DOI：10.19789/j.1004-9398.2023.06.003
文献引用：黄炜，刘龙展．关于Smarandache *kn*数列及其与Smarandache LCM函数的混合均值[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2023，44（6）：12-15. HUANG W，LIU L Z. Smarandache *kn*-digital sequence and it's asymptotic properties of Smarandache LCM function[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2023，44（6）：12-15.

关于Smarandache *kn*数列及其与Smarandache LCM函数的混合均值*

黄　炜**，刘龙展

（新疆科技学院基础教学研究部，新疆 库尔勒　841000）

摘要：应用解析方法、初等方法和组合方法，研究了Smarandache *kn*数字数列$a[k,n]$与Smarandache LCM函数SL（n）的复合均值分布性质，给出了一个较强均值渐近公式；还利用初等方法研究了Smarandache *kn*-数字子序列无穷级数$f(m,k)$的收敛性。

关键词：Smarandache *kn*数字数列；Smarandache LCM函数SL（n）；均值；渐近公式；无穷级数；收敛性
中图分类号：O156.4　　**文献标识码**：A

Smarandache *kn*-digital sequence and it's asymptotic properties of Smarandache LCM function*

HUANG Wei**，LIU Longzhan

（Department of Basic，Xinjiang Institute of Science and Technology，Korla Xinjiang　841000）

Abstract：The properties of the hybrid mean value of Smarandache *kn*-digital series with Smarandache LCM function SL（n）are studied using elementary and combinational methods，and one sharper asymptotic formulae for it are presented. Also the main purpose of this paper is using the elementary method to study the convergent properties of the infinite series involving the Smarandache *kn*-digital subsequence $f(m,k)$.

Keywords：Smarandache *kn*-digital sequence；Smarandache LCM function SL（n）；mean value；asymptotic formula；infinite series；convergence
CLC：O156.4　　**DC**：A

0　引　言

设对于任意的整数k，$1\leqslant k\leqslant 9$，Smarandache *kn*数和字数列$a[k,n]$被定义为[1-5]：它的任一项能被拆分成前后2部分，且前面部分的k倍构成后面部分。因此Smarandache $2n$，$3n$，…，$9n$数字数列$a(2,n)$，$a(3,n)$，…，$\{a(9,n)\}$即为：$\{a(2,n)\}=\{12,24,36,48,510,612,714,816,\cdots\}$，$\{a(3,n)\}=\{13,26,39,412,515,618,721,824,\cdots\}$，…，$\{a(9,n)\}=\{19,218,327,436,545,654,763,872,\cdots\}$。

有关Smarandache *kn*数字数列$a[k,n]$性质，不少学者进行了研究，其中文献[5]中对张文鹏教授

收稿日期：2022-11-21
* 国家自然科学基金项目（12126357）
** 通信作者：hwxy6@163.com

提出的“Smarandache 3*n* 数字数列中没有完全平方数”的猜测,证明了下面的结论:

(a) 当 n 为无平方因子数时,$a[3,n]$ 不可能是完全平方数;

(b) 当 n 为完全平方数时,$a[3,n]$ 不可能是完全平方数;

(c) 如果 $a[3,n]$ 是一个完全平方数,那么 $n=2^{2\alpha_1}\cdot 3^{2\alpha_2}\cdot 5^{2\alpha_3}\cdot 11^{2\alpha_4}\cdot n_1$,　其中 $(n_1,330)=1$。

虽然文献[5-6]中没有完全解决张文鹏教授的猜想,但是对 Smarandache *kn* 数字数列性质的研究工作中有了实质性进展。后续文献[7]研究了 $\ln a(3,n)$ 的均值性质,证明了渐近公式 $\sum_{n\leqslant N}\ln a(3,n)=2N\cdot\ln N+O(N)$;文献[8]研究了 $\frac{n}{a(k,n)}$ 的均值性质,证明了渐近公式 $\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a(k,n)}=\frac{9}{k\cdot 10\ln 10}\cdot\ln x+O(x)$;文献[9]研究了 *kn* 数字数列 $a[k,n]$ 与 Smarandache 除数和函数 $\sigma(n)$ 的混合均值,证明了渐近公式 $\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma(n)}{a(k,n)}=\frac{3\pi^2}{k\cdot 20\ln 10}\cdot\ln x+O(1)$,正整数 k 满足 $1\leqslant k\leqslant 9$。

