=0$。这等价于$f\in\mathrm{Lie}[x,y]$。

(2)(stuffle关系)令$f_*=\pi_y(f)+f_{\mathrm{corr}}$,其中$\pi_y(f)$为向以$y$结尾的单词上的投影,

$$f_*=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(f|x^{n-1}y)y^n。$$

对于以y结尾的单词u、v、w,f_*的系数满足$\sum_{w\in\mathrm{st}(u,v)}(f_*|w)=0$,这里$(\mathrm{st})(u,v)$的定义通过下面的例子自明:对于加性字符集(additive alphabet),

$$\begin{aligned}(\mathrm{st})(a,b)&=(a,b)+(b,a)+(a+b),\\(\mathrm{st})((a,b),c)&=abc+acb+cab+(a+b,c)+\\&\quad(a,b+c),\\(\mathrm{st})((a,b),b)&=2(a,b,b)+(b,a,b)+(a+b,b)+\\&\quad(a,2b),\end{aligned}$$

形式定义见文献[34]中的(1.1.4)。

对于$f\in\mathrm{Lie}[x,y]$,定义其上的导子为$D_f(x)=0,D_f(y)=[y,f]$。并定义其上的泊松括号为$\{f,g\}=[f,g]+D_f(g)-D_g(f)$。容易验证

$$[D_f,D_g]=D_f\circ D_g-D_g\circ D_f=D_{\{f,g\}},$$

这意味着泊松括号恰恰就是$\mathrm{Lie}[x,y]$上导子所生成空间上的李括号。Racinet[35]在其博士论文中证明了如下定理。

定理2.28[35]　$\mathfrak{ds}$在泊松括号$\{\cdot,\cdot\}$下构成李代数。

Racinet的原始证明十分复杂,在引入必要的模的术语后,Écalle[34]的方法变得极其简单明了。诸多MZV的结构都可以通过模的方式很自然地得出,细节见文献[34]及其参考文献。Écalle[36]将MZV置于算术双变体(arithmetical dimorphy)框架之下,并揭示了其flexion结构,作为应用也探讨了MZV的计数问题。

3　在数学中的应用

3.1　复数域上的常微分方程——潘勒维-I

复数域上常微分方程的研究历史一直是核心数学的主流。著名的例子为源于欧拉和高斯的超几何微分方程。在19世纪下半叶,具有正则奇点(亦称Fuchs奇点)的微分方程理论已臻成熟,其级数解是收敛的,单值群和单值表示给予微分方程以几何与拓扑的描述,足以刻画这类奇点。而对于具有非正则奇点的微分方程,其级数解通常是发散的。这使那个时代的数学家困惑良久,直到庞加莱引进渐近展开的思想,发散级数的理论发展才复兴并渐次展开。特别值得一提的是庞加莱将渐近展开理论应用于天体力学中的林德斯泰特级数获得巨大成功。对于非正则奇点,斯托克斯矩阵和单值化矩阵成为微分伽罗华群的元素。微分伽罗华群为线性代数群,其代数结构反映了微分方程的诸多性质甚或解析的性质。作为微分伽罗华群元素的斯托克斯矩阵是复现理论中符号斯托克斯自同构(symbolic Stokes automorphism)在形式解空间上的限制。有兴趣的读者可参考文献[16]及其所引参考文献。

潘勒维方程是20世纪初由法国数学家Painlevé引入的一系列复数域上的二阶非线性常微分方程的总称。这是一类新的超越特殊函数,既不能写成初等函数也不能表示成数学物理中已知的特殊函数。在要求二阶非线性常微分方程可去奇点(movable singularities)为极点的条件下,一共有6族,现称之为潘勒维-I至潘勒维-VI.这些方程是控制黎曼球面上福克斯方程(Fuchsian equation)等单值性形变(isomonodromic deformations)的方程,其影响遍及几何与拓扑、数学物理、化学(如反映扩散模型)甚至生物(如种群竞争模型)领域。

潘勒维方程常常出现于量子场论和弦理论中,是应用复现理论的一类完美非线性方程的例子。下面仅就潘勒维-I为例进行说明,其曾作为四次矩阵模型的极限而出现,也和二维量子引力有关[20]。其截断解通过波雷尔-拉普拉斯求和过程由其渐近展开和无穷远处无极点完全确定。其形式积分对应的超越级数(也就是物理学家所说的多瞬子展开(multi-instanton expansions))是复现的,其斯托克斯矩阵不足以刻画其斯托克斯现象,异形导数变得不可或缺。完整的复现结构由其联结方程给出。

潘勒维-I方程为

$$(P_I)u'' = 6u^2 + x。$$

经过坐标变换 $u(x) = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{\sqrt{6}} x^{\frac{1}{2}} v(z), z = e^{\frac{5i\pi}{4}} \frac{24^{\frac{5}{4}}}{30} x^{\frac{5}{4}}$ 和 $v(z) = 1 - \frac{4}{25}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} w(z)$,得到 P_I 的预制形式(prepared form)[20]

$$P(\partial)w + \frac{1}{z}Q(\partial)w = F(z, w), \tag{39}$$

其中 $P(\partial) = \partial^2 - 1, Q(\partial) = -3\partial, \partial = \frac{d}{dz}$ 和

$$F(z, w) = \frac{392}{625}\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^2}w + \frac{1}{2z^2}w^2 = f_0(z) + f_1(z)w + f_2(z)w^2。$$

借助于此,P_I 的形式积分为[20]

$$\tilde{w}(z, U) = \tilde{W}_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \Xi_{n+1,0} \setminus \Xi_{n,0}} U^k e^{-\lambda \cdot kz} \tilde{W}_k(z),$$

这里 $\tilde{W}_0(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{-l} = -\frac{392}{625}z^{-2} - \frac{6\,272}{625}z^{-4} - \frac{141\,196\,832}{390\,625}z^{-6} - \cdots$ 是预制方程的形式幂级数解,

$$a_0 = a_1 = 0, a_2 = -\frac{392}{625}, \cdots,$$

$$a_l = l^2 a_{l-2} - \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{l-2} a_p a_{l-2-p}, l = 3, 4, \cdots。$$

对任意 n 和 $k \in \Xi_{n+1,0} \setminus \Xi_{n,0}, \tilde{W}_k = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}(\kappa \cdot k)^l \log^l(z) \tilde{W}_{k-1}^{[0]}, \tilde{W}_k^{[0]} = z^{-\tau \cdot k} \tilde{w}_k^{[0]}$。其他一些记号的含义如下:$\lambda = (1, -1)$ $\tau = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$(共振);$\kappa = \left(\frac{5}{12}, -\frac{5}{12}\right)$, $\Xi_{n,0} = \{k = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{0\} \mid k_1 < n,$ 或 $k_2 < n\} \cup \{(n, n)\}, \Xi_{0,0} = \{(0, 0)\}$。$\tilde{w}_k^{[0]}$ 的定义见文献[20],这是一个依赖2个参数 $U = (U_1, U_2) \in \mathbb{C}^2$ 的超越级数,是1-可求和的。通过波雷尔-拉普拉斯变换,给出了潘勒维方程的截断解。相关数学和物理方面的工作参见文献[37-40]。

定理 3.1[20] 潘勒维-I方程预制形式(39)的形式积分 $\tilde{w}(z, U)$ 是复现的。对于对数黎曼面上投影为 $\lambda_1 = 1$ 的任意点 $\omega = k_0 \underline{e}^{2\pi i j} \in \tilde{\mathbb{C}}, k_0 \in \mathbb{N}^*$,存在由其唯一决定的2列复数 $(A_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$、$(B_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$,使得对于任意的 $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ 和 $n \in \mathbb{N}$,异形导数为

$$\Delta_\omega \tilde{W}_{k+(n,n)} = \sum_{m=-1}^{n} ((k_1 + m + k_0)A_{n-m}(\omega) + (k_2 + m)B_{n-m}(\omega))\tilde{W}_{k+(m,m)+(k_0,0)}。$$

式中 $A_n(\omega)$ 和 $B_n(\omega)$ 为复现系数,$A_0(\omega)$ 为斯托克斯系数。

对于 λ_2 有类似的结论。定理的证明中联结方程起基本作用[20],这些复现系数也称为高阶斯托克斯系数。

3.2 动力系统

正如渐近分析产生于庞加莱对天体力学中林德斯泰特发散级数的探讨和复现理论源于Écalle对平面向量场极限环有限性的Dulac问题的研究,天体力学、动力系统和微分方程特别是哈密顿系统一直是复现理论的重要应用领域。

Lazzarini等[41]在Gevrey类函数的框架下研究了近可积哈密顿系统解析摄动的标准型理论,通过构造具体的例子给出了游荡集大小的定量刻画,证明了Gromov容量(capacity)的指数型下界。其用到了Gevrey类函数的性质,其结果在通常的函数类是难以想象的。

Bounemoura和Féjoz[42]在比通常丢番图条件弱的 α-Bruno-Rüssman算术条件下,对 α-Gevrey哈密顿系统证明了不变换面存在的KAM定理。在证明过程中不需要像光滑情形一样做逼近和光滑化过程,这也显示了Gevrey条件的优越性。

4 在物理中的应用

如前所述,在天体力学的摄动理论中,特别是为了澄清林德斯泰特级数的敛散性,庞加莱提出了渐近展开的概念。在量子物理理论中,人们也逐渐意识到,发散级数是不可避免的,或者说正是由于发散性才能用来刻画量子行为。将发散级数赋予一有限的含义,是数学家和物理学家共同面临的研究主题,且各自发展了若干理论,如数学中的求和和复现理论、物理中的正则化和重整化理论。

4.1　量子力学

4.1.1　精密WKB理论

精密WKB方法最早由Voros[43-44]提出,Écalle[11,45]称之为量子复现理论。虽然Delabaere等[46]及Kawai和Takei[47]进行了有益的尝试,但是严格的数学理论尚待建立。Gaiotto等[48]利用WKB理论构造了希钦(Hitchin)模空间上的典则达布坐标(Darboux coordinates),这给予一类(S-类)具有$N=2$超对称四维场论BPS(Bogomol'ny-Prasad-Sommerfield)谱的Kontsevich-Soibelman穿墙公式(wall-crossing formula)以具体实现,而且BPS谱可由WKB构造诱导的黎曼曲面三角剖分的组合结构显式给出。Allegretti[49]及Iwaki和Nakanishi[50]也分别探讨了WKB理论和丛代数(cluster algebra)的关系。

本节介绍如何基于Écalle的基本构造方法分析WKB理论的复现结构。

定常薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi+V(x)\psi=E\psi, \tag{40}$$

这里$x\to\psi(x)\in\mathbb{C}$是波函数,满足$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x=1$,$\psi\in L^2(\mathbb{R})$。现在考虑势能是多项式的情形,也就是说

$$V(x)=x^N+V_1x^{N-1}+\cdots+V_0\in\mathbb{R}[[x]]。$$

借用Voros在1983年给出的简谐振子作为一个例子。

例 4.1　当$V(x)=x^2$为量子简谐振动,文献[12]给出其薛定谔方程的能级为$E_k(\hbar)=c\left(k+\frac{1}{2}\right)\hbar$,相对应的解为$\psi_k(x,\hbar)=\mathrm{Poly}(x,n)\cdot\mathrm{e}^{\frac{-c'x^2}{\hbar}}$,这里$c,c'$是与薛定谔方程系数相关的常数,$\mathrm{Poly}(x,n)$是最高次数为$n$的埃尔米特多项式。

