DOI：10.19789/j.1004-9398.2023.06.006
文献引用：朱国成．WPHFS多属性群决策模型与应用[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2023，44（6）：30-38. ZHU G C. Weighted probabilistic hesitant fuzzy set multi-attribute group decision model and its application[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2023，44（6）：30-38.

WPHFS多属性群决策模型与应用*

朱　国　成**

（广东创新科技职业学院人文教育学院，广东 东莞　523960）

摘要：对于概率犹豫模糊元中的不同隶属度值赋予了决策专家的综合权重，由此构造出一种蕴含信息量更大、更符合决策问题需要的概率犹豫模糊集合——加权的概率犹豫模糊集（WPHFS）。针对加权的概率犹豫模糊数（WPHFN），本文采用三维向量进行描述，并在此基础上建立了加权的概率犹豫模糊元（WPHFE）的三维向量得分函数模型、三维向量离差函数模型以及2个WPHFE的大小判别准则。首先，利用WPHFE的三维向量得分函数值与三维向量离差函数值分别计算属性的外部权重与内部权重，进而计算出属性的综合权重；其次，依据离差最大化思想给出了一种计算决策专家综合权重的方法；再次，结合决策专家的综合权重与属性的综合权重，利用0-1优先关系矩阵来直观地获取任意2个备选方案的总属性权重优势值与总属性权重劣势值，并根据二者的大小排序方案；最后，通过一个应用实例来说明文中理论与方法的实用价值。

关键词：加权的概率犹豫模糊集；三维向量得分函数模型；三维向量离差函数模型；0-1优先关系矩阵
中图分类号：O159　　**文献标识码**：A

Weighted probabilistic hesitant fuzzy set multi-attribute group decision model and its application*

ZHU Guocheng**

（School of Humanities Education，Guangdong Innovative Technical College，Dongguan Guangdong　523960）

Abstract：Different membership degrees in the probabilistic hesitant fuzzy element entrust decision-making experts with comprehensive weights，thereby constructing a probabilistic hesitant fuzzy set with more information and more in line with the needs of decision problems - weighted probabilistic hesitant fuzzy set（WPHFS），which is described by three-dimensional vector. On this basis，the three-dimensional vector score function model，three-dimensional vector deviation function model of weighted probabilistic hesitant fuzzy element（WPHFE）and two weighted probabilistic hesitant fuzzy element size criteria are established. Firstly，weighted probabilistic hesitant fuzzy element's three-dimensional vector score function value and three-dimensional vector deviation function value are used to calculate the external weight and internal weight of attributes respectively，and then to calculate the

收稿日期：2022-07-04
* 2023年度广东省普通高校特色创新类项目（2023KTSCX414）；广东创新科技职业学院特色创新类重点项目（2023TSZD05）
** 通信作者：569141518@qq.com

comprehensive weight of attributes. Secondly, based on the idea of maximum deviation, a method for calculating the comprehensive weight of decision experts is presented with the combination with the comprehensive weight of decision experts and the comprehensive weight of attributes. Again, the 0-1 priority relationship matrix is used to intuitively obtain the total attribute weight advantage value and total attribute weight disadvantage value of two alternatives. The goal of sorting scheme is achieved according to the size between the two. Finally, the practical value of the theory and method are finally illustrated by an application example.

Keywords: weighted probabilistic hesitant fuzzy set; three-dimensional vector score function; three dimensional vector deviation function; 0-1 priority relation matrix

CLC: O159 **DC**: A

0 引 言

在多属性群决策(multi-attribute group decision making, MAGDM)问题中,参与决策的专家所提供的信息数据类型直接影响决策的结果,故针对决策信息数据类型的研究具有重要的理论与应用价值。由于概率犹豫模糊集[1](probabilistic hesitant fuzzy sets, PHFS)给予隶属度值注解了发生的可能性也即概率,克服了犹豫模糊集[2]中所有隶属度值的条件一致性缺点,因此自PHFS的概念提出以来,其便在理论与应用上获得了很好的发展。在PHFS的理论研究方面:Zhu和Xu[3]给出了PHFS偏好关系的定义并初步研究了其一致性;Zhang等[4]根据证据推理思想来削弱了概率信息,由此改进了PHFS的定义;曹倩等[5]研究了PHFS中概率信息未知情形,在MAGDM问题中详细探讨了概率的计算方法;朱国成等[6]使用二维坐标来刻画PHFS,并在点坐标的条件下来研究PHFS的相关运算问题。目前,在使用PHFS描述决策信息时还具有一定的局限性。例如,有3位决策者(甲、乙、丙)针对某项事物进行评价,甲给出9分,乙给出7分,丙给出8分,把3位决策者给出的评价分数转化为对该事物的隶属度值,此时可以将评价信息用PHFS表示为$\{0.9(\frac{1}{3}),\ 0.7(\frac{1}{3}),\ 0.8(\frac{1}{3})\}$,由此可知,虽然PHFS中的隶属度值0.9、0.7、0.8出现的可能性有所说明,但是其分别具有的重要性则没有体现。因此,在PHFS中针对隶属度值的重要性描述很有必要。上述案例中,若3位决策者甲、乙、丙的权重分别为0.2、0.3、0.5,此时将甲、乙、丙的权重注入PHFS中,则添加决策专家权重的PHFS可以表示为$\{0.9(\frac{1}{3},\ 0.2),\ 0.7(\frac{1}{3},\ 0.3),\ 0.8(\frac{1}{3},\ 0.5)\}$,显然添加决策专家权重以后的PHFS对隶属度值出现的可能性与重要性都有了注解,与经典的PHFS相比,添加决策专家权重以后的PHFS蕴含了更全面的决策信息。考虑到在实际决策问题中,决策专家的综合权重相较于主观权重或客观权重能够更科学地反映决策者的重要性程度,因而文中给予PHFS中的隶属度值添加的为决策专家的综合权重。