有不少的学者对 $\mathrm{SL}(n)$ 的性质进行了研究,而关于 Smarandache *kn* 数字数列 $a[k,n]$ 与 Smarandache LCM 函数 $\mathrm{SL}(n)$ 的混合均值,以及 Smarandache *kn*-数字子序列无穷级数 $f(m,k)$ 的收敛性,目前还未见到有关的文献。本文用解析方法、初等方法和组合方法研究了 Smarandache *kn* 数字数列 $a[k,n]$ 与 Smarandache LCM 函数 $\mathrm{SL}(n)$ 的混合均值,给出了渐近公式,同时利用初等方法研究了 Smarandache *kn*-数字子序列无穷级数 $f(m,k)$ 的收敛性,证明了如下定理。

定理 1　对于任意正整数 $x>1$,任意正整数 k,$1\leqslant k\leqslant 9$,有下面渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(k,n)}=\frac{3\pi^2}{k\cdot 20}\cdot\ln\ln x+O(1)。\tag{1}$$

定理 2　对于任意实数 $x>1$ 及任意正整数 m,如果 $m>\frac{1}{2}$,无穷级数

$$f(m,k)=\sum_{n<x}\frac{\ln^m[a(k,n)]}{a^m(k,n)}\tag{2}$$

收敛,如果 $m\leqslant\frac{1}{2}$,则无穷级数(2)发散。

1　相关的引理

引理　对于任意正整数 $x>1$,有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n}=\frac{\pi^2 x}{6\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)。\tag{3}$$

证明　对于任意正整数 $x>2$,由文献[2-3]得

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SL}(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)。\tag{4}$$

由欧拉求和公式可得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n}=\frac{1}{x}\left(\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)\right)+\int_1^x\left(\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{y^2}{\ln y}+O\left(\frac{y^2}{\ln^2 y}\right)\right)\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=$$

$$\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)+\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x}{\ln x}+\frac{13\pi^2}{12}\int_1^x\frac{1}{\ln^2 y}\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)。$$

2　定理的证明

2.1　定理 1 的证明

当 $k=2$ 时,考虑到 $a(2,n)$ 的结构,不妨设 n 的十进制表示式为 k 位数,即 $n=b_k b_{k-1}\cdots b_2 b_1$,其中 $1\leqslant b_k\leqslant 9$,$0\leqslant b_i\leqslant 9$,$i=1,2,3,\cdots,k-1$。于是由乘法的进位法则可知:当 $\frac{1}{2}10^{k-1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\cdot(10^k-1)$ 时,$2n$ 为 k 位数;当 $\frac{1}{2}\cdot 10^k\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\cdot(10^{k+1}-1)$ 时,$2n$ 为 $k+1$ 位数。由 $a(2,n)$ 的定义得到 n 为 k 位数时 $a(2,n)=n\cdot(10^k+2)$ 或 $a(2,n)=n\cdot(10^{k+1}+2)$。

对于任意充分大的正 $x>1$,有确定的正整数 M,使得 $\frac{1}{2}\cdot 10^M\leqslant x<\frac{1}{2}\cdot 10^{M+1}$,取对数后得

$$M\ln 10+\ln\frac{1}{2}\leqslant\ln x<(M+1)\ln 10+\ln\frac{1}{2},$$

即 $M=\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln x+O(1)$。　(5)