谱理论给出方程(40)存在一个非零的解$\psi\in L^2((\mathbb{R}))$当且仅当$E\in\{E_0<E_1<\cdots\}\subset\mathbb{R}_{>0}$。也就是说对于无界算子$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)$求其特征向量。这个算子有以下性质:

(1)H是一个在$L^2(\mathbb{R})$上的自伴算子,也就是说,当$f,g\in L^2(\mathbb{R})$,有$<Hf,g>=<f,Hg>$。且存在一个稠密集$W^{2,2}=\left\{f\in L^2(\mathbb{R})\,\middle|\,\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}\in L^2(\mathbb{R})\right\}$。

(2)H存在由孤立特征值构成的离散谱(基本的能级)。

为了讨论复现性质,令$\eta=\frac{1}{\hbar}$为复现变量。重新整理方程(40)得

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi=\eta^2Q(x)\psi,\ Q(x):=2m(E-V(x))。 \tag{41}$$

下面是一些符号解释:

(1)$Q^{-1}(0):=\{x_1,\cdots,x_M\}$是薛定谔方程的转折点(turning point)集合。

(2)$\Sigma:=\mathbb{C}-Q^{-1}(0)$;

(3)$\tilde{\Sigma}_2:=\{(x,p)\in\Sigma\times\mathbb{C}|P^2=Q(x)\}$是$\Sigma$的二重复叠;

(4)$\tilde{\Sigma}_\infty:=\Sigma$的万有复叠。

注:如果$Q(x)$的零点是简单的,那么可以给$\tilde{\Sigma}_2$在所有的零点处的紧化。

接下来给出几何的描述:

(1)$Q(x)\mathrm{d}x^2$是定义在$\mathbb{P}^1$上的亚纯2-形式且在$\tilde{\Sigma}_2$上正则;

(2)$Q^{\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x$是$\tilde{\Sigma}_2$上良定义的1-形式;

(3)$\frac{1}{Q^{1/2}(x)}\frac{\partial}{\partial x}$是一个在$\tilde{\Sigma}_2$上良定义的向量场。

给定向量场$\frac{1}{Q^{1/2}(x)}\frac{\partial}{\partial x}$,求解其相对应的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{Q^{1/2}(x)}, \tag{42}$$

等价于求解$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=Q^{1/2}(x)$。可得$T(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}Q^{1/2}(x)\mathrm{d}x$为方程的解,且当$x$非常接近$x_0$时,可得到方程(42)的轨道$x=\Phi^t(x_0)$。

WKB方法基于方程(41)的形式解:

$$\psi=C_+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta A(x)}[Q^{-1/4}+\eta^{-1}\varphi_1^++\eta^{-2}\varphi_2^++\cdots]+$$
$$+C_-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta A(x)}[Q^{-1/4}+\eta^{-1}\varphi_1^-+\eta^{-2}\varphi_2^-+\cdots],$$

其中$A(x)=\int_{x_0}^{x}Q^{1/2}\mathrm{d}x,\varphi_k^\pm\in O(\tilde{\Sigma}_\infty)$。

例 4.2　当$Q(x)=Q_0\in\mathbb{C}^*$时,方程(41)的解为

$$\psi=C_+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta Q_0^{1/2}x}+C_-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta Q_0^{1/2}x},$$

当$Q(x)=c^2x^N$时,方程有解$\psi^\pm=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\eta A(x)}Q^{-1/4}(x)\chi_\pm(x,\eta)$。这里$A(x)=cx^{\frac{m+2}{2}}$,$Q^{-1/4}=c^{-1/2}x^{-m/4}$。

通过波雷尔变换可以得到

$$\mathcal{B}(\eta^{-\mu-1}\chi_+)=\frac{\xi^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\left(1-\frac{\xi}{2\mathrm{i}A(x)}\right)^\mu,$$

$$\mathcal{B}(\eta^{-\mu-1}\chi_-)=\frac{\xi^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\left(1+\frac{\xi}{2\mathrm{i}A(x)}\right)^\mu,$$

这里$\mu:=-\frac{m}{2(m+2)}$。不难看出$\mathcal{B}(\chi_\pm)$的奇性为$\pm 2\mathrm{i}A(x)$,可以计算其异形导数

$\Delta_{2\mathrm{i}A(x)}\chi_+=2\mathrm{i}\sin(\pi\mu)\chi_-,\Delta_{-2\mathrm{i}A(x)}\chi_-=2\mathrm{i}\sin(\pi\mu)\chi_+$。

一般情况下,可以找到$\psi^\pm=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\eta A(x)}\varphi_\pm(x,\eta)$形式的解。进一步分析得到

$$\psi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta A}\varphi_+,$$

$$\psi'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta A}(\varphi_+'+\mathrm{i}\eta Q^{1/2}\varphi_+),$$

$\psi''=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta A}(\varphi_+''+2\mathrm{i}\eta Q^{1/2}\varphi_+'+(\mathrm{i}\eta)^2Q\varphi_++\mathrm{i}\eta(Q^{1/2})'\varphi_+)$,将上边结果代入方程(41)得$\varphi_+''+2\mathrm{i}\eta Q^{1/2}\varphi_+'+\frac{1}{2}\mathrm{i}\eta Q'Q^{-1/2}\varphi_+=0$。从而可以说明上述方程存在一维的解空间$\mathrm{cst}\cdot(\varphi_0^++\eta^{-1}\varphi_1^+(x)+\eta^{-2}\varphi_2^+(x)+\cdots)$。

前边的cst可以是依赖于η的函数,可以得到$\varphi_0^+=Q^{1/4},\varphi_1^+,\varphi_2^+,\cdots$。通过递归的方法可得等式的左边关于$\eta^{-k}$的前2项系数为:

(1)当$k=-1$时,$2\mathrm{i}Q^{1/2}\varphi_0^{+\prime}+\frac{1}{2}\mathrm{i}Q'Q^{-1/2}\varphi_0^+=0$,可推出$\varphi_0^+\in\mathbb{C}Q^{-1/4}$;

(2)当$k=0$时,$\varphi_0^{+\prime}+2\mathrm{i}Q^{1/2}\varphi_1^{+\prime}+\frac{1}{2}\mathrm{i}Q'Q^{-1/2}\varphi_1^+=0$,可推出$\varphi_1^+$在相差一个$\varphi_0^+$的任意倍数的情况下唯一确定。

根据常微分方程的知识φ_k^+都可以提出一个$Q^{-1/4}$的因子,仍延用这个记号φ_k^+。

命题4.3 在$\tilde{\Sigma}_\infty$上存在全纯函数序列$\{\varphi_k^+\}_{k\geqslant 1}$和$\{\varphi_k^-\}_{k\geqslant 1}$使得

$$\psi_\pm:=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\eta A(x)}Q^{-1/4}(x)\left(1+\Sigma_{k\geqslant 1}\eta^{-k}\varphi_k^\pm(x)\right)。$$

这定义了2个线性无关的超越级数解。另一个求解方程(41)的方法是将其转化为一阶方程组,即方程(41)等价于$\begin{cases}\psi_1=\psi_2,\\ \psi_2=-\eta^2Q(x)\psi_1,\end{cases}$这也等价于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\eta^2Q(x)\psi_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$,从而将原问题转化为在平凡丛$\tilde{\Sigma}_2\times\mathbb{C}^2$上的联络问题。对于方程$P:=\frac{1}{\mathrm{i}\eta}\frac{\psi_2}{\psi_1}=\frac{1}{\mathrm{i}\eta}\frac{\psi_1'}{\psi_1}$,同时对两边求导可得$P'=\frac{1}{\mathrm{i}\eta}(\frac{\psi_1''}{\psi_1}-P^2)$。即求解对于$\psi$的薛定谔方程(41)等价于求解方程组

$$\begin{cases}P^2=Q(x)+\mathrm{i}\eta^{-1}P',\\ \psi'=\mathrm{i}\eta P\psi,\end{cases}\tag{43}$$

这是关于P的黎卡提方程。

命题4.4 在$\tilde{\Sigma}_2$上存在全纯函数序列$\{P_k^+\}_{k\geqslant 0}$和$\{P_k^-\}_{k\geqslant 0}$使得

$$P_\pm(x,\eta)=\pm Q^{1/2}+\frac{\mathrm{i}}{4}\eta^{-1}\partial_x(\log Q(x))\pm\eta^{-2}\left(\frac{5}{32}\frac{(\partial_xQ)^2}{Q^{5/2}}-\frac{1}{8}\frac{\partial_x^2Q}{Q^{3/2}}\right)+\cdots=\sum_{k\geqslant 0}\eta^{-k}P_k^\pm(x)。\tag{44}$$

这给命题4.3一个新的解释。事实上

$$\psi^\pm=C(\eta)\exp\left(\mathrm{i}\eta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}P_\pm\right)=\tilde{C}(\eta)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\eta A(x)}Q^{-1/4}\varphi^\pm。$$

上边都是关于薛定谔方程熟知的解的行为,接下来将从复现的角度分析这些解的行为。特别地取正则化$P:=\frac{1}{2}(P_+-P_-)$,利用方程(43)不难得到$\frac{1}{2}(P_++P_-)=-\frac{1}{2\mathrm{i}\eta}\frac{\partial_xP}{P}$。逐项进行正则化$P_\pm(x,\eta)$或者是$P(x,\eta)$,得到

$$P=Q^{1/2}(1+\frac{1}{\mathrm{i}\eta}Y),$$

$$Y=-\frac{1}{\mathrm{i}\eta}\left(\frac{5}{32}\frac{(\partial_xQ)^2}{Q^3}-\frac{1}{8}\frac{\partial_x^2Q}{Q^2}\right)+\cdots。\tag{45}$$

首先分析$P_\pm$关于变量η的求和,由之前讨论知

$$P_\pm=\pm P-\frac{1}{2\mathrm{i}\eta}\partial_x(\log P)=\pm Q^{1/2}-\frac{1}{2\mathrm{i}\eta}\partial_x\log P\pm\frac{1}{\mathrm{i}\eta}Q^{1/2}Y。$$

薛定谔方程的WKB解在x_j或者∞正则化得到

$$\psi_j^\pm:=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\eta A(x)}P^{-1/2}\exp\left(\pm\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_j^{-1}(Q^{1/2}Y)\right),$$

$$j\in\{1,\cdots,M,\infty\}。$$

此处$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_j^{-1}$表示在$x_j$处皮瑟(Puisseux)展开不包含$(x-x_j)^{-1}$,或者也可以表达为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_j^{-1}P_k=\int_{\boxed{x_j}}^xP_k(x')\mathrm{d}x'=<\int_a^xP_k(x')\mathrm{d}x'>,$$