在概率犹豫模糊集多属性群决策(probabilistic hesitant fuzzy sets multi-attribute group decision making, PHFSMAGDM)问题中,计算属性权重是一个重要环节,属性权重的计算方法有熵值法[7-8]、离差最大化法[9]和动态规划法[10]等。以上方法都是基于方案在属性上的整体信息差异程度值来对属性权重的重新分配,而考虑决策群体从备选方案在属性上的内部评价信息数据差异程度值出发,计算属性权重的研究文献相对较少。鉴于此,本文进行相关研究:首先,将从方案在属性上的整体信息差异程度值出发,计算的属性权重称为外部权重;其次,从决策群体针对备选方案在属性上的内部评价信息数据差异程度值出发,计算的属性权重称为内部权重;最后,将属性的外部权重与内部权重结合来确定其综合权重。

在研究备选方案的排序算法方面,一些学者做了大量工作并取得了丰富的研究成果。例如:华维灿等[11]基于概率犹豫模糊矩阵提出了一种交互式排序算法;王志平等[12]在前景理论的基础上建立了一个逼近理想解的决策模型;方冰等[13]利用交互式多准则决策思想来实现对多个备选方案的排序;武文颖等[14]构建了一种利用概率犹豫模糊加权Maclaurin几何对称平均算子的决策算法;朱亚辉和高迺[15]设置了一种广义概率犹豫模糊MULTIMOORA决策方法;吴健等[16]研究了基于Bonferroni平均

算子的概率犹豫模糊多属性决策方法;朱峰等[17]研究了PHFS关联系数的决策方法;刘玉敏等[18]研究了区间概率犹豫模糊偏好关系的群决策算法;汪新凡等[19]研究了概率犹豫模糊信息环境下考虑双边匹配方案稳定性的多目标优化模型。通过梳理文献可知,上述学者皆是从获取方案综合决策值的角度出发,研究备选方案的排序问题,有别于以上学者的研究思路,赵萌等[20]利用0-1优先关系矩阵来获取任意2个方案的属性权重优势值与劣势值,并根据值的大小达到对所有方案排序目的。

受文献[20]的启发,针对PHFSMAGDM问题,本文利用0-1优先关系矩阵来获取任意2个方案的总属性权重优势值与总属性权重劣势值,进而根据优势值与劣势值的大小达到优选方案目的。文章首先引入了一个新的概念——加权的概率犹豫模糊集(weighted probabilistic hesitant fuzzy sets,WPHFS),WPHFS中的元素为加权的概率犹豫模糊元(weighted probabilistic hesitant fuzzy elements,WPHFE),其主要特点是,每个隶属度值不但被赋予了发生的概率,而且还拥有了权威性(添加了决策专家的综合权重),因此WPHFS解决了PHFS中全体隶属度值重要性相等的缺陷问题;其次,采用三维向量来刻画WPHFS,并在此基础上设置了计算属性综合权重的方法,然后建立了一种利用离差最大化思想来计算决策专家综合权重的模型;最后利用0-1优先关系矩阵设计了一种获取任意2个方案总属性权重优势值与总属性权重劣势值的方法,通过一个数值算例来验证分析了文中理论与方法的可行性。

1 预备知识

定义1[1] 记非空集合X,形如$H=\left\{<x, h_x(p_x)>\mid x\in X\right\}$的二元组称为集合$X$上的PHFS,其中将$h(p)=h_x(p_x)=\left\{\gamma_l(p_l), l=1,2,\cdots,\left|h(p)\right|, \sum_{l=1}^{\left|h(p)\right|}p_l=1\right\}$称为PHFE,PHFE中的$\gamma_l$表示元素$x$属于集合$H$的隶属度,$p_l$为隶属度$\gamma_l$发生的概率,$\left|h(p)\right|$表示PHFE$h(p)$中元素的个数。

在定义1的基础上,给予PHFS中的隶属度添加相应的决策专家综合权重,并将隶属度、概率以及决策专家综合权重以三维向量形式进行描述,此时有如下定义。

定义2 记非空集合X,形如$H=\{<x, \overrightarrow{H(p)}>\mid x\in X\}$的二元组称为集合$X$上的WPHFS。其中$\overrightarrow{H(p)}=\{\vec{\gamma}_l=(\gamma_l, p_l, \omega_l), l=1,2,\cdots,\left|\overrightarrow{H(p)}\right|, \sum_{l=1}^{\left|\overrightarrow{H(p)}\right|}p_l=1, \sum_{l=1}^{\left|\overrightarrow{H(p)}\right|}\omega_l=1, \vec{\gamma}_l\subset\Omega:[1,0,0]\times[0,1,0]\times[0,0,1]\}$称为三维向量表示的WPHFE,简称WPHFE,$\vec{\gamma}_l=(\gamma_l, p_l, \omega_l)$为三维向量表示加权的概率犹豫模糊数(weighted probabilistic hesitant numbers,WPHFN),γ_l表示元素x属于集合H的隶属度,p_l为隶属度γ_l发生的概率,ω_l表示所有认同隶属度γ_l的决策专家综合权重之和,$\left|\overrightarrow{H(p)}\right|$表示WPHFE$\overrightarrow{H(p)}$中元素的个数。

在定义2中,可以将WPHFN$\vec{\gamma}_l=(\gamma_l, p_l, \omega_l)$理解为以原点为始点,点$(\gamma_l, p_l, \omega_l)$为终点的三维向量,此时可知最小的WPHFN$\vec{\gamma}_l=(0,0,0)$,最大的WPHFN$\vec{\gamma}_l=(1,1,1)$,WPHFE$\overrightarrow{H(p)}$中的元素全部由三维向量构成。当WPHFE$\overrightarrow{H(p)}$中的元素全部以三维向量表示以后,再对其进行测度,文献[11]中的方法则不再适用,此时需要按照三维向量知识进行建立新的测度范式,为此有如下定义。

定义3 $\overrightarrow{H(p)}$为WPHFE,则其三维向量得分函数$\vec{E}(\overrightarrow{H(p)})$定义为

$$\vec{E}(\overrightarrow{H(p)})=\frac{\sqrt{3}\sum_{l=1}^{\left|\overrightarrow{H(p)}\right|}\sqrt{(\gamma_l)^2+(p_l)^2+(\omega_l)^2}}{3\left|\overrightarrow{H(p)}\right|},\tag{1}$$