结合 $a(2,n)$ 的定义,可得

$$\sum_{1\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}=\sum_{n=1}^{4}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}+\sum_{n=5}^{49}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}+\sum_{n=50}^{499}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}+\cdots+\sum_{n=0.5\cdot 10^{M-1}}^{0.5\cdot 10^{M}-1}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}+\sum_{0.5\cdot 10^{M}\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}=\sum_{n=1}^{4}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10+2)}+$$

$$\sum_{n=5}^{49}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^2+2)}+\sum_{n=50}^{499}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^3+2)}+\cdots+\sum_{n=0.5\cdot10^{M-1}}^{0.5\cdot10^{M}-1}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{M+1}+2)}+\sum_{0.5\cdot10^{M}\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{M+2}+2)}。\tag{6}$$

由

$$\sum_{n=0.5\cdot10^{k-1}}^{0.5\cdot10^{k}-1}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{k+1}+2)}=\sum_{0.5\cdot10^{k-1}}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{k+1}+2)}-\sum_{0.5\cdot10^{k-1}}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{k+1}+2)}=\frac{\pi^2}{6}\frac{0.5\cdot10^{k}-0.5\cdot10^{k-1}}{(10^{k}+2)\ln(0.5\cdot10^{k})}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)=\frac{3\pi^2}{40}\cdot\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right),\tag{7}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$及渐近公式

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant M}\frac{1}{k}=\ln M+\gamma+O\left(\frac{1}{M}\right),\tag{8}$$

这里γ是欧拉常数。

由式(6)~(8),有

$$\sum_{1\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}=\sum_{n=1}^{4}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}+\sum_{n=5}^{49}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}+\sum_{n=50}^{499}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}+\cdots+\sum_{n=5\cdot10^{M-1}}^{5\cdot10^{M}-1}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}+\sum_{5\cdot10^{M}\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(2,n)}=\sum_{k=1}^{M}\frac{3\pi^2}{40}\cdot\frac{1}{k}+O\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k^2}\right)=\frac{3\pi^2}{40}\cdot\ln\ln x+o(1)。$$

当$k=4$时,考虑到$a(4,n)$的结构,不妨设n的十进制表示式为k位数,即$n=c_kc_{k-1}\cdots c_2c_1$,其中$1\leqslant b_k\leqslant9,0\leqslant b_i\leqslant9,i=1,2,3,\cdots,k-1$。于是由乘法的进位法则可知:当$\frac{1}{4}10^{k-1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}(10^{k}-1)$时,$4n$为$k$位数;当$\frac{1}{4}10^{k}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}(10^{k+1}-1)$时,$4n$为$k+1$位数。由$a(4,n)$的定义得到,$n$为$k$位数时$a(4,n)=n\cdot(10^{k}+4)$或$a(4,n)=n\cdot(10^{k+1}+4)$。

对于任意充分大的正$x>1$,存在正整数M,使得$\frac{1}{4}\cdot10^{M}\leqslant x<\frac{1}{4}\cdot10^{M+1}$,取对数后得$M\ln10+\ln\frac{1}{4}\leqslant\ln x<(M+1)\ln10+\ln\frac{1}{4}$即

$$M=\frac{1}{\ln10}\cdot\ln x+O(1),\tag{9}$$

结合$a(4,n)$的定义,可得

$$\sum_{1\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}=\sum_{n=1}^{2}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}+\sum_{n=3}^{24}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}+\sum_{n=25}^{249}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}+\cdots+\sum_{n=\frac{1}{4}\cdot10^{M-1}}^{\frac{1}{4}\cdot10^{M+1}-1}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}+\sum_{\frac{1}{4}\cdot10^{M}\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}=\sum_{n=1}^{2}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10+4)}+\sum_{n=3}^{24}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^2+4)}+\sum_{n=25}^{249}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^3+4)}+\cdots+\sum_{n=\frac{1}{4}\cdot10^{M-1}}^{\frac{1}{4}\cdot10^{M}-1}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{M+1}+4)}+\sum_{\frac{1}{4}\cdot10^{M}\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{M+2}+4)}。$$