这里积分表示的是关于a正向绕x_j一周的圆圈上的

平均。利用关系式(45)可以得到

$$\psi_j^{\pm}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\eta A(x)}P^{-1/2}\exp\left(\pm\mathrm{i}\eta\int_{\boxed{x_j}}^{x}(P(x')-Q^{1/2}(x'))\mathrm{d}x'\right)。$$

同时WKB求解给出在2种正则化之间存在Voros系数

$$\psi_k^{+}(x,\eta)=\mathrm{e}^{\Pi_{j,k}}\psi_j^{+}(x,\eta),\ \psi_k^{-}(x,\eta)=\mathrm{e}^{-\Pi_{j,k}}\psi_j^{-}(x,\eta)。$$

此处$\Pi_j(\eta)=\mathrm{i}\eta\int_{\boxed{x_j}}^{x}(P(x')-Q^{1/2}(x'))\mathrm{d}x'$,以及

$$\Pi_{j,k}(\eta)=\int_{\boxed{x_j}}^{\boxed{x_k}}Q^{1/2}(x')Y(x',\eta)\mathrm{d}x'=\Pi_k(\eta)-\Pi_j(\eta)。$$

对于在x_∞处正则化,考虑到$Q^{1/2}Y$的系数在∞的退化性,可以用$\int_{x_\infty}^{x}$来代替$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\infty^{-1}$。关于变量$\eta$给出如下富有启发意义的波雷尔求和和复现性质的讨论。

首先由关系式(44)得到

$$P_{\pm}=\pm Q^{1/2}(x)-\frac{1}{4\mathrm{i}\eta}\partial_x\log Q(x)+\frac{1}{\mathrm{i}\eta}Q^{1/2}Y_{\pm},$$

其中$Y_{\pm}=\eta^{-1}Y_0^{\pm}(x)+\eta^{-2}Y_1^{\pm}(x)+\cdots$,且有

$$Y=\frac{1}{2}(Y_{+}-Y_{-}),$$

$$\psi_\infty^{\pm}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\eta A(x)}Q^{-1/4}\varphi_\infty^{\pm},\ \varphi_\infty^{\pm}=\exp\int_\infty^{x}Q^{1/2}Y_{\pm},$$

φ_∞^{+}和φ_∞^{-}表示除了首项外所有的系数都为零。用$\partial\coloneqq Q^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}$这个记号来表示向量场,那么原来的薛定谔方程(41)通过变换$\psi^{\pm}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\eta A(x)}Q^{-1/4}\varphi^{\pm}$变成

$$\partial^2\varphi^{\pm}\pm2\mathrm{i}\eta\partial\varphi^{\pm}=K\varphi^{\pm},$$

其中$K=\frac{1}{2}\partial H+\frac{1}{4}H^2$,$H\coloneqq\partial(\log Q^{1/2})$。相应地,关于$P_{\pm}$的黎卡提方程相当于求解以下关于$Y_{\pm}=\partial\log\varphi^{\pm}$的方程

$$\partial Y_{\pm}\pm2\mathrm{i}\eta Y_{\pm}=-Y_{\pm}^2+K。$$

对于x_∞正则化的解而言,$\varphi_\infty^{\pm}=\exp(\partial_\infty^{-1}Y_{\pm})$,这里$\partial_\infty^{-1}$表示基于$x_\infty$的$\partial$的右逆。

引理4.5　给定$\alpha\in\mathbb{C}^*$和$L=L(x)$,方程

$$(-\partial+\alpha^{-1}\eta)Y(x,\eta)=L(x)$$

有唯一的形式解$\tilde{Y}(x,\eta)=\sum_{k\geqslant0}\eta^{-k-1}Y_k(x)$,其波雷尔变换为$\hat{Y}(x,\zeta)=\alpha L(\Phi^{\alpha\zeta}(x))$。

可以断言$\hat{Y}_{\mp}$以及$\hat{\varphi}^{\pm}$是在波雷尔平面上的无尽延拓函数,二者可能的奇点是满足$\Phi^{\pm\omega(x)/2\mathrm{i}}\in\{x_1,\cdots,x_M\}$的$\zeta=\omega(x)$。首先对于函数$t\mapsto\Phi^t(x_0)$可以作解析延拓,且奇点在$\alpha_j\coloneqq\int_x^{x_j}Q^{1/2}(x')\mathrm{d}x'$以及加上一个整数倍周期$2(\alpha_k-\alpha_j)$,即对于任意$\tilde{\alpha}\in\{\alpha_j+\Sigma_k2m_k(\alpha_k-\alpha_j)\}$,可得$A(x)\mp\omega(x)/2\mathrm{i}=\tilde{\alpha}$,即$\omega(x)=\pm2i(A(x)-\tilde{\alpha})$,至此可以给出$\varphi_j^{\pm}$和$\varphi_\infty^{\pm}$的复现结构为

$$\Delta_{2\mathrm{i}(A-\alpha_j)}\varphi_j^{+}=S_j\varphi_j^{-},\Delta_{-2\mathrm{i}(A-\alpha_j)}\varphi_j^{-}=S_j\varphi_j^{+},$$

$$\Delta_{2\mathrm{i}(A-\alpha_j)}\varphi_\infty^{+}=S_j\mathrm{e}^{2\Pi_{j,\infty}}\varphi_\infty^{-},\ \Delta_{-2\mathrm{i}(A-\alpha_j)}\varphi_\infty^{-}=S_j\mathrm{e}^{-2\Pi_{j,\infty}}\varphi_\infty^{+},$$

其中$S_j=-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{m_j}{m_j+2}\right)$以及$\varphi_\infty^{+}=\mathrm{e}^{\Pi_{j,\infty}}\varphi_j^{+}$,$\varphi_\infty^{-}=\mathrm{e}^{-\Pi_{j,\infty}}\varphi_j^{-}$。

进一步也可以利用非线性与异形导数之间的关系计算出作用到$Y_{\pm}$的值。

例4.6　考虑艾里方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}w^2}=wy$。

文献[16]给出这个方程的2个线性无关的解$y_0(w)$,$y_1(w)$。对于$w\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$,

$$y_0(w)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}w^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}w^{3/2}}\mathcal{S}^{I_\pi}\tilde{\varphi}(Z_0(w)),$$

这里全纯函数$Z_0:\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-\to\tilde{\mathcal{D}}(I_\pi,0)$,$Z_0(w)\coloneqq\frac{2}{3}w^{3/2}$。

对于$w\in\mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3})$,

$$y_1(w)=\frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{\pi}}w^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}w^{3/2}}\mathcal{S}^{I_0}\tilde{\psi}(Z_1(w)),$$

这里全纯函数

$$Z_1:\mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3})\to\tilde{\mathcal{D}}(I_0,0),\ Z_1(w)\coloneqq\frac{2}{3}w^{3/2}。$$

形式级数

$$\tilde{\psi}\coloneqq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{5}{6}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n}{2^nn!}z^{-n}=1+\tilde{\psi}_1\in\mathbb{C}[[z^{-1}]],$$

式中$(\alpha)_0=1,(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\ (n\geqslant1)$。形式级数在方向$I_0\coloneqq(-2\pi,0)$上是可求和的。通过计算可以得到波雷尔变换为

$$\hat{\psi}=\delta+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{\zeta^{-5/6}}{\Gamma(1/6)}*\frac{\zeta^{-1/6}}{\Gamma(1/6)}\left(1-\frac{\zeta}{2}\right)^{-1/6}\right)\in\mathbb{C}\delta\oplus\mathcal{N}(I_0,0,\beta_0(\theta)),$$

其中$\beta_0:I_0\to\mathbb{R}_{>0}$为局部有界函数。其波雷尔和$\mathcal{S}^{I_0}\tilde{\psi}$在区域$\tilde{\mathcal{D}}(I_0,0)=\{z\in\tilde{\mathbb{C}}|-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}\}$上解析。类似地,对于级数$\tilde{\varphi}\coloneqq\tilde{\psi}(-z)=1+\tilde{\varphi}_1$存在一个区间$I_\pi\coloneqq(-\pi,\pi)$和一个局部有界函数$\beta_\pi:I_\pi\to\mathbb{R}_{>0}$使其波雷尔变换属于$\mathbb{C}\delta\oplus\mathcal{N}(I_\pi,0,\beta_\pi(\theta))$其波雷尔和$\mathcal{S}^{I_\pi}\tilde{\varphi}$在区域$\tilde{\mathcal{D}}(I_\pi,0)=\{z\in\tilde{\mathbb{C}}|-\frac{3\pi}{2}<\arg z<$

$\frac{3\pi}{2}$}上全纯。

对艾里方程中出现的2个级数$\tilde{\psi}$、$\tilde{\varphi}$,异形算子的作用为

$$\begin{cases}\Delta_2^+\tilde{\psi} = -i\tilde{\varphi}, & \Delta_{-2}^+\tilde{\varphi} = -i\tilde{\psi},\\ \Delta_2\tilde{\psi} = -i\tilde{\varphi}, & \Delta_{-2}\tilde{\varphi} = -i\tilde{\psi}。\end{cases}$$

任意给定一个方向d,自同构算子Δ_d^+作用到2个级数的波雷尔变换上得到

$$\Delta^+_{\mathbb{R}_{>0}}\mathcal{B}\tilde{\psi} = \mathcal{B}\tilde{\psi} - \mathrm{i}\tau_2\mathcal{B}\tilde{\varphi},\quad \Delta^+_{\mathbb{R}_{<0}}\mathcal{B}\tilde{\varphi} = \mathcal{B}\tilde{\varphi} - \mathrm{i}\tau_{-2}\mathcal{B}\tilde{\psi}。$$

由此可以描述这2个级数的波雷尔和给出的斯托克斯现象

$$\arg z\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ \mathcal{S}^{l_0}\tilde{\psi}(z)=\mathcal{S}^{l_0}\tilde{\psi}(\underline{e}^{2\pi\mathrm{i}}z)-\mathrm{i}e^{-2z}\mathcal{S}^{l_\pi}\tilde{\varphi}(z),$$

$$\arg z\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}),\ \mathcal{S}^{l_\pi}\tilde{\varphi}(\underline{e}^{2\pi\mathrm{i}}z)=\mathcal{S}^{l_\pi}\tilde{\varphi}(z)-\mathrm{i}e^{-2z}\mathcal{S}^{l_0}\tilde{\psi}(z)。$$

4.1.2 半经典迹公式

Gutzwiller半经典迹公式(semiclassical trace formula)[51-52]是量子力学中联系薛定谔算子的能谱与相应经典哈密顿系统周期解的一个渐近公式,也称为Gutzwiller周期轨道理论,是量子混沌的重要研究课题,在理论和实验量子力学中均起重要作用。关于经典力学和量子力学之间的微妙关系见文献[53]。

本部分主要参照Voros[54]在KITP(Kavli Institute for Theoretical Physics)的报告。报告介绍了泊松(Poisson)求和公式、塞尔伯格(Selberg)迹公式和Gutzwiller迹公式及与之相关的复现问题。