易知$\vec{E}(\overrightarrow{H(p)})\in[0,1]$。式(1)表示WPHFE$\overrightarrow{H(p)}$中所有元素(三维向量)的模之和的平均值,然后再对平均值规范化。式(1)中添加的$\frac{\sqrt{3}}{3}$起规范化作用,因为当$\left|\overrightarrow{H(p)}\right|=1$且WPHFN$\vec{\gamma}_l=(1,1,1)$时,$\vec{E}(\overrightarrow{H(p)})=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{1^2+1^2+1^2}=1$,此时$\frac{\sqrt{3}}{3}$起归一化作用。

定义4 $\overrightarrow{H(p)}$为WPHFE,$\vec{\gamma}_l=(\gamma_l, p_l, \omega_l)$、$\vec{\gamma}_{l'}=(\gamma_{l'}, p_{l'}, \omega_{l'})$为WPHFE中的任意2个元素,则WPHFE$\overrightarrow{H(p)}$的三维向量离差函数定义为

$$\vec{D}(\overrightarrow{H(p)})=\frac{1}{2C^2_{\left|\overrightarrow{H(p)}\right|}}\sum_{\substack{l=1,\\ l'=2,\\ l\neq l'}}^{\left|\overrightarrow{H(p)}\right|}\frac{\vec{\gamma}_l\cdot\vec{\gamma}_{l'}}{\left\|\vec{\gamma}_l\right\|\cdot\left\|\vec{\gamma}_{l'}\right\|},\tag{2}$$

式中:$C^2_{\left|\overrightarrow{H(p)}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{H(p)}\right|!}{2!\cdot(\left|\overrightarrow{H(p)}\right|-2)!}$为二项式系数;$\left\|\vec{\gamma}_l\right\|, \left\|\vec{\gamma}_{l'}\right\|$分别为$\vec{\gamma}_l$与$\vec{\gamma}_{l'}$的模,因为

$\frac{\vec{\gamma}_l \cdot \vec{\gamma}_{l'}}{\left\|\vec{\gamma}_l\right\| \cdot \left\|\vec{\gamma}_{l'}\right\|}$ =cos < $\vec{\gamma}_l$, $\vec{\gamma}_{l'}$ > 为WPHFN$\vec{\gamma}_l$与$\vec{\gamma}_{l'}$之间夹角的余弦值,所以WPHFE$\overrightarrow{H(p)}$的三维向量离差函数值$\vec{D}(\overrightarrow{H(p)})$是由其内部所有两两元素的夹角余弦值的平均值构成。由于$\vec{\gamma}_l$与$\vec{\gamma}_{l'}$的夹角余弦值cos < $\vec{\gamma}_l$, $\vec{\gamma}_{l'}$ > 在区域Ω:[1, 0, 0]×[0, 1, 0]×[0, 0, 1]内为单调递减函数,故可知cos < $\vec{\gamma}_l$, $\vec{\gamma}_{l'}$ >的值越大,WPHFN$\vec{\gamma}_l$与$\vec{\gamma}_{l'}$之间的夹角就越小,考虑到$\vec{\gamma}_l$与$\vec{\gamma}_{l'}$的任意性,可近似判断WPHFE$\overrightarrow{H(p)}$中的元素就越集中($\vec{\gamma}_l$与$\vec{\gamma}_{l'}$共线除外,在具体的决策案例中,由隶属度、概率以及决策专家的综合权重等3个因素构成的WPHFN,其中,所有的WPHFN全部呈线性增长的例子非常少见,本文不考虑此种情形)。

在三维向量得分函数$\vec{E}(\overrightarrow{H(p)})$值与三维向量离差函数$\vec{D}(\overrightarrow{H(p)})$值的基础上,此时判断2个WPHFE$\overrightarrow{H_1(p)}$与$\overrightarrow{H_2(p)}$之间的大小规则有如下定义。

定义5　2个WPHFE$\overrightarrow{H_1(p)}$与$\overrightarrow{H_2(p)}$,$\Delta\overrightarrow{H_1(p)}$、$\Delta\overrightarrow{H_2(p)}$分别为其综合模糊三维向量得分值

(1)若$\Delta\overrightarrow{H_1(p)} > \Delta\overrightarrow{H_2(p)}$,则$\overrightarrow{H_1(p)} > \overrightarrow{H_2(p)}$;

(2)若$\Delta\overrightarrow{H_1(p)} = \Delta\overrightarrow{H_2(p)}$,则$\overrightarrow{H_1(p)} \sim \overrightarrow{H_2(p)}$。

这里$\Delta\overrightarrow{H_1(p)} = \vec{E}(\overrightarrow{H_1(p)}) \times \vec{D}(\overrightarrow{H_1(p)})$,$\Delta\overrightarrow{H_2(p)} = \vec{E}(\overrightarrow{H_2(p)}) \times \vec{D}(\overrightarrow{H_2(p)})$。

下面给出一个例子来说明定义5的可行性及科学性。

例1　比较PHFE $h_1(p)$={(0.6, 0.4), (0.5, 0.6)},$h_2(p)$={(0.5, 0.5), (0.7, 0.5)}的大小。

解　若按照文献[10]针对2个PHFE的大小判断准则,可得PHFE$h_1(p)$、$h_2(p)$的得分函数分别为$s(h_1(p))=0.54$, $s(h_2(p))=0.6$,即$h_1(p) < h_2(p)$。

若在PHFE$h_1(p)$、$h_2(p)$中给予隶属度添加决策专家权重且对专家没有偏好,此时可将PHFE$h_1(p)$、$h_2(p)$描述为$\overrightarrow{H_1(p)}$={(0.6, 0.4, 0.5), (0.5, 0.6, 0.5)},$\overrightarrow{H_2(p)}$={(0.5, 0.5, 0.5), (0.7, 0.5, 0.5)}。按照本文定义5的比较方法,可得$\Delta\overrightarrow{H_1(p)}$ = 0.252 9, $\Delta\overrightarrow{H_2(p)}$ = 0.264 9,即$\overrightarrow{H_1(p)} < \overrightarrow{H_2(p)}$。