注意到

$$\sum_{n=\frac{1}{4}\cdot10^{k-1}}^{\frac{1}{4}\cdot10^{k}-1}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{k}+4)}=\sum_{\frac{1}{4}\cdot10^{k-1}}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{k+1}+4)}-\sum_{\frac{1}{4}\cdot10^{k-1}}\frac{\mathrm{SL}(n)}{n\cdot(10^{k}+4)}=\frac{\pi^2}{6}\frac{\frac{1}{4}\cdot10^{k}-\frac{1}{4}\cdot10^{k-1}}{(10^{k}+4)\ln\left(\frac{1}{4}\cdot10^{k}\right)}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)=\frac{3\pi^2}{80}\cdot\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)。\tag{10}$$

于是有

$$\sum_{1\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}=\sum_{n=1}^{2}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}+\sum_{n=3}^{24}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}+\sum_{n=25}^{249}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}+\cdots+\sum_{n=\frac{1}{4}\cdot10^{M-1}}^{\frac{1}{4}\cdot10^{M}-1}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}+\sum_{\frac{1}{4}\cdot10^{M}\leqslant n<x}\frac{\mathrm{SL}(n)}{a(4,n)}=\sum_{k=1}^{M}\frac{3\pi^2}{80}\cdot\frac{1}{k}+O\left(\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k^2}\right)=\frac{3\pi^2}{80}\ln\ln x+o(1)。\tag{11}$$

用完全相同的方法可类似地证明定理1中k=1,3,5,6,7,8,9时也有类似的结论。

2.2 定理2的证明

利用初等方法完成定理2的证明。

首先证明$k=3$。考虑到$a(3,n)$的结构,不妨设n的十进制表示式为k位数,即就是$n=d_kd_{k-1}\cdots d_2d_1$,其中$1\leqslant d_k\leqslant9,0\leqslant d_i\leqslant9,i=1,2,3,\cdots,k-1$。于是由乘法的进位法则可知:当$\frac{1}{3}10^{k-1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\cdot(10^{k}-1)$时,$3n$为$k$位数;当$\frac{1}{3}\cdot10^{k}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\cdot(10^{k+1}-1)$时,$3n$为$k+1$位数。由$a(3,n)$的定义得到$n$为$k$位数时

$a(3,n)=n\cdot(10^k+3)$或$a(3,n)=n\cdot(10^{k+1}+3)$。(12)　　结合$a(3,n)$的定义及$n\leqslant x$有

$$f(m,3)=\sum_{1\leqslant n<x}\frac{\ln^m[a(3,n)]}{a^m(3,n)}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\ln^m[i\cdot(10+3)]}{[i\cdot(10+3)]^m}+\sum_{i=4}^{33}\frac{\ln^m[i\cdot(100+3)]}{[i\cdot(100+3)]^m}+\sum_{i=34}^{333}\frac{\ln^m[i\cdot(1000+3)]}{[i\cdot(1000+3)]^m}+\cdots\leqslant$$
$$\frac{3\cdot\ln^m(3\cdot10)}{10^m}+\frac{30\cdot\ln^m(33\cdot100)}{4^m\cdot100^m}+\frac{300\cdot\ln^m(333\cdot1000)}{34^m\cdot1000^m}+\frac{3000\cdot\ln^m(3333\cdot10000)}{334^m\cdot10000^m}+\cdots\leqslant \tag{13}$$
$$3\left(\frac{\ln^m30}{10^{1\cdot m}}+\frac{\ln^m3300}{10^{m-1}\cdot10^{2m}}+\frac{\ln^m333000}{10^{2m-2}\cdot10^{3m}}+\frac{\ln^m33330000}{10^{3m-3}\cdot10^{4m}}+\cdots\right)<$$
$$3\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\ln^m10^{2j}}{10^{(m-1)(j-1)}\cdot10^{m\cdot j}}=3\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2^m j^m\ln^m10}{10^{(j-1)(m-1)}\cdot10^{mj}}=3\cdot2^m\cdot\ln^m10\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{j^m}{10^{2jm-(j+n)+1}}。$$