重新考虑薛定谔方程$\hat{H}\psi=E\psi$,其中$\hat{H}:=-\hbar^2\Delta_q+V(q)$是量子力学下的哈密顿算子,对应的特征值就是量子能谱,记为$\{E_k\}$。以量子能谱$\{E_k\}$为变量的谱函数可用于描述一个物理系统的能级分布。以下将借助迹公式与复现技术研究谱函数,此处可考虑2种重要的谱函数:

定义4.7 (1)关于哈密顿算子$\hat{H}$的配分函数

$$\Theta(\tau):=\mathrm{Tr}e^{-\tau\hat{H}}=\Sigma_k e^{-\tau E_k},$$

在τ的正实部>0时全纯。由于量子态之间的演化算子为$e^{-\mathrm{i}\hat{H}T}$,T表示时间差。从0时刻x点到T时刻x'点的传播子表示为

$$K(x',T;x,0)=\left\langle x'\middle|e^{-\mathrm{i}\hat{H}T/\hbar}\middle|x\right\rangle,$$

因此配分函数也可以理解为每点到自己沿着虚时$T=-\mathrm{i}\tau$的传播和。

(2)另一个重要的谱函数是计数谱函数[55]

$$N(E):=\sum_k\theta(E-E_k),$$

θ函数为赫维赛德(Heaviside)阶跃函数,在自变量>0时取1,其余情况取0。因此计数谱函数记录了能谱$E_k<E$的个数。

根据$N(E)$与$\Theta(\tau)$的定义,可以得到二者之间的关系:

$$\Theta(\tau)=\int_0^\infty e^{-\tau x}\mathrm{d}N(x)。$$

分部积分后为

$$\frac{\Theta(\tau)}{\tau}=\int_0^\infty e^{-\tau x}N(x)\mathrm{d}x。$$

结合复现理论能够看出,若函数$\frac{\Theta(\tau)}{\tau}$有1-Gevery渐近级数展开,那么谱函数$N(x)$可视为此渐近级数的波雷尔变换。接下来将根据泊松求和公式、塞尔伯格迹公式和Gutzwiller迹公式分别探讨这2种谱函数的复现性质。

例4.8 当势能取$V(q)=q^2$,即一维简谐振子的情况时,其配分函数是易于计算的。由薛定谔方程通过幂级数展开或升降阶算子的方法[56]可以计算得到此量子系统允许的能谱$E_k=2k+1,k=0,1,2\cdots$。因此对配分函数进行幂级数求和得到

$$\Theta(\tau)=\sum_k e^{-\tau(2k+1)}=\frac{1}{2\sinh\tau}。$$

其态密度奇性出现在极点$k\pi\mathrm{i}$上。奇点反映了周期轨道的周期信息[55]。

例4.9 对于$V(q)=|q|^N,N>2$,其计数态密度与配分函数要复杂很多。Voros[54]利用泊松求和公式给出了一个启发式计算。记$x:=(2\pi\hbar)^{-1}\oint_{p^2+|q|^N=E}p\,\mathrm{d}q$,实际上是此运动下的经典作用量的常数倍,计算得到

$$x=c_N E^{\frac{N+2}{2N}}/\hbar,\tag{46}$$

这是仅与能量、势能次数有关的量。根据玻尔-索末菲(Bohr-Sommerfeld)量子化法则[58],$\hat{H}=p^2+|q|^N$下的量子能谱$\{E_k\}_{k=1}^\infty$应使得其对应的作用量序列$\{x_k\}_{k=1}^\infty$满足$F(x_k)=k+\frac{1}{2}$,其中

$$F(x)=x+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^3}+\cdots,$$

系数$\{b_i\}_{i=1}^\infty$由WKB方法在有限阶内计算得到[12,59]。根据x与能量E的关系式(46),可得

$$N(E)=\sum_k\theta(E-E_k)=\sum_k\theta(x-x_k)。$$

现在考虑换元后的计数密度函数

$$N(x)\coloneqq\sum_k\theta\Big[F(x)-F(x_k)\Big]=\sum_k\theta\left[F(x)-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right],$$

利用泊松求和公式$\sum_{n\in\mathbb{Z}}h(n)=2\pi\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{h}(2\pi m)$研究其奇性。其中$\hat{h}$表示函数$h$的傅里叶变换,即$\hat{h}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\rho}\mathrm{d}\rho$。那么

$$N(x)=F(x)+\sum_{r\neq0}\frac{(-1)^r}{2\pi\mathrm{i}r}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}rF(x)}=$$
$$x+\frac{\log\Phi(x)}{2\pi\mathrm{i}}+\sum\frac{(-1)^r}{2\pi\mathrm{i}r}[\Phi(x)]^r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}rx},$$

其中$\Phi(x)\coloneqq\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left[\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^3}+\cdots\right]}$。因此,谱函数的奇点类型为对数型奇点与极点[54,59]。

接下来考虑高维情形。考虑亏格g的常负曲率的紧黎曼曲面X上自由粒子的运动,介绍X上的塞尔伯格迹公式,见文献[60-62]。

定理4.10[60]**[塞尔伯格迹公式]**　记紧黎曼曲面X上的修正拉普拉斯算子$P_X=\left(-\Delta_X-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$,$\{\lambda_n\}$为$-\Delta_X$的谱,$\rho_n\coloneqq\left(\lambda_n-1/4\right)^{1/2}$,那么

$$\sum_{n=0}^{\infty}h(\rho_n)=(2g-2)\int_0^{+\infty}h(\rho)\rho\tanh(\pi\rho)\mathrm{d}\rho+$$
$$\int_0^{+\infty}h_-(\kappa)\mathrm{d}\log z_X\left(\frac{1}{2}+\kappa-\mathrm{i}0\right),\quad(47)$$

其中

$$h_-(\kappa)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(h(-\mathrm{i}\kappa)-h(+\mathrm{i}\kappa)),\ |\arg\kappa|<\theta_0,$$
$$z_X\left(\frac{1}{2}+\kappa\right)=\prod_{p\in\mathcal{P}}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\mathrm{e}^{\tau(p)\left(k+\frac{1}{2}+\kappa\right)}\right),\ (\mathrm{Re}\kappa>1/2),$$

$\tau(p)$对应此紧黎曼曲面上最短闭测地线$p\in\mathcal{P}$的长度。上述z_X被称作塞尔伯格泽塔函数。

注4.11　定理4.10是Cartier与Voros[60]基于原始塞尔伯格迹公式[62]的推广。迹公式的初始形式与上述迹公式的证明均见文献[60]。迹公式的初始版本要求$h(r)$在$|\mathrm{Im}(r)|<\frac{1}{2}+\delta$上全纯,且满足$h(\rho)=h(-\rho)$,$|h(\rho)|\leq A(1+|\rho|)^{-2-\delta}$。文献[60]的工作使得新的塞尔伯格迹公式将不再要求$h(\rho)$是偶函数,仅需满足上述收敛性条件即可。

利用塞尔伯格迹公式(47)可以得到配分函数$\Theta_X(t)\coloneqq\mathrm{Tr}\mathrm{e}^{-tP_X}$的展开。取$h(\rho)=\mathrm{e}^{-t\rho}$,

$$\Theta_X(t)=(2g-2)\left(t^{-2}+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(t+2\pi m)^{-2}\right)+$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin(t\kappa)\mathrm{d}\log z_X\left(\frac{1}{2}+\kappa-\mathrm{i}0\right),$$

配分函数奇点出现在$t=\pm\mathrm{i}m\tau(p)$,由第2项积分贡献知其均是极点,留数为$\frac{1}{2\pi}R_{p,m}$,其中$R_{p,m}=\frac{\tau(p)}{2\sinh(m\tau(p)/2)}$。因此,可以说常负曲率紧黎曼曲面上配分函数的发散性质由其上闭周期轨给出。对于更一般的流形维数,Gutzwiller迹公式描述了半经典情形($\hbar\to0$)下,在d维黎曼流形上有势场($V(x)\neq0$)中类似的展开。

定理4.12[51-52]　(Gutzwiller迹公式)

$$N(E)=\sum_n\theta\left(E-E_n\right)\sim\int\frac{\mathrm{d}^dq\mathrm{d}^dp}{(2\pi\hbar)^d}\theta(E-H(p,q))+$$
$$\mathrm{Im}\sum_{o\in\text{素周期轨}}\frac{\mathrm{i}T_o}{\pi\hbar}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\frac{W_o(E)}{\hbar}-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\aleph_{o,r}}}{\sqrt{\left|\det_{\perp}\left[\boldsymbol{I}_{2d}-\boldsymbol{M}_o^r\right]\right|}},$$

其中$N(E)$是能量E下的计数密度函数,$H(p,q)$是哈密顿函数。T_o、W_o、$\aleph_{o,r}$和$\boldsymbol{M}_o^r$分别表示经典轨道o的周期、作用量、马斯洛夫型(Maslov-type)指标和庞加莱映射矩阵。

可以看到,Gutzwiller迹公式给出了量子态密度的渐近展开,且展开项系数由经典运动的周期轨给出。下面简述其中一种证明思路以解释渐近行为是如何得到的[63]。

当$\hbar\to0$时,可利用WKB方法将二阶薛定谔方程转化为2个一阶微分方程:哈密顿-雅可比方程与Madlung流方程,从而求出半经典情形下传播子$K_{sc}(q,q',t)$的具体形式

$$K_{sc}\left(q,q',t\right)=\sum_{\gamma}\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1}\hbar)^{d/2}}\cdot$$
$$\left|\det\left(-\partial_q\partial_{q'}R_\gamma\left(q,q',t\right)\right)\right|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}R_\gamma(q,q',t)/\hbar-\sqrt{-1}\pi\aleph_\gamma(q,q',t)/2}=$$
$$\sum_{\gamma}K_\gamma\left(q,q',t\right),$$

式中:γ取遍所有时刻t时由q到达q'的路径;R_γ是拉格朗日量在$\gamma(t')$上关于时间t'的积分;$\aleph_\gamma$是路径γ的马斯洛夫型指标。同时,格林函数$G(q,q',E)$作为传播子关于时间t的拉普拉斯变换,可写为

$$G(q,q',E)=\sum_{\gamma}G_{\gamma}\left(q,q',E\right)=\sum_{\gamma}\frac{1}{\mathrm{i}h}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}Et}{h}}K_{\gamma}(q,q',t)\mathrm{d}t。$$

对于短时间内就由 q 到达 q' 的路径,可以直接利用近似计算得到其格林函数,计算对应的计数密度函数,从而得到Gutzwiller迹公式中第1项。对于从 q 到 q' 的长时间轨道,将 $K_{\gamma}(q,q',t)$ 的具体函数表达式代入上式,对 G_{γ} 运用稳定相原理(stationary phase principle),可以得到长时间轨道下格林函数 G_{γ} 的渐近形态。再计算格林函数的迹 $\mathrm{Tr}G(q,q',E)=\int_{M}G(q,q,E)\mathrm{d}q$。

选取合适的坐标变换,运用稳定相原理即得到格林函数的迹的渐近展式。以周期轨道作为求和项,最后利用计数密度函数与格林函数迹的关系式

$$N(E):=\sum_{n}\theta\left(E-E_{n}\right)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\mathrm{Tr}G(q,q',E+\mathrm{i}\varepsilon)\right),$$