若在PHFE$h_1(p)$、$h_2(p)$中给予隶属度添加决策专家权重且对专家有偏好,不妨将2个PHFE描述为

$\overrightarrow{H_1(p)}$={(0.6, 0.4, 0.6), (0.5, 0.6, 0.4)},

$\overrightarrow{H_2(p)}$ = {(0.5, 0.5, 0.7), (0.7, 0.5, 0.3)}。

按照本文定义5的比较方法,可得$\Delta\overrightarrow{H_1(p)}$ = 0.248 3, $\Delta\overrightarrow{H_2(p)}$ = 0.245 8,即$\overrightarrow{H_1(p)} > \overrightarrow{H_2(p)}$。

由上述例1可知,在对2个PHFE比较大小时,若对决策专家没有偏好,此时就算将其权重注入PHFE中也不会改变2个PHFE的大小,因而说明了定义5的有效性。同时进一步可知,若对决策专家有偏好,此时再将其权重加入PHFE中则得到了2个PHFE大小比较的相反结果,这说明决策专家的权重在2个PHFE的大小比较中,起到不可忽视的作用,因而说明了将决策专家权重注入PHFS中的必要性,考虑到决策专家的综合权重相较于其客观权重或主观权重能够更全面地反映其决策作用,故可知,本文在PHFS中添加决策专家的综合权重更加科学。

2　决策方法与过程

为了更好地说明决策方法与过程,同时为了建立本文的决策模型,这里先给出一个加权的概率犹豫模糊集多属性群决策(WPHFSMAGDM)问题的一个定义。

定义6　在MAGDM问题中,决策专家集Z={z_1, z_2, …, z_t, …, z_T},其主观权重为ω'_{z_t}(已知),客观权重为ω''_{z_t}(未知),综合权重为ω_{z_t}(待求),方案集为A={a_1, a_2, …, a_i, …, a_I}、属性集G={g_1, g_2, …, g_j, …, g_J},属性的外部权重、内部权重、综合权重用符号ω'_j、ω''_j、ω_j分别表示且皆未知,决策专家组给予方案的评价数据用WPHFE$\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}$表示,$\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}=\left\{\overrightarrow{\gamma_{ij}^{(k)}}=(\gamma_{ij}^{(k)}, p_{ij}^{(k)}, \omega_{ij}^{(k)}) \middle| \gamma_{ij}^{(k)} \in [0, 1], \sum_{k=1}^{\left|\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right|} p_{ij}^{(k)} = 1, \sum_{k=1}^{\left|\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right|} \omega_{ij}^{(k)} = 1, \omega_{ij}^{(k)} = \sum_{t \in \left\{1, 2, \cdots, \left|\gamma_{ij}^{(k)}\right|\right\}} \omega_t, k = 1, 2, \cdots, \left|\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right| \right\}$,符号$\left|\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right|$表示WPHFE$\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}$中的元素WPHFN$\overrightarrow{\gamma_{ij}^{(k)}}$的个数,式子$\omega_{ij}^{(k)} = \sum_{t \in \left\{1, 2, \cdots, \left|\gamma_{ij}^{(k)}\right|\right\}} \omega_t$泛指将认可隶属度$\gamma_{ij}^{(k)}$的所有决策专家的综合权重相加,$\left|\gamma_{ij}^{(k)}\right|$指认可隶属度$\gamma_{ij}^{(k)}$的专家个数。在定义6的基础上构建

决策模型,同时考虑的属性类型皆为效益型。

2.1 计算决策专家的综合权重

首先,计算所有决策专家在某个方案上关于某个属性的权重

$$\omega_{z_t}^{ij}=1-\frac{\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|}{\sum_{t=1}^{T}\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|},$$

$$(t=1,2,\cdots,T;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ I;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ J),\tag{3}$$

式中γ_{tij}指的是第t个决策专家给予第i个方案关于第j个属性的隶属度值,且默认所有决策专家给予第i个方案关于第j个属性的隶属度值皆为单一值。

其次,计算出所有决策专家针对所有方案在某个属性上的权重

$$\omega_{z_t}^{j}=\frac{\sum_{i=1}^{I}\left(1-\frac{\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|}{\sum_{t=1}^{T}\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|}\right)}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\left(1-\frac{\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|}{\sum_{t=1}^{T}\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|}\right)},$$

$$(t=1,2,\cdots,T;j=1,\ 2,\ \cdots,\ J)。\tag{4}$$

再次,计算出所有决策专家在所有方案上关于所有属性的客观权重

$$\omega''_{z_t}=\frac{\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\left(1-\frac{\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|}{\sum_{t=1}^{T}\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|}\right)}{\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\left(1-\frac{\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|}{\sum_{t=1}^{T}\left|\gamma_{tij}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{tij}\right|}\right)},$$

$$(t=1,2,\cdots,T)。\tag{5}$$

最后,计算决策专家的综合权重ω_{z_t}。决策过程中,当决策专家的客观权重与其主观权重离差程度越明显,说明该专家发挥的评价功能越不稳定,此时,可将该决策专家的权重相应减小,因此,决策专家的综合权重的计算方法为

$$\omega_{z_t}=\frac{1-\left|\omega''_{z_t}-\omega'_{z_t}\right|}{\sum_{t=1}^{T}\left|\omega''_{z_t}-\omega'_{z_t}\right|}\Bigg/\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1-\left|\omega''_{z_t}-\omega'_{z_t}\right|}{\sum_{t=1}^{T}\left|\omega''_{z_t}-\omega'_{z_t}\right|}\right),(t=1,2,\cdots,T)。\tag{6}$$

在计算ω_{z_t}的过程中,由(3)式可知,每位决策专家关于某个方案在某个属性上的权重$\omega_{z_t}^{ij}$不满足归一化条件,也即$\sum_{t=1}^{T}\omega_{z_t}^{ij}\neq 1$,其数值大小仅反映各决策专家在第$i$个方案关于第$j$个属性的重要性程度,$\omega_{z_t}^{j}$与$\omega''_{z_t}$则满足归一化条件。