根据几何级数的性质,对于式(13),如果$2jm-(j+m)+1>m$,即$m>\frac{1}{2}$,知道级数$f(m,k)$是收敛的。

如果$m\leqslant\frac{1}{2}$,由式(13)有

$$f(m,3)=\sum_{1\leqslant n<x}\frac{\ln^m[a(3,n)]}{a^m(3,n)}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\ln^m[i\cdot(10+3)]}{[i\cdot(10+3)]^m}+\sum_{i=4}^{33}\frac{\ln^m[i\cdot(100+3)]}{[i\cdot(100+3)]^m}+\sum_{i=34}^{333}\frac{\ln^m[i\cdot(1000+3)]}{[i\cdot(1000+3)]^m}+\cdots=$$
$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\ln^m(i\cdot13)}{[i\cdot13]^m}+\sum_{i=4}^{33}\frac{\ln^m(i\cdot103)}{[i\cdot103]^m}+\sum_{i=34}^{333}\frac{\ln^m(i\cdot1003)}{[i\cdot1003]^m}+\sum_{i=334}^{3333}\frac{\ln^m(i\cdot10003)}{[i\cdot10003]^m}+\cdots\geqslant$$
$$\frac{3\cdot\ln^m(1\cdot10)}{10^m}+\frac{30\cdot\ln^m(4\cdot100)}{4^m\cdot100^m}+\frac{300\cdot\ln^m(34\cdot1000)}{34^m\cdot1000^m}+\frac{3000\cdot\ln^m(334\cdot10000)}{334^m\cdot10000^m}+\cdots\geqslant \tag{14}$$
$$3\left(\frac{\ln^m10}{10^m}+\frac{\ln^m100}{10^{m-1}\cdot10^{2m}}+\frac{\ln^m1000}{10^{2m-2}\cdot10^{3m}}+\frac{\ln^m10000}{10^{3m-3}\cdot10^{4m}}+\cdots\right)>$$
$$3\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\ln^m10^j}{10^{(m-1)(j-1)}\cdot10^j}>3\ln^m10\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{j^m}{10^{2m-j}}。$$

根据几何级数的性质,对于式(14),如果$m\leqslant\frac{1}{2}$,则级数$f(m,k)$是发散的,这就证明了定理2中$k=3$的情况。

用完全相同的方法可类似地证明定理2中k=1,2,4,5,6,7,8,9时,也有类似的结论。

3　结束语

数论函数算术性质的研究一直是经典数论研究的热点课题之一。数论函数的均值估计在解析数论、乘法数论以及代数数论研究中占有举足轻重的位置,并与很多艰深的数论猜想和难题密切相关。本文从不同的角度对Smarandache *kn*数字数列$a[k,n]$的性质进行了细致的研究,获得了一些有益的结论。希望起到抛砖引玉的作用,也希望早日解决张文鹏教授在文献[5]中提出的“Smarandache 3*n* 数字数列中没有完全平方数”的猜想,对数论的发展做出积极的贡献。

参 考 文 献

[1] SMARANDACHE F. Sequences of numbers involved in unsolved problems [J/OL]. [2022-11-01]. https://arxiv.org/abs/math/0604019.

[2] 潘承洞,潘承彪.解析数论基础[M].北京:科学出版社,1991.

[3] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York:Spring-Verlag,1976.

[4] SANDOR J. On certain ineqvialities involving the Smarandache function, [J]. Scientia Magna, 2006, 2(3):75-80.

[5] WU N. On the Smarandache 3*n*-digital sequence and the Zhang Wenpeng's conjecture[J]. Scientia Magna,2008,4(4):120-122.

[6] CHEN X L. A survey on Smarandache notions in number theory III: Smarandache LCM function [J]. Scientia Magna,2018,13(1):141-153.

[7] 苟素. Smarandache 3*n* 数字数列及其他的渐近性质[J].内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版),2010,39(6):450-453.

[8] 苟素.Smarandache *kn*数字数列及其一类均值性质[J].纺织高校基础科学学报,2011,24(2):250-252+269.

[9] 苟素.Smarandache *kn*数列与除数和函数的混合均值[J].西安石油大学学报(自然科学版),2011,26(2):107-110+123.

(责任编辑:马田田)