以此得到Gutzwiller迹公式右端第2项。

根据上述证明方法,可将渐近行为"~"理解为由2次运用稳定相原理得到的。然而一般情况下配分函数的复现结构仍不清楚,在此以Voros[64]提出的如下猜想结束本节。

猜想 4.13[64] (1)如果关于(实或复周期的)经典闭周期轨 γ 的经典作用量 W_0 是离散的,那么其对应配分函数可以被解析延拓为复平面上的亚纯函数,且奇点位于 $\tau=\mathrm{i}W_o$;(2)对于复解析势能下的量子运动,其配分函数是复现的。

4.2 规范理论:陈-赛蒙斯理论

规范理论博大精深,在此仅部分提及陈-赛蒙斯理论(Chern-Simons theory,简记为C-S理论)。C-S理论是一个在数学与理论物理领域都具有深远影响的理论框架,对经典的C-S理论进行复化可以得到所谓的复C-S理论(complex Chern-Simons theory)。陈-赛蒙斯不变量最初是由数学家陈省身和赛蒙斯于1974年提出的,C-S理论是Witten[65]提出的一种三维流形上的拓扑场论。本文简要介绍一下经典的陈-赛蒙斯理论,对细节感兴趣的读者可以参考[66-68]等文献。

4.2.1 经典陈-赛蒙斯理论

假定 G 是一个单连通的矩阵紧李群,考虑紧致可定向三维流形 M 及其主丛 $\pi:P\to M$。需要说明的是,在上述条件下,主丛总存在一个整体的截面(global section),因而该主丛是平凡的。

可以在 M 上定义所谓的C-S作用量(Chern-Simons action):

$$S_{\mathrm{CS}}=\frac{1}{8\pi^{2}}\int\mathrm{Tr}\left(A\wedge\mathrm{d}A+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)\ [\mathbb{Z}]。$$

其中规范联络形式(gauge connection) A 是取值为李代数的1-形式,d是其外微分,$\wedge$ 表示外积运算,Tr表示规范群李代数上的迹运算。被积的3-形式 $\mathrm{Tr}\left(A\wedge\mathrm{d}A+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)$ 称为陈-赛蒙斯形式(Chern-Simons form)。主丛上的曲率形式为取值于李代数的2-形式

$$F=\mathrm{d}A+A\wedge A。$$

对C-S作用量做变分,可以得到 $\delta S_{\mathrm{CS}}=2\int\mathrm{Tr}\left((\mathrm{d}A+A\wedge A)\wedge\delta A\right)$。这说明,作用量变分为零当且仅当曲率为零,即 $\delta S_{\mathrm{CS}}=0\Leftrightarrow F=0$。所以,在该理论框架下所有平坦 G 不变联络对配分函数的渐近估计十分重要。进一步通过 M 上基本群的和乐群表示,可将所有的平坦 G 不变联络组成的空间等价为李群 G 在流形 M 上的特征簇

$$\left\{M\text{上平坦}G\text{不变联络}\right\}=\mathrm{Hom}(\pi_{1}(M),G)/G。\tag{48}$$

即对C-S理论配分函数渐近估计的主项可以化为流形的基本群的不可约表示问题。

4.2.2 复陈-赛蒙斯理论

对C-S理论的复化可以理解为对规范李群以及路径积分的复化。为叙述简单起见,在本节以及以后的小节中,将李群 G 固定为 $SU(2)$ 或其复化李群 $SL(2,\mathbb{C})$。经典C-S理论配分函数的路径积分表示为 $Z_{\mathrm{CS}}(M)=\int_{\mathcal{A}_{SU(2)}}DA\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kS_{CS}(A)}$,其中 k 是一个常数,称为级(level),$\mathcal{A}_{SU(2)}$ 是 M 上 G 不变联络组成的空间。对李群 $SU(2)$ 和级 k 复化,并取合适的最速下降的方向 $\Gamma_{SU(2)}$,可以得到复C-S理论下的路径积分

$$Z_{\mathrm{CS}}(M)=\int_{\Gamma_{SU(2)}\subset\tilde{\mathcal{A}}_{SL(2,\mathbb{C})}}DA\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kS_{\mathrm{CS}}(A)},\tag{49}$$

其中 $\tilde{\mathcal{A}}_{SL(2,\mathbb{C})}$ 代表 M 中在规范群 $SL(2,\mathbb{C})$ 下不变的联络空间的万有复叠[69]。需要注意的是,这个路径积分一般来讲数学上不是良定义的,因而有一系列对这个路径积分的"等价"研究。一个简单可计算而又深刻的例子是艾里积分的复化,详见文献[70]。对于式(49)的渐近展开的主项,可以像上一小节一样解释为流形 M 上的 $SL(2,\mathbb{C})$ 特征簇。

4.2.3　复现理论在陈-赛蒙斯理论中的应用——Seifert纤维整数同调球

复现理论运用到复C-S理论,主要关注的是如何通过复现理论来处理复C-S理论中配分函数的超越级数渐近展开,并探索这些级数背后的物理与拓扑的含义。该联系首先由Garoufalidis[71]提出,同时列出了一系列猜想。随着复现理论在数学物理中的作用越来越明显,数学物理学家对该联系的研究也逐渐成熟。近十多年来出现了大量工作,见文献[69,72-75]等。由于路径积分的复杂性,一些三维流形不变量的复现结构都以猜想的形式呈现,这也为复现理论本身提供了研究方向。本小节介绍一个严格可算的例子,说明在C-S理论中运用复现理论是具有重要意义的。

固定三维流形为Seifert纤维整数同调球(Seifert fibered integral homology sphere, SFIHS)。这类流形有很多等价的描述,例如,可以对S^3中的纽结做手术来构造SFIHS。对互素的$p_1,\cdots,p_r,(r\geqslant 3)$,总存在$q_1,\cdots,q_r$,使得$\sum_{j=1}^{r}q_j\hat{p}_j=1$其中$\hat{p}_j=\frac{P}{p_j}=\frac{\Pi_{i=1}^{r}p_i}{p_j}$。按照图16所示做手术,可得到一个SFIHS。不难证明,该流形的拓扑不依赖于$q_1,\cdots,q_r$的选取。记这样的SFIHS为$\sum(p_1,\cdots,p_r)$。特别地$\sum(2,3,5)$即所谓的庞加莱三维同调球。本小节将详细地讨论$\sum(2,3,7)$,更一般的结论将会在文献[76]中给出。

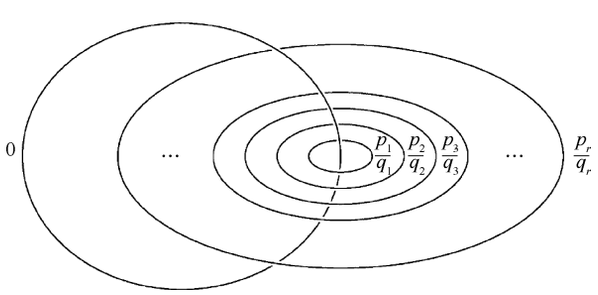


图16　S^3中对纠结做手术得到Seifert纤维整数同调球示意

在三维流形SFIHS上,固定李群$SL(2,\mathbb{C})$,复C-S理论的配分函数可由Gukov-Pei-Putrov-Vafa(GPPV)不变量表示[69,72],这也使得该理论可以被完全解析地计算出来。此处"计算"指非数值计算:对于复杂的纽结,如4_1、5_2等,其复C-S理论的配分函数不容易将其渐近展开每项都写出,可将复现理论数值地应用,如对截断级数定义波雷尔平面上的有理函数,再对截断级数加项,从而研究有理函数奇点的位置变化。数值方法详见文献[17,74]。

对于$\sum(p_1,\cdots,p_r)$,GPPV不变量为部分Θ函数$\Psi_{p_1,\cdots,p_r}(q)=\sum_{j\geqslant 0}\chi_j q^{\frac{j^2}{4P}}$,其中$\chi_j$是由生成函数$G_{p_1,\cdots,p_r}(z)=\frac{1}{(z^P-z^{-P})^{r-2}}\prod_{j=1}^{r}\left(z^{\hat{p}_j}-z^{-\hat{p}_j}\right)=(-1)^r\sum_{j\geqslant j_0}\chi_j z^j$定义的。

对$\sum(2,3,7)$而言,

$$\Psi_{2,3,7}(q)=\Theta(\tau;f)\coloneqq\sum_{n>0}f(n)\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}n^2\tau}{168}}\qquad(50)$$

其中f是以$2P=84$为周期的奇函数。

n	1	13	29	41	43	55	71	83
$f(n)$	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1

运用复现理论,可将式(50)中Θ函数表示为

$$\Theta(\tau,f)=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}+\mathcal{L}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\right)\mathcal{B}\tilde{\Theta}(\tau),$$

其中$q=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}$,$\tilde{\Theta}(\tau)$是一个阶乘增长的关于$\tau$的发散级数[77]

$$\tilde{\Theta}(\tau)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}L(-2n,f)\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{2P}\right)^n\tau^n。\qquad(51)$$

这个级数对应于平凡的平坦联络,也即C-S作用量为零的联络。等价地,从$SL(2,\mathbb{C})$表示的角度来看,对应于平凡表示。定义波雷尔变换为

$$\mathcal{B}:\sum_{n\in N}c_n\tau^n\mapsto\sum_{n\in N}c_n\frac{\xi^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

其中$\mathcal{N}=a+b\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,$a,b\in\mathbb{R}_{>0}$。

进一步,通过计算$\mathcal{B}\tilde{\Theta}(\tau)$可以得到其波雷尔平面上奇点位置集

$$\xi_n=\frac{\pi\mathrm{i}n^2}{2P},\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

其奇性可以由异形算子表示$\Delta_{\xi_n}\tilde{\Theta}=2\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}\hat{f}(n)\tau^{-\frac{1}{2}}$,其中$\hat{f}(n)=\frac{1}{\sqrt{2P}}\sum_{l\in\mathbb{Z}/2P\mathbb{Z}}f(l)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nl/2P}$为$f$的离散傅里叶变换。直接计算得到

$$\Theta(\tau;f)-\mathcal{L}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}B\tilde{\Theta}(\tau)=\left(\frac{\tau}{\mathrm{i}}\right)^{-\frac{1}{2}}\Theta(-\tau^{-1};\hat{f})=$$

$$d_1\left(\frac{\tau}{\mathrm{i}}\right)^{-\frac{1}{2}}\Theta(-\tau^{-1};f_1)+d_2\left(\frac{\tau}{\mathrm{i}}\right)^{-\frac{1}{2}}\Theta(-\tau^{-1};f_2)+$$

$$d_3\left(\frac{\tau}{\mathrm{i}}\right)^{-\frac{1}{2}}\Theta(-\tau^{-1};f_3),\tag{52}$$

其中

n	1	13	29	41	43	55	71	83
f_1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1
n	5	19	23	37	47	61	65	79
f_2	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
n	11	17	25	31	53	59	67	73
f_3	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1