2.2 确定属性综合权重

属性的综合权重由属性的外部权重与内部权重共同构成,且二者皆采用熵值法进行计算。

2.2.1 外部权重

首先,由式(1)得WPHFE$\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}$的三维向量得分函数值$\left\|\vec{E}\left(\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right)\right\|$,$\left\|\vec{E}\left(\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right)\right\|=\frac{\sqrt{3}\sum_{k=1}^{\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}}\left\|\overrightarrow{\gamma_{ij}^{(k)}}\right\|}{3\left|\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right|}$,$\left\|\overrightarrow{\gamma_{ij}^{(k)}}\right\|$指向量$\overrightarrow{\gamma_{ij}^{(k)}}$的模,$i=1,2,\cdots,I;j=1,2,\cdots,J$。

其次,计算各属性下的熵值$S_j=-\frac{1}{\ln I}\sum_{i=1}^{I}\left\|\vec{E}\left(\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right)\right\|\ln\left\|\vec{E}\left(\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right)\right\|$。

最后,计算属性的外部权重$\omega'_j=\frac{\left|1-S_j\right|}{\sum_{j=1}^{J}\left|1-S_j\right|},(j=1,2,\cdots,J)$。

2.2.2 内部权重

计算属性内部权重的基本思路为:首先,计算各方案在所有属性上的三维向量离差函数值;其次,获取各方案在单个属性上的三维向量离差函数值与所有属性上的三维向量离差函数值的占比;再次,计算所有方案在单个属性上的三维向量离差函数值与所有属性上的三维向量离差函数值的占比;最后,根据所有方案在单个属性上的三维向量离差函数值与所有属性上的三维向量离差函数值的占比之间的差异程度值来确定属性的内部权重。

首先,由式(2)得WPHFE$\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}$的三维向量离差函数值$\left\|\vec{D}\left(\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right)\right\|$为

$$\left\|\vec{D}\left(\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right)\right\|=\frac{\sum_{\substack{k=1,\\k'=2,\\k\neq k'}}^{\left|\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right|}\frac{\overrightarrow{\gamma_{ij}^{(k)}}\cdot\overrightarrow{\gamma_{ij}^{(k')}}}{\left\|\overrightarrow{\gamma_{ij}^{(k)}}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{\gamma_{ij}^{(k')}}\right\|}}{2C_{\left|\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right|}^{2}},$$

$$i=1,2,\cdots,I;\ j=1,2,\cdots,J。\tag{7}$$

其次,计算单个方案在单个属性上的三维向量离差函数值与所有属性上的三维向量离差函数值的占比

$$\varphi_{ij}=\frac{\left\|\vec{D}\left(\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right)\right\|}{\sum_{j=1}^{J}\left\|\vec{D}\left(\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\right)\right\|},$$

$$i=1,2,\cdots,I;\ j=1,2,\cdots,J。\tag{8}$$

再次,计算各属性下的熵值 $S_j'=-\frac{1}{\ln I}\sum_{i=1}^{I}\varphi_{ij}\ln\varphi_{ij}, j=1,2,\cdots,J$。

最后,计算属性的内部权重 $\omega''_j=\frac{\left|1-S_j'\right|}{\sum_{j=1}^{J}\left|1-S_j'\right|}, j=1,2,\cdots,J$。

2.2.3 综合权重

取属性外部权重与内部权重之和的1/2作为属性的综合权重,即有

$$\omega_j=\frac{1}{2}(\omega_j'+\omega''_j), j=1,2,\cdots,J。\tag{9}$$

由式(9)可知,属性的综合权重不仅包含了决策专家组给予方案在各属性上的整体信息差异程度值,同时还蕴含了决策专家组针对所有方案在各个属性上的内部评价信息差异程度值,故属性的综合权重体现了更多有关属性重要程度的决策信息。

2.3 决策过程

2.3.1 0-1优先关系矩阵获取方法与决策作用

在解决经典的PHFSMAGDM问题的方法中,通常需要集结方案在各属性上的值,然后再对方案在所有属性上的值来按照某种逻辑范式进行糅合,以获取方案的综合值,进而对多个备选方案排序。有别于传统的解决PHFSMAGDM问题的方法,Gou等[21]从属性的角度出发建立了AQM排序方法。为了直观说明各个方案的优劣程度,0-1优先关系矩阵是非常实用且有效的工具,在多属性群决策问题中来获取0-1优先关系矩阵的思想为:对具有I个方案中的任意2个方案a_i与$a_{i'}$进行比较,以此来建立矩阵$\boldsymbol{M}=[m_{ii'}]_{I\times I}(i,i'\in\{1,2,\cdots,I\})$($m_{ii'}$由0或1组成,若方案$a_i$不劣于方案$a_{i'}$,则$m_{ii'}=1$;若方案$a_i$劣于方案$a_{i'}$,则$m_{ii'}=0$),此时称矩阵$\boldsymbol{M}=[m_{ii'}]_{I\times I}$为0-1优先关系矩阵。据此思想,本文在第$j$个属性上对任意方案$a_i$与$a_{i'}$进行比较以此来建立在第$j$个属性上的0-1优先关系矩阵$\boldsymbol{M}^j=[m_{ii'}^j]_{I\times I}(i,i'\in\{1,2,\cdots,I\},\ j\in\{1,2,\cdots,J\})$($m_{ii'}^j$由0或1组成,在第$j$个属性上,若方案$a_i$不劣于方案$a_{i'}$,则$m_{ii'}^j=1$,若方案$a_i$劣于方案$a_{i'}$,则$m_{ii'}^j=0$)。可以利用0-1优先关系矩阵在第$j$个属性上直观的获取方案$a_i$与$a_{i'}$的属性权重优势值$\omega_{ii'}^{j^+}$和属性权重劣势值$\omega_{ii'}^{j^-}$(在第$j$个属性上,若方案$a_i$不劣于方案$a_{i'}$,有$\omega_{ii'}^{j^+}=\omega_j$;在第$j$个属性上,若方案$a_i$不优于方案$a_{i'}$,有$\omega_{ii'}^{j^-}=\omega_j$)。这样,在$J$个属性上,能够计算出任意2个方案$a_i$与$a_{i'}$比较后的属性权重优势值$\omega_{ii'}^{j^+}(i,i'\in\{1,2,\cdots,I\})$和属性权重劣势值$\omega_{ii'}^{j^-}(i,i'\in\{1,2,\cdots,I\})$,进而计算出任意2个方案$a_i$与$a_{i'}$在所有属性上的总属性权重优势值$\omega_{ii'}^{+}$和总属性权重劣势值$\omega_{ii'}^{-}$,这里有$\omega_{ii'}^{+}=\sum_{j\in\left(1,2,\cdots\left|\omega_{ii'}^{j^+}\right|\right)}\omega_j$,其中$\left|\omega_{ii'}^{j^+}\right|$表示在$J$个属性中,方案$a_i$不劣于方案$a_{i'}$的属性个数,$j\in\left(1,2,\cdots\left|\omega_{ii'}^{j^+}\right|\right)$泛指$j$在方案$a_i$不劣于方案$a_{i'}$的属性个数中取值;$\omega_{ii'}^{-}=\sum_{j\in\left(1,2,\cdots\left|\omega_{ii'}^{j^-}\right|\right)}\omega_j$,其中$\left|\omega_{ii'}^{j^-}\right|$表示在$J$个属性中,方案$a_i$不优于方案$a_{i'}$的属性个数,$j\in\left(1,2,\cdots\left|\omega_{ii'}^{j^-}\right|\right)$泛指$j$在方案$a_i$不优于方案$a_{i'}$的属性个数中取值。

2.3.2 决策算法步骤

在决策专家综合权重、属性综合权重的基础上,利用0-1优先关系矩阵,提出了一种解决WPHFSMAGDM问题的算法,具体步骤如下:

(1)由式(3)~(6)计算决策专家的综合权重并制作按照本文定义的WPHFS决策信息表。

(2)根据2.2.1~2.2.3小节内容来确定属性的综合权重。

(3)计算WPHFE$\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}$的综合模糊三维向量得分值$\Delta\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}$且以表格形式展示,并利用定义5,在单个属性上对所有方案进行两两比较,并建立0-1优先关系矩阵。

(4)针对任意2个方案a_i与$a_{i'}$,统计并计算任意2个方案a_i与$a_{i'}$在所有属性上的总属性权重优势值$\omega_{ii'}^{+}$与总属性权重劣势值$\omega_{ii'}^{-}$。若$\omega_{ii'}^{+}>\omega_{ii'}^{-}(i,i'\in\{1,2,\cdots,I\})$,则说明方案$a_i$优于方案$a_{i'}$;若$\omega_{ii'}^{+}=\omega_{ii'}^{-}(i,i'\in\{1,2,\cdots,I\})$,则说明方案$a_i$与方案$a_{i'}$等同。

3 数值算例

例2 某二级学院为了推选1篇优秀博士论文参加学校优秀博士论文的评选,现从4篇论文中选出,学位办邀请4位专家对4篇论文盲审,从创新性(g_1)、应用性(g_2)、可读性(g_3)、规范性(g_4)以及学术性(g_5)5个维度进行评审,4位专家记为$z_t(t=1,2,3,4)$,主观权重分别为$\omega'_{z_1}=0.20$,$\omega'_{z_2}=0.24$,$\omega'_{z_3}=0.26$,$\omega'_{z_4}=0.30$。4篇论文记为$a_i(i=1,2,3,4)$,5个评审维度的外部权重记为$\omega'_j(j=1,2,3,4,5)$(未知),内部权重记为$\omega''_j(j=1,2,3,4,5)$(未知),综合权重$\omega_j(j=1,2,3,4,5)$待确定。评审专家给出的评审信息见表1,应用本文方法对4篇论文进行排序以供学位办送评参考。

可以利用本文建立的WPHFSMAGDM模型来解决这个问题,具体过程如下:

(1)由式(3)~(6)可以计算出评审专家的综合权重分别为$\omega_{z_1}=0.249\ 6$,$\omega_{z_2}=0.252\ 7$,$\omega_{z_3}=0.252\ 3$,$\omega_{z_2}=0.245\ 4$,可知4位评审专家的权重差别不大,而4位评审专家的主观权重相对于综合权重来说差别较大。造成差别的主要原因为:主观权重是从决策者的情感出发直接对4位评审专家进行赋权,故随意性较大,综合权重不但包含了4位评审专家的主观权重而且还兼顾了其客观权重,从理性与感性相离程度的角度出发,最终得出4位评审专家的综合权重,因而在决策过程中采用4位评审专家的综合权重比较符合事实。接下来,把4位评审专家的综合权重加入评审信息表中,即将表1转换为由本文定义的WPHFS决策信息数据(表2)。

(2)根据2.2.1~2.2.3小节内容确定评审维度的综合权重,有$\omega_1=0.207\ 8$,$\omega_2=0.208\ 3$,$\omega_3=0.180\ 7$,$\omega_4=0.174\ 6$,$\omega_5=0.228\ 7$。其中$\sum_{j=1}^{5}\omega_j=1.000\ 1>1$,这里的0.000 1为计算时四舍五入造成的误差值。

(3)计算4篇论文在5个评审维度上的综合模糊三维向量得分值$\Delta\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}$(表3)。利用4篇论文的综合模糊三维向量得分值$\Delta\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}$在5个评审维度上对4篇论文进行两两比较,并建立0-1优先关系矩阵$\boldsymbol{M}^j=[m^j_{ii'}]_{4\times4}(i,i'\in\{1,2,3,4\},j\in\{1,2,3,4,5\})$(若$\Delta\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}\geqslant\Delta\overrightarrow{H_{i'j}(p_{i'j})}$,则有$m^j_{ii'}=1$;若$\Delta\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}<\Delta\overrightarrow{H_{i'j}(p_{i'j})}$,则有$m^j_{ii'}=0$),可得

$$\boldsymbol{M}^1=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\1&0&1&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}^3=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{M}^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}^5=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}。$$