(53)

d_1、d_2、d_3为计算离散傅里叶变换时所得的系数,在C-S理论中称为Reidemeister Torsion。式(52)的最后2行为GPPV不变量Ψ的斯托克斯现象,这3项分别对应3个不同的平坦联络A_1、A_2、A_3,也对应于不同的C-S作用量

$S_{\mathrm{CS}}(A_1)=-\frac{1}{168}$, $S_{\mathrm{CS}}(A_2)=-\frac{25}{168}$, $S_{\mathrm{CS}}(A_3)=-\frac{121}{168}$。

从$\sum(2,3,7)$基本群的$SL(2,\mathbb{C})$表示的角度讲(回忆式(48)),这3项对应于特征簇

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(\sum(2,3,7)),SL(2,\mathbb{C}))/SL(2,\mathbb{C})$$

中3个不同的连通分支。需要说明的是,当$r=3$时,这些连通分支都是零维的。也就是说,$\sum(2,3,7)$模掉$SL(2,\mathbb{C})$群作用的不可约表示的个数为3。

另外,考虑$SL(2,\mathbb{C})$的2个子群$SU(2)$和$SL(2,\mathbb{C})$下的任意SFIHS基本群的不可约表示,有如下结论[73]:

$$\pi_0(\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\pi_1,SL(2,\mathbb{C}))/SL(2,\mathbb{C}))\cong \pi_0(\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\pi_1,SU(2))/SU(2))\sqcup \pi_0(\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\pi_1,SL(2,\mathbb{R}))/SL(2,\mathbb{R}))。$$

可以证明,复现理论也给出了一种区分不同表示的方法[76]。事实上,只需计算$\lim\limits_{\substack{\tau\to 0\\ \tau\in\mathbb{H}}}\Theta(\tau,f_i)$是否为零即可。用如上判别法的原因是十分深刻的:知道GPPV不变量在变量q趋于$\mathrm{e}^{2\pi i/k}$时即得到所谓的级为k的Witten-Reshetikhin-Turaev(WRT)不变量[73]。根据猜想,WRT不变量强调其超越级数展开仅由$SU(2)$不可约表示贡献,又由于周期函数f_i的支撑集的特殊性,可知$\lim\limits_{\substack{\tau\to -k\\ \tau\in\mathbb{H}}}\Theta(\tau,f_i)=\mathrm{e}^{2\pi i k S_{\mathrm{CS}}(A_i)}\lim\limits_{\substack{\tau\to 0\\ \tau\in\mathbb{H}}}\Theta(\tau,f_i)$。

作为结论,运用复现理论,可以说明对于$\sum(2,3,7)$的$SL(2,\mathbb{C})$不可约表示有3个(见式(52)、(53))。如果进一步取极限,则得到

$$\lim_{q\to \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{k}}}\Theta(\tau;f)-\mathcal{L}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}\mathcal{B}\tilde{\Theta}(\tau)=$$

$$d_1\left(\frac{1}{\mathrm{i}k}\right)^{-\frac{1}{2}}\lim_{q\to \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{k}}}\Theta(-\tau^{-1};f_1)+$$

$$d_2\left(\frac{1}{\mathrm{i}k}\right)^{-\frac{1}{2}}\lim_{q\to \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{k}}}\Theta(-\tau^{-1};f_2)+$$

$$d_3\left(\frac{1}{\mathrm{i}k}\right)^{-\frac{1}{2}}\lim_{q\to \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{k}}}\Theta(-\tau^{-1};f_3)=$$

$$d_1\left(\frac{1}{\mathrm{i}k}\right)^{-\frac{1}{2}}\lim_{\tau\to -k}\Theta(\tau;f_1)+d_2\left(\frac{1}{\mathrm{i}k}\right)^{-\frac{1}{2}}\lim_{\tau\to -k}\Theta(\tau;f_2)+$$

$$d_3\left(\frac{1}{\mathrm{i}k}\right)^{-\frac{1}{2}}\lim_{\tau\to -k}\Theta(\tau;f_3)=$$

$$d_2(\mathrm{i}k)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{25}{168}2\pi i k}L(0,f_2)+d_3(\mathrm{i}k)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{121}{168}2\pi i k}L(0,f_3)。$$

这是由于式(51),以及$\lim\limits_{\tau\to 0}\Theta(\tau;f_1)=0$。上述过程意味着,在3个$SL(2,\mathbb{C})$表示中,$A_2$、$A_3$对应的表示可以共轭为$SU(2)$表示,$A_1$只能共轭为$SL(2,\mathbb{R})$表示,因而不出现在WRT不变量中。在这里也证明了在例$\sum(2,3,7)$下的渐近展开猜想[78]:

$$\lim_{q\to \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{k}}}\Theta(\tau;f)\sim\mathcal{L}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}\mathcal{B}\tilde{\Theta}\left(\frac{1}{k}\right)+ \mathrm{e}^{-\frac{25}{168}2\pi i k}L(0,f_2)d_2(\mathrm{i}k)^{\frac{1}{2}}+ \mathrm{e}^{-\frac{121}{168}2\pi i k}L(0,f_3)d_3(\mathrm{i}k)^{\frac{1}{2}},\ k\to+\infty,$$

其中右端展开第一项为平凡表示(平凡的平坦联络),另外2项来自$SU(2)$不可约表示($SU(2)$平坦联络)的贡献。

4.3 拓扑弦理论

在20世纪80年代就已知弦理论的微扰展开是渐近的,对其非微扰效应的探讨一直是弦理论的核心问题。拓扑弦理论因为镜像对称现象更是备受关注,拓扑弦可以由非线性σ-模型来实现,镜像对称将拓扑弦理论分为A-模型(靶空间为辛流形的格罗莫夫-威腾理论)和B-模型(靶空间为复流形的复结构形变理论)。拓扑弦理论非微扰现象亦和陈-赛蒙斯理论、矩阵模型(matrix model)有深刻的联系。

基于非线性σ-模型的拓扑弦理论将弦世界面映射到靶空间卡拉比-丘流形,其配分函数为关于弦耦合常数λ的渐近展开。从复现理论角度来讲,一个自然问题是如何从配分函数的微扰渐近展开给出这个理论的非微扰项。首先,拓扑弦配分函数$\mathcal{Z}$

和自由能$\mathcal{F}$关于拓扑弦耦合常数λ的渐近展开为

$$Z=\exp\mathcal{F}=\exp\sum_{g=0}^{\infty}\lambda^{2g-2}\mathcal{F}^{(g)}。$$

$\mathcal{F}^{(g)}$的严格数学基础为格罗莫夫-威腾(Gromov-Witten)理论。Bershadsky等[79-80]指出$\mathcal{F}$应满足全纯反常方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{F}^{(g)}}{\partial S^{zz}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{h=1}^{g-1}D_z\mathcal{F}^{(h)}D_z\mathcal{F}^{(g-h)}+\dfrac{1}{2}D_zD_z\mathcal{F}^{(g-1)},\\ 0=\dfrac{\partial\mathcal{F}^{(g)}}{\partial K_z}+S^z\dfrac{\partial\mathcal{F}^{(g)}}{\partial S}+S^{zz}\dfrac{\partial\mathcal{F}^{(g)}}{\partial S^z},\end{cases}\tag{54}$$

其中D_z表示协变导数,S^{zz}、S^z、S、K_z是一些几何量。基于全纯反常方程,近来有大量文献[81-87]致力于拓扑弦配分函数复现理论的研究,并提出了若干有趣的猜想。下面介绍在这个方向数学严格化的一些尝试。

Alim等[88]引入了完全自由能,并且在去掉g=0,1的贡献后重新定义了

$$\mathcal{F}(S^{zz},S^z,S,K_z;z,\lambda)=\sum_{g=2}^{\infty}\lambda^{2g-2}\mathcal{F}^{(g)}(S^{zz},S^z,S,K_z;z)。$$

考虑重新参数化$\tilde{S}^{zz}=\varepsilon^{2/3}S^{zz}$, $\tilde{\lambda}=\dfrac{\lambda}{\varepsilon}$,这样可以得到

$$\mathcal{F}_s(\lambda_s)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}(\tilde{S}^{zz},S^z,S,K_z;z,\tilde{\lambda})=\sum_{g=2}^{\infty}a_g\lambda_s^{2g-2},$$

其中$\lambda_s^2=\lambda C_{zzz}^2(S^{zz})^3$为重新耦合。在上述双尺度变换极限全纯反常方程(54)转化为方程

$$\theta_{\lambda_s}^2\mathcal{F}_s+(\theta_{\lambda_s}\mathcal{F}_s)^2+2\left(1-\frac{2}{3\lambda_s^2}\theta_{\lambda_s}\mathcal{F}_s\right)+\frac{5}{9}=0,\ \theta_{\lambda_s}:=\lambda_s\frac{\partial}{\partial\lambda_s}。$$

为了操作简便起见,进一步使用坐标变换$z=\dfrac{1}{3\lambda_s^2}$,则上述方程等价于

$$z^2(g''+(g')^2+2g')+\frac{5}{36}=0,\tag{55}$$

其中$\tilde{g}(z)=\tilde{g}(\dfrac{1}{3\lambda_s^2})=\mathcal{F}_s(\lambda_s)$是式(55)的一个形式幂级数解,是1-Gevrey发散的。

接下来分析这个级数的复现性质。事实上,利用关于艾里方程的一般结论以及定理1.65,可以证明,存在另一个形式幂级数解$\tilde{f}$,使得异形算子Δ_ω的作用为

$$\Delta_{2m}\tilde{g}=\begin{cases}-\mathrm{i}e^{\tilde{f}-\tilde{g}}, & m=1,\\ 0, & m=2,3,\cdots,\end{cases}$$

$$\Delta_{-2m}\tilde{f}=\begin{cases}-\mathrm{i}e^{\tilde{g}-\tilde{f}}, & m=1,\\ 0, & m=2,3,\cdots。\end{cases}$$

算子Δ_ω^+的作用为

$$\Delta_{2m}^+\tilde{g}=-\frac{\mathrm{i}^m}{m}e^{m(\tilde{f}-\tilde{g})},\quad \Delta_{-2m}^+\tilde{f}=-\frac{\mathrm{i}^m}{m}e^{m(\tilde{g}-\tilde{f})}。$$

再结合波雷尔求和,并利用定理1.66,可以得到对应于全纯反常方程(55)的斯托克斯现象。

定理4.14　取变量$0<v<\dfrac{\pi}{2}$以及一方向区域$I_0^+=(-\pi,-v)$,存在$\beta_g>0$使得$g^+=\mathcal{S}^{I_0^+}\tilde{g}$在区域$\mathcal{D}(I_0^+,\beta_g)$中解析。对于另外一个方向$I_0^-=(v,\pi)$,$g^-=\mathcal{S}^{I_0^-}\tilde{g}$在区域$\mathcal{D}(I_0^-,\beta_g)$中解析,这里的$\mathcal{D}$是前文定义黎曼面上的区域$\tilde{\mathcal{D}}$(详见式(12))。其斯托克斯现象为

$$g^+(z)=g^-(z)-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{i}^n}{n}e^{-2nz}e^{n(f(z)-g^-(z))},$$
$$z\in\mathcal{D}(I_0^+,\beta_g)\cap\mathcal{D}(I_0^-,\beta_g),$$