(4)针对任意2篇方案a_i与$a_{i'}$,统计并计算任意2篇论文a_i与$a_{i'}$在5个评审维度上的总评审维度的优势值$\omega^+_{ii'}$和劣势值$\omega^-_{ii'}$,分别有

$\omega^+_{12}=\omega_1+\omega_3=0.388\ 5$,$\omega^-_{12}=\omega_2+\omega_4+\omega_5=0.611\ 6$,即$a_1<a_2$;

$\omega^+_{13}=\omega_2+\omega_3=0.389\ 0$,$\omega^-_{13}=\omega_1+\omega_4+\omega_5=0.611\ 1$,即$a_1<a_3$;

$\omega^+_{14}=\omega_1+\omega_3+\omega_5=0.617\ 2$,$\omega^-_{14}=\omega_2+\omega_4=0.382\ 9$,即$a_1>a_4$;

$\omega^+_{23}=\omega_2+\omega_5=0.437\ 0$,$\omega^-_{23}=\omega_1+\omega_3+\omega_4=0.563\ 1$,即$a_2<a_3$;

$\omega^+_{24}=\omega_2+\omega_3+\omega_5=0.617\ 7$,$\omega^-_{24}=\omega_1+\omega_4=0.382\ 4$,即$a_2>a_4$;

$\omega^+_{34}=\omega_1+\omega_3+\omega_5=0.617\ 2$,$\omega^-_{34}=\omega_2+\omega_4=0.382\ 9$,即$a_3>a_4$。

综上可得4篇论文的排序依次为$a_3>a_2>a_1>a_4$。

表1 不同维度4位评审专家给出的原始论文评审信息

维度	a_1	a_2	a_3	a_4
创新性	$\{(0.85\|z_1,z_4),(0.9\|z_2,z_3\}$	$\{(0.95\|z_1),(0.91\|z_2),(0.93\|z_3,z_4)\}$	$\{(0.91\|z_1,z_3),(0.96\|z_2,z_4)\}$	$\{(0.85\|z_1,z_2),(0.89\|z_3,z_4)\}$
应用性	$\{(0.8\|z_1,z_3),(0.9\|z_2,z_4)\}$	$\{(0.96\|z_1,z_4),(0.94\|z_2,z_3)\}$	$\{(0.89\|z_1,z_4),(0.91\|z_2),(0.94\|z_3)\}$	$\{(0.89\|z_1,z_2),(0.92\|z_3,z_4)\}$
可读性	$\{(0.9\|z_1,z_2),(0.85\|z_3,z_4)\}$	$\{(0.78\|z_1,z_2),(0.72\|z_3,z_4)\}$	$\{(0.85\|z_1,z_3),(0.89\|z_2,z_4)\}$	$\{(0.83\|z_1,z_2),(0.89\|z_3),(0.85\|z_4)\}$
规范性	$\{(0.9\|z_1),(0.85\|z_2,z_3),(0.94\|z_4)\}$	$\{(0.78\|z_1,z_3),(0.72\|z_2,z_4)\}$	$\{(0.75\|z_1,z_2),(0.82\|z_3,z_4)\}$	$\{(0.83\|z_1,z_4),(0.88\|z_2,z_3)\}$
学术性	$\{(0.8\|z_1,z_3),(0.85\|z_2,z_4)\}$	$\{(0.86\|z_1,z_4),(0.91\|z_2,z_3)\}$	$\{(0.84\|z_1,z_2),(0.88\|z_3,z_4)\}$	$\{(0.95\|z_1),(0.88\|z_2,z_3,z_4)\}$

注:a_1~a_4指第1~4篇论文;z_1~z_4指第1~4位专家。

表2 不同维度4篇论文加权的概率犹豫模糊集(WPHFS)决策信息

维度	a_1	a_2
创新性	{(0.85,0.5,0.495),(0.9,0.5,0.505)}	{(0.95,0.25,0.249 6),(0.91,0.25,0.252 7),(0.93,0.5,0.497 7)}
应用性	{(0.8,0.5,0.501 9),(0.9,0.5,0.498 1)}	{(0.96,0.5,0.495),(0.94,0.5,0.505)}
可读性	{(0.9,0.5,0.502 3),(0.85,0.5,0.497 7)}	{(0.78,0.5,0.502 3),(0.72,0.5,0.497 7)}
规范性	{(0.9,0.25,0.249 6),(0.85,0.5,0.505),(0.94,0.25,0.245 4)}	{(0.78,0.5,0.501 9),(0.72,0.5,0.498 1)}
学术性	{(0.8,0.5,0.501 9),(0.85,0.5,0.498 1)}	{(0.86,0.5,0.495),(0.91,0.5,0.505)}
维度	a_3	a_4
创新性	{(0.91,0.5,0.501 9),(0.96,0.5,0.498 1)}	{(0.85,0.5,0.502 3),(0.89,0.5,0.497 7)}
应用性	{(0.89,0.5,0.495),(0.91,0.25,0.252 7),(0.94,0.25,0.252 3)}	{(0.89,0.5,0.502 3),(0.92,0.5,0.497 7)}
可读性	{(0.85,0.5,0.501 9),(0.89,0.5,0.498 1)}	{(0.83,0.5,0.502 3),(0.89,0.25,0.252 3),(0.85,0.25,0.245 4)}
规范性	{(0.75,0.5,0.502 3),(0.82,0.5,0.497 7)}	{(0.83,0.5,0.495),(0.88,0.5,0.505)}
学术性	{(0.84,0.5,0.502 3),(0.88,0.5,0.497 7)}	{(0.95,0.25,0.249 6),(0.88,0.75,0.750 4)}