式中函数$f(z)=\mathcal{S}^{I_0^+}\tilde{f}=\mathcal{S}^{I_0^-}\tilde{f}$在区域$\mathcal{D}(I_0^+,\beta_g)\cap\mathcal{D}(I_0^-,\beta_g)$中解析。另外方程(55)的一般解可以表达成一个超越级数。在解常微分方程时,求出的超越级数解称为形式积分(参考文献[26])。

$$G(z;\sigma_1,\sigma_2)=\tilde{g}+\sigma_1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sigma_2^n e^{-2nz}e^{n(\tilde{f}-\tilde{g})},$$

在这里σ_1、σ_2是任意的复数。将σ_1、σ_2视为复变量,可以计算G的联结方程。

定理4.15　联结方程

$$\Delta_2G(z;\sigma_1,\sigma_2)=-\mathrm{i}e^{2z}\frac{\partial}{\partial\sigma_2}G(z;\sigma_1,\sigma_2),$$

$$\Delta_{-2}G(z;\sigma_1,\sigma_2)=$$
$$-\mathrm{i}e^{-2z}\left(\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_1}G(z;\sigma_1,\sigma_2)-\sigma_2^2\frac{\partial}{\partial\sigma_2}G(z;\sigma_1,\sigma_2)\right)。$$

这个定理给出异形导数和通常导数之间的关系。

取I_0^+和I_0^-如定理4.14所要求的条件一样,类似地可以要求$I_\pi^+=(0,\pi-v)$和$I_\pi^-=(\pi+v,2\pi)$。当$z\in\mathcal{D}(I_0^+,2\beta_g+\beta_f)\cap\mathcal{D}(I_0^-,2\beta_g+\beta_f)$, $|\sigma_2|<\dfrac{1}{2}e^{\mathrm{Re}(2z)}$, $|\sigma_2-\mathrm{i}|<\dfrac{1}{2}e^{\mathrm{Re}(2z)}$,形式积分$G(z,\sigma_1,\sigma_2)$的斯托克斯现象可以描述为

$$\mathcal{S}^{I_0^+}G(z;\sigma_1,\sigma_2)=\mathcal{S}^{I_0^-}G(z;\sigma_1,\sigma_2-\mathrm{i})。$$

当$z\in\mathcal{D}(I_\pi^+,2\beta_g+\beta_f)\cap\mathcal{D}(I_\pi^-,2\beta_g+\beta_f)$并且$|\sigma_2|<\dfrac{1}{2}e^{\mathrm{Re}(2z)}$, $\left|\dfrac{\sigma_2}{1-\mathrm{i}\sigma_2}\right|<\dfrac{1}{2}e^{\mathrm{Re}(2z)}$,形式积分$G(z,\sigma_1,\sigma_2)$的斯托克斯现象可以描述为

$$\mathcal{S}^{I_\pi^+}G(z;\sigma_1,\sigma_2)=$$

$$\mathcal{S}^{I_{\pi}^{-}}G\left(z;\sigma_1+\log(1-\mathrm{i}\sigma_2),\frac{\sigma_2}{1-\mathrm{i}\sigma_2}\right)。$$

定理 4.16 波雷尔和

$$\mathcal{S}^{I_0^{+}}G(z;a,b+\frac{\mathrm{i}}{2})=\mathcal{S}^{I_0^{-}}G(z;a,b-\frac{\mathrm{i}}{2})$$

是实解析的,其中$a,b\in\mathbb{R}$。

定理 4.17 波雷尔和

$$\mathcal{S}^{I_{\pi}^{+}}G(z;a+\mathrm{i}\frac{\theta}{2},-\mathrm{i}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))=$$

$$\mathcal{S}^{I_{\pi}^{-}}G(z;a-\mathrm{i}\frac{\theta}{2},\mathrm{i}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}))$$

是实解析的,其中$a\in\mathbb{R}$, 以及

$$-\arccos(1-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{4\mathrm{Re}z})<\theta<\pi-\arccos(1-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{4\mathrm{Re}z})。$$

5 展 望

近20年来,在数学物理领域有大量利用复现理论研究各种量子场论问题的文献,这些文献大都富有启发性,对于发展和反思复现理论本身都大有助益。如何将这些文献中的结论给予数学的严格化也是一个亟待研究的课题。上文只是笔者在这个方向的若干初步尝试。波雷尔平面上的奇点结构或许是理解各种对偶的一种新的方式。

Kontsevich[89]证明任何泊松流形都存在形变量子化。特别地,Kontsevich[90]给出了$\mathbb{R}^d$上泊松结构形变量子化星积的显式表达,这涉及带标记点的全纯圆盘模空间上的某种典则微分形式的积分,Kontsevich称之为权。这些权具有万有性质,Kontsevich猜测其可以表示成MZV的整系数线性组合并被Banks等[91]证明。根据前文所述Écalle关于MZV和模之间的关系,一个有趣的问题是Kontsevich形变量子化公式中的权如何用模来刻画,这也暗示了费曼图和模之间可能存在某种紧密的联系。

和形变量子化相关的另一个问题是,在Kontsevich的构造中,所有的星积表达式都是形式的,也就是说没有涉及星积的收敛性这一基本性问题[92],如何得到一个形式幂级数空间在星积下有某种收敛性的子代数是十分有意义的。这也是代数复现形变量子化工作的动机[93]。

在李理论中,李代数的同伦化版本为强同伦李代数,也称为L_{∞}代数[94]。基于文献[29],笔者相信从模的观点研究L_{∞}代数是有益的。

Witten[95]将莫尔斯理论解释为超对称量子力学,这不仅定义了影响深远的莫尔斯同调,为辛拓扑中Floer同调论的建立奠定了基础,而且也给出了莫尔斯理论和霍奇理论之间的深刻联系。但是依作者看来,即使在40年后的今天,此工作依然有待研究之处。粗略地说,定义莫尔斯同调时,只是用到了该理论基态(黎曼流形上的微分形式)在临界点附近渐近展开的首项,而为了理解该理论的隧穿效应,需要知道完整的渐近展开。这可称为复现莫尔斯理论,Getmanenko[96]在此方向进行了初步的探索。

上文中提及的GPPV不变量的态积分表示涉及量子双对数函数的乘积。在量子双对数函数复现理论分析的基础上,探讨GPPV不变量将大大加深对复陈-赛蒙斯理论的理解。

参 考 文 献

[1] POINCARÉ H. Les nouvelles méthodes de la mécanique celeste[M]. Paris:Gauthier-Villars,1892,1893,1899.

[2] RAMIS J P. Séries divergentes et théories asymptotiques, Divergent series and asymptotic theories [J]. Bulletin De La Societe Mathematique De France, 1993,121:74.

[3] RAMIS J P. Poincaré et les développements asymptotiques (première partie), Poincaré and asymptotic expansions (first part)[J]. Gazette Des Mathématiciens,2012,133:33-72.

[4] RAMIS J P. Les développements asymptotiques après Poincaré: continuité et ...divergences[J]. Gazette Des Mathématiciens,2012,134:17-36.

[5] BOREL E. Lecons sur les series divergentes[M]. Paris: Gauthier-Villars,1901.

[6] HARDY G H. Divergent series[M]. Oxford:Clarendon Press,1949.

[7] 王竹溪,郭敦仁.特殊函数概论[M].北京:北京大学出版社,2000.

[8] DIMOFTE T,GUKOV S,LENELLS J. Exact results for perturbative Chern-Simons theory with complex gauge group [J]. Communications in Number Theory and Physics, 2009,43:363-443.

[9] GAROUFALIDIS S, KASHAEV R M. Resurgence of Faddeev's quantum dilogarithm[EB/OL].[2023-08-28]. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:221370641.

[10] ÉCALLE J. Les fonctions resurgentes [M]. Paris: Université de Paris-Sud,1981.

[11] ÉCALLE J. Cinq applications des fonctions resurgentes [J]. Publications Mathématiques d'Orsay,1984,84 T62.

[12] VOROS A. The return of the quartic oscillator. The

complex WKB method[J]. Annales de I'I H P, section A,1983,39(3):211-338.
[13] ÉCALLE J. Guided tour through resurgence theory[EB/OL]. [2023-08-29]. https://www. imo. universite-paris-saclay.fr/ ~ jean.ecalle/fichiersweb/WEB_tour_resur.pdf.
[14] CANDELPERGHER B, NOSMAS J C, PHAM F. Approche de la resurgence [M]. Paris: Hermann, Editeurs des Sciences et des arts,1993.
[15] DELABAERE E, PHAM F. Resurgent methods in semi-classical asymptotics[J]. De L Institut Henri Poincare-Probabilites Et Statistiques,1999,71:1-94.
[16] MITSCHI C, SAUZIN D. Divergent series, summability and resurgence: I. Monodromy and resurgence [M]. Springer International Publishing,2016.
[17] ANICETO I, BASAR G, SCHIAPPA R. A primer on resurgent transseries and their asymptotics[J]. Physics Reports-review Section of Physics Letters, 2019, 809: 1-135.
[18] COSTIN O. Asymptotics and Borel summability[M]. Boca Raton:Chemical Rubber Company Press,2008.
[19] DORIGONI D. An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus[EB/OL]. [2023-09-01]. arXiv: 1411.3585.
[20] DELABAERE E. Divergent Series, summability and resurgence III:Resurgent Methods and the first Painlevé Equation[M]. Heidelberg:Springer-Verlag,2016.
[21] MALGRANGE B. Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systémes dynamiques [J]. Astérisque, 1982,92/93(582):59-73.
[22] MALGRANGE B. Introduction aux travaux de J Écalle [J]. Enseignement Mathematique,1985,31:261-282.
[23] MARIÑO M. Lectures on non-perturbative effects in large N gauge theories, matrix models and strings[J]. Fortschritte Der Physik,2014,62:455-540.
[24] MARIÑO M. Instantons and large N. An introduction to non-perturbative methods in quantum field theory[M]. Cambridge:Cambridge University Press,2015.
[25] PHAM F. Introduction à la resurgence quantique[J]. Astérisque,1987,145/146(3):103-110.
[26] SAUZIN D. Introduction to 1-summability and resurgence[EB/OL].[2023-09-09]. arXiv:1405.0356.
[27] RICHAUD L M. Divergent series, summability and resurgence: II. Simple and multiple summability[M]. Springer International Publishing,2016.
[28] KIMURA T. Explicit description of the Zassenhaus formula[J]. Progress of Theoretical and Experimental Physics,2017,2017(4):041A03.
[29] LI Y, SAUZIN D, SUN S. The Baker-Campbell-Hausdorff formula via mould calculus[J]. Letters in Mathematical Physics,2019,109(3):725-746.
[30] SAUZIN D. Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials[J]. Renormalization and Galois theories,2009,15:83-163.
[31] ÉCALLE J, VALLET B. Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms [J]. Mathematische Zeitschrift,1998,229(2),249-318.
[32] CARTIER P. Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents [J]. Asterisque-societe Mathematique De France,2002,282:137-174.
[33] DELIGNE P. Multizêta, d'après Francis Brown[J]. Société Mathématique de France,2013,352:161-185.
[34] SCHNEPS L. ARI, GARI, ZIG and ZAG, an introduction to Écalle's theory of multiple zeta values [EB/OL]. [2023-09-09]. arXiv:1507.01534.
[35] RACINET G. Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de 1' unité [J]. Publications Mathématiques De I'Ihés,2002,95:185-231.
[36] ÉCALLE J. ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmetique des multizetas:un premier bilan[J]. Journal De Theorie Des Nombres De Bordeaux,2003,15(2):411-478.
[37] AOKI T, KAWAI T, TAKEI Y. WKB analysis of Painleve transcendents with a large parameters. II. Multiple-scale analysis of Painleve transcendents[C]// Structure of solutions of differential equations (Katata/Kyoto, 1995). Singapore: World Science Publication, 1996.
[38] KAWAI T, TAKEI Y. WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter I[J]. Advances in Mathematics,1996,118(1):1-33.
[39] GAROUFALIDIS S, ITS A, KAPAEV A, et al. Asymptotics of the instantons of Painleve I [J]. International Mathematics Research Notices,2012,2012 (3),561-606.
[40] ANICETO I, SCHIAPPA R, VONK M. The resurgence of instantons in string theory[J]. Communications in Number Theory and Physics,2012,6(2):339-496.
[41] LAZZARINI L, MARCO J P, SAUZIN D. Measure and capacity of wandering domains in Gevrey near-integrable exact symplectic systems[J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 2019, 257 (1235): vi+110.
[42] BOUNEMOURA A, FÉJOZ J. KAM, α-Gevrey regularity and the α-Bruno-Rüssmann condition [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa, 2019, 19(4):1225-1279.
[43] VOROS A. Spectre de I' équation de Schrödinger et