表3 综合模糊三维向量得分值

$\Delta\overrightarrow{H_{ij}(p_{ij})}$	a_1	a_2	a_3	a_4
$\Delta\overrightarrow{H_{i1}(p_{i1})}$ i=1,2,3,4	0.324 7	0.292 1	0.338 3	0.323 5
$\Delta\overrightarrow{H_{i2}(p_{i2})}$ i=1,2,3,4	0.318 7	0.341 8	0.290 8	0.331 4
$\Delta\overrightarrow{H_{i3}(p_{i3})}$ i=1,2,3,4	0.324 7	0.297 4	0.323 6	0.275 9
$\Delta\overrightarrow{H_{i4}(p_{i4})}$ i=1,2,3,4	0.285 4	0.297 4	0.304 7	0.320 2
$\Delta\overrightarrow{H_{i5}(p_{i5})}$ i=1,2,3,4	0.313 5	0.327 0	0.321 4	0.299 2

若将评审专家的主观权重$\omega'_{z_1}=0.20$,$\omega'_{z_2}=0.24$,$\omega'_{z_3}=0.26$,$\omega'_{z_4}=0.30$加入评审信息中,并按照2.2.1~2.2.3小节内容重新计算评审维度的综合权重,进而对4篇论文排序,则4篇论文的排序为$a_4>a_3>a_2>a_1$,在对最优论文的选择上与采用评审专家综合权重计算得出的结果不同。事实上,4位评审专家的综合权重相差无几,这说明4位评审专家在评审过程中所发挥的评审作用差别不大,而4位评审专家的主观权重差别相对较大,因而在评审过程中更加强调的是评审专家的个人评审作用。考虑到赋予评审专家的主观权重随意性较大,因而在决策模型中采用评审专家的主观权重对4篇论文排序得出的结果说服力不强。故可知4篇论文$a_3>a_2>a_1>a_4$的排序更加科学。

4 结束语

PHFS不但允许多个隶属度共存,而且还给予隶属度值赋予了发生的概率,相对于犹豫模糊集可以较好地处理不确定性决策问题,但是PHFS中不同的隶属度值被默认具有相同的重要性,这导致其不能更客观地反映决策问题中那些必须考虑隶属度值重要性的不确定信息,因此,本文提出了WPHFS的概念,WPHFS可以更方便地处理概率犹豫模糊环境下的多属性群决策问题。在利用三维向量刻画WPHFN的基础上建立的WPHFE的三维向量得分函数模型、三维向量离差函数模型可以计算属性的综合权重。从比较任意2个方案的总属性权重优势值与总属性权重劣势值大小的角度来建立的决策算法操作简单、直观,能够快速取得备选方案的排序结果。

笔者接下来的工作是开展WPHFS的集成算子和加权的概率犹豫模糊语言值的研究,从而进一步深入开展基于WPHFS理论的多属性群决策方法研究,并应用于解决实际多属性群决策问题,进一步为多属性群决策的理论与方法提供新思路与新路径。

参 考 文 献

[1] 朱斌.基于偏好关系的决策方法研究及应用[D].南京:东南大学,2014.

[2] TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems,2010,25:529-539.

[3] ZHU B,XU Z S. Probability-hesitant fuzzy sets and the representation of preference relations[J]. Technological and Economic Development of Economy,2018,24(3):

1029-1040.
[4] ZHANG S, XU Z S, HE Y. Operation and integrations of probabilistic hesitant fuzzy information in decision making[J]. Information Fusion, 2017, 38: 1-11.
[5] 曹倩,刘小弟,张世涛,等.概率信息完全未知的概率犹豫模糊多属性决策方法[J].系统科学与数学,2020,40(7):1242-1256.
[6] 朱国成,陈利群,李峰.解决概率犹豫模糊集多属性群决策问题的两种算法[J].东莞理工学院学报,2022,29(5):1-6.
[7] 方冰,韩冰.混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度[J].控制与决策,2023,38(2):546-554.
[8] 宋娟,倪志伟,武文颖,等.属性权重信息未知下基于概率对偶犹豫模糊信息相关性系数的多属性决策方法[J].模式识别与人工智能,2022,35(4):306-322.
[9] 骆华.基于改进距离的概率犹豫模糊多属性决策方法[J].武汉理工大学学报(信息与管理工程版),2020,42(3):239-245.
[10] ZHOU W, XU Z S. Expected hesitant VaR for tail decision making under probabilistic hesitant fuzzy environment[J]. Applied Soft Computing, 2017, 60: 297-311.
[11] 华维灿,孙刚,王贵君.基于概率犹豫模糊相似度的交互式群体决策方法[J].浙江大学学报(理学版),2022,49(4):398-407.
[12] 王志平,傅敏,王沛文.概率犹豫模糊环境下基于前景理论和TOPSIS法的多属性群决策模型[J].科学技术与工程,2022,22(4):1329-1337.
[13] 方冰,韩冰,闻传花.基于新型距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策方法[J].控制与决策,2022,37(3):729-736.
[14] 武文颖,李应,倪志伟,等.概率犹豫模糊Maclaurin几何对称平均算子及其群决策模型[J].系统科学与数学,2020,40(6):1074-1089.
[15] 朱亚辉,高逦.基于Hamacher范数的广义概率犹豫模糊MULTIMOORA决策方法[J].西北工业大学学报,2020,38(6):1361-1369.
[16] 吴健,刘小弟,孙超勇,等.基于GM(1,1)与灰色关联度的概率犹豫模糊信息应急决策方法[J].统计与决策,2020,36(2):164-168.
[17] 朱峰,刘玉敏,靳琳琳.基于关联系数的概率犹豫模糊多属性决策方法[J].统计与决策,2019,35(18):41-45.
[18] 刘玉敏,郭晨阳,朱峰.基于乘性一致性区间概率犹豫模糊偏好关系的群决策方法[J].模糊系统与数学,2022,36(3):86-95.
[19] 汪新凡,周浪,朱远芳,等.基于后悔理论的概率犹豫模糊双边匹配决策方法[J].控制与决策,2022,37(9):2380-2388.
[20] 赵萌,沈鑫圆,何玉锋,等.基于概率语言熵和交叉熵的多准则决策方法[J].系统工程理论与实践,2018,38(10):2679-2689.
[21] GOU X J, XU Z S, LIAO H C. Hesitant fuzzy linguistic entropy and cross-entropy measure and alternative queuing method for multiple criteria decision making[J]. Information Sciences, 2017(388): 225-246.

(责任编辑:马田田)