méthode BKW spectrum of the Schrödinger equation and the BKW method[M]. Paris: Publ Math d'Orsay, 1982.

[44] VOROS A. Problème spectral de Sturm-Liouville: le cas de l'oscillateur quartique[J]. Astérisque, 1982, 25(105-106): 602, 95-104.

[45] PHAM F. Introduction à la résurgence quantique, (d'après Écalle et Voros)[J], Astérisque, 1987, 145/146(656): 103-110.

[46] DELABAERE E, DILLINGER H, PHAM F. Resurgence de Voros et periodes des courbes hyperelliptiques[J]. Annales De I'Institut Fourier, 1993, 43: 163-199.

[47] KAWAI T, TAKEI Y. Algebraic analysis of singular perturbation theory [M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 2005.

[48] GAIOTTO D, MOORE G W, NEITZKE A. Wall-crossing, Hitchin systems, and the WKB approximation [J]. Advances in Mathematics, 2013, 234: 239-403.

[49] ALLEGRETTI D G L. Voros symbols as cluster coordinates [J]. Journal of Topology, 2019, 4: 1031-1068.

[50] IWAKI K, NAKANISHI T. Exact WKB analysis and cluster algebras[J]. Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical, 2014, 47(47): 98.

[51] GUTZWILLER M C. Periodic orbits and classical quantization conditions [J]. Journal of Mathematical Physics, 1971, 12: 343-358.

[52] GUTZWILLER M C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.

[53] BERRY M. Some quantum-to-classical asymptotics [C]//GIANNONI M J, VOROS A, ZINN J J.(Les Houches, 1989), Chaos et physique quantique. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 1991: 251-304.

[54] VOROS A. General quantum resurgence surmised with Gutzwiller's trace formula [EB/OL]. [2023-09-28]. https://online. kitp. ucsb. edu/online/resurgent_c17/voros/pdf/Voros_Resurgent17Conf_KITP.pdf.

[55] BERRY M V, HOWLS C J. High orders of the Weyl expansion for quantum billiards: resurgence of periodic orbits, and the stokes phenomenon[J]. Proceedings of the Royal Society A (Mathematical, Physical and Engineering Sciences), 1994, 447: 527-555.

[56] GRIFFITHS D J. Introduction to quantum mechanics[M] 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

[57] BRIDGELAND T. Riemann-Hilbert problems from Donaldson-Thomas theory[EB/OL]. [2023-09-28]. arXiv: 1611.03697v4.

[58] ARGYRES P N. The Bohr-Sommerfeld quantizaon rule and the Weyl correspondence [J]. Physics Physique Fizika, 1965, 2: 131-139.

[59] BALIAN R, PARISI G, VOROS A. Quartic oscillator [C]//AlBEVERIO S, COMBE PH, HOEGH-KROHN R, et al. Feynman Path Integrals: Proceedings of the International Colloquium Held in Marseille, May 1978. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005: 337-360.

[60] CARTIER P, VOROS A. Une nouvelle interprétation de la formule des traces de Selberg[C]//Journées Équations aux dérivées partielles. Palaiseau: École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1988, XIII: 8.

[61] MCKEAN H P. Selberg's trace formula as applied to a compact riemann surface[J]. Communications on Pure Applied Mathematics, 1972, 25(3): 225-246.

[62] SELBERG A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet series[J]. Journal of the Indian Mathematical Society, 1956, 20: 47-87.

[63] SUN S. Gutzwiller's semiclassical trace formula and maslov-type index theory for symplectic paths [J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2017, 19(1): 299-343.

[64] GUTZWILLER M C. Path Integrals from MeV to MeV: selected papers from the symposium held at the bielefeld center for interdisciplinary research on august 5-9, 1985 [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1986.

[65] WITTEN E. Quantum field theory and the jones polynomial[J]. Communications in Mathematical Physics, 1989, 121(3): 351-399.

[66] FREED D S. Classical Chern-Simons theory [J]. Advances in Mathematics, 1995, 113: 237-303.

[67] BAEZ J, MUNIAIN J P. Gauge fields, knots and gravity [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1994.

[68] WERNLI D. Lecture notes on Chern-Simons perturbation theory [EB/OL]. [2023-10-10]. https://www2. mathematik. hu-berlin. de/ ~ maphy/static/Lecture Notes_CS.pdf.

[69] GUKOV S, MARIÑO M. PUTROV P. Resurgence in complex Chern-Simons theory[EB/OL]. [2023-10-10]. https://resolver.caltech.edu/, arXiv: 1605.07615.

[70] WITTEN E. Analytic continuation of Chern-Simons theory, in Chern-Simons gauge theory: 20 years after, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics[J]. American Mathematical Society, Providence RI, 2011 (50), 347-446.

[71] GAROUFALIDIS S. Chern-Simons theory, analytic

continuation and arithmetic [J]. Acta Mathematica Vietnamica, 2008, 33: 335-362.

[72] GUKOV S, PEI D, PUTROV P, et al. BPS spectra and 3-manifold invariants[J]. Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 2020, 29(2): 85.

[73] ANDERSEN J E, MISTEGÅRD W E. Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres[EB/OL]. [2023-10-20]. https://doi.org/10.1112/jlms.12506.

[74] GAROUFALIDIS S, GU J, MARIÑO M. The resurgent structure of quantum knot invariants [J]. Communications in Mathematical Physics, 2021, 386: 469-493.

[75] GAROUFALIDIS S, GU J, MARIÑO M. Peacock patterns and resurgence in complex Chern-Simons theory [J]. Research in the Mathematical Science, 2023, 10(3): 29-67.

[76] ANDERSEN J, HAN L, LI Y, et al. Asymptotic expansion conjecture on Seifert fibered integral homology sphere via resurgence[J]. Preprint.

[77] HAN L, LI Y, SAUZIN D, et al. Resurgence and partial thera series[J]. Functional Analysis and Its Applications, 2023, 57(3): 89-112.

[78] ANDERSEN J. The asymptotic expansion conjecture [C]//OHTSUKI T, KOHNO T, LE T, et al. Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001): Problems on invariants of knots and 3-manifolds. Berkeley CA: Mathematical Sciences Publishers, 2004: 474-480.

[79] BERSHADSKY M, CECOTTI S, OOGURI H, et al. Kodaira-Spencer theory of gravity and theories [J]. Annales Henri Poincare, 2013, 14: 425-497.

[80] BERSHADSKY M, CECOTTI S, OOGURI H, et al. Holomorphic anomalies in topological field theories[J]. Nuclear Physics, 1993, 405: 279-304.

[81] SANTAMARÍA R. C, EDELSTEIN J D, SCHIAPPA R, et al. Resurgent transseries and the holomorphic anomaly: nonperturbative closed strings in local $\mathbb{CP}^2$[J]. Communications in Mathematical Physics, 2015, 338(1): 285-346.

[82] SANTAMARÍA R C, EDELSTEIN J D, SCHIAPPA R, et al. Resurgent transseries and the holomorphic anomaly [J]. Annales Henri Poincare, 2016, 17(2): 331-399.

[83] GU J, MARIÑO M. Exact multi-instantons in topological string theory[EB/OL]. [2023-10-10]. arXiv: 2211.01403.

[84] GU J, MARIÑOM. On the resurgent structure of quantum periods[EB/OL]. [2023-10-10]. arXiv: 2211.03871.

[85] GU J, KASHANI-POOR A, KLEMM A, et al. Non-perturbative topological string theory on compact Calabi-Yau 3-folds[EB/OL]. [2023-10-10]. arXiv: 2305.19916.

[86] ALIM M, SAHA A, TESCHNER J, et al. Mathematical structures of nonperturbative topological string theory: from GW to DT Invariants [J]. Communications in Mathematical Physics, 2023, 399(2): 1039-1101.

[87] IWAKI K, Mariño M. Resurgent structure of the topological string and the first Painlevé equation[EB/OL]. [2023-10-10]. arXiv: 2307.02080.

[88] ALIM M, YAU S T, ZHOU J. Airy equation for the topological string partition function in a scaling limit[J]. Letters in Mathematical Physics, 2016, 106: 719-729.

[89] KONTSEVICH M. Deformation quantization of Poisson manifolds[J]. Letters in Mathematical Physics, 2003, 66: 157-216.

[90] KONTSEVICH M. Operads and motives in deformation quantization[J]. Letters in Mathematical Physics, 1999, 48, 1: 35-72.

[91] BANKS P, PANZER E, PYM B. Multiple zeta values in deformation quantization[J]. Inventiones Mathematicae, 2020, 222(1): 79-159.

[92] WALDMANN S. Convergence of star products: from examples to a general framework [J]. Surveys in Mathematical Sciences, 2019, 6(1/2): 1-31.

[93] LI Y, SAUZIN D, SUN S. On the Moyal star product of resurgent series[J]. Annales de I'Institut Fourier, 2023, 73(5): 1987-2027.

[94] GETZLER E. Lie theory for nilpotent L_∞-algebras[J]. Annals of Mathematics, 2009, 170(1): 271-301.

[95] WITTEN E. Supersymmetry and Morse theory [J]. Journal of Differential Geometry, 1982, 17(4): 661-692.

[96] GETMANENKO A. Resurgent analysis of the Witten Laplacian in one dimension [J]. Funkcialaj Ekvacioj-Serio Internacia, 2011, 54(3): 383-438.

(责任编辑:马田田)