DOI:10.19789/j.1004-9398.2023.06.007
文献引用:郑文达,滕兆春.温度影响下纤维增强FGM梁的自由振动特性[J].首都师范大学学报(自然科学版),2023,44(6):39-46. ZHENG W D, TENG Z C. Free vibration characteristics of fiber-reinforced FGM beams considering temperature effect[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2023,44(6):39-46.

温度影响下纤维增强FGM梁的自由振动特性*

郑文达, 滕兆春**

(兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要:运用微分求积法(DQM)研究温度影响下纤维增强功能梯度材料(FGM)梁的横向自由振动问题。材料的物性参数由混合率模型给出,并考虑梁内部均匀升温和材料的温度依赖特性。首先基于经典梁理论(CBT)和Hamilton变分原理,建立温度影响下纤维增强FGM梁的运动微分方程,再引入无量纲量对梁自由振动控制微分方程进行无量纲化,然后运用DQM将无量纲自由振动微分方程与边界条件转换为代数特征方程;其次通过编写程序求解特征方程得到无量纲固有频率,并将其退化为FGM梁并与已有文献数据结果对照,验证了文中方法的有效性和正确性;最后研究了不同边界条件下纤维体积分数、温度变化及长细比对纤维增强FGM梁无量纲固有频率的影响。

关键词:纤维增强FGM梁;温度;自由振动;固有频率;微分求积法
中图分类号:O343 **文献标识码**:A

Free vibration characteristics of fiber-reinforced FGM beams considering temperature effect*

ZHENG Wenda, TENG Zhaochun**

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu 730050)

Abstract: The transverse free vibration problem of fiber-reinforced functionally graded materials (FGM) beams considering temperature effect is investigated using the differential quadrature method (DQM). The physical parameters of fiber-reinforced FGM beams are given by the mixing rate model, and the uniform temperature rising inside the beam and the temperature-dependent properties of the materials are considered. Firstly, the motion differential equation for fiber-reinforced FGM beams under temperature influence is established based on the classical beam theory (CBT) and Hamilton's variational principle, and the governing differential equation of free vibration for beams is dimensionless by introducing dimensionless parameters. Then the DQM is applied to convert the dimensionless differential equation of free vibration and boundary conditions into algebraic characteristic equations. By writing a program to solve the characteristic equations, the dimensionless natural frequencies are obtained and degenerated into FGM beams to verify the correctness of the existing literature data results, then the validity and correctness are verified. Finally, the effects of the fiber volume fraction, temperature changes and slenderness ratio on the dimensionless natural

收稿日期:2023-03-31
* 国家自然科学基金项目(12062010)
** 通信作者:tengzc@lut.edu.cn

frequencies of fiber-reinforced FGM beams with different boundary conditions are discussed.

Keywords: fiber-reinforced FGM beams; temperature; free vibration; natural frequency; differential quadrature method(DQM)

CLC:O343 **DC**:A

0 引 言

功能梯度材料(functionally graded materials,FGM)是一种先进的功能型复合材料,与传统复合材料中的层合结构相比,在温度梯度环境下引起的热应力和应力集中等效应被大大减缓。FGM的设计使得材料性能从处于高温的陶瓷表面到金属表面在厚度上能平滑而连续地变化,这是通过逐渐改变材料组分的体积分数来实现的[1]。在较高的环境温度中,特别是腐蚀性条件下常规复合材料的弹性常数和强度降低。因此,功能梯度分布的结构,可以制造出在高温和腐蚀性环境中具有良好表现的复合材料[2]。关于传统陶瓷和金属混合而成的FGM,其力学行为研究可参考Reddy与Chin[3]、Pandey等[4]和Shen[5]学者的系列工作。此外,Lal和Ahlawat[6]基于经典板理论运用微分变换法(differential transform method,DTM)研究了FGM圆板面内受均匀分布在周边压载荷作用下的轴对称振动和屈曲问题,分析了梯度指数和外荷载与其无量纲固有频率和临界屈曲载荷的关系;Fahsi等[7]提出一种改进的准三维剪切变形理论,分析了厚度拉伸效应及孔隙率对弹性地基上含空隙的FGM梁的弯曲、屈曲和自由振动特性的影响;Wang和Ma[8]采用准三维理论和二维板理论,分别计算了石墨烯增强功能梯度板的自由振动与弯曲问题,获得了厚度拉伸对功能梯度板力学行为的影响;Ebrahimi等[9]基于经典梁理论与一阶剪切理论,研究了梯度指数、孔隙率和3种不同类型的温升对含孔隙幂律模型的FGM梁在热环境下自由振动的影响;Chen等[10]基于高阶剪切理论,研究了梯度指数、孔隙率和3种不同类型的温升对FGM梁在热环境下自由振动的影响,给出了不同形函数下的无量纲固有频率;Esen[11]基于一阶剪切理论和改进的有限元方法考虑热环境对受变速度移动荷载的多孔FGM梁振动的影响,计算了孔隙率、不同类型的温升、梯度指数、移动载荷速度和温度等与FGM梁无量纲固有频率的关系;滕兆春等[12]基于经典薄板理论,采用DTM考虑热环境对Winkler-Pasternak弹性地基上多孔FGM矩形自由振动问题的影响,计算并分析了梯度指数、边界条件、温升、弹性地基模量、孔隙率、长宽比和边厚比对横向自由振动无量纲固有频率的影响。以上文献所研究的FGM结构大多采用陶瓷与金属的复合材料。

纤维也可用作FGM的组分,且已被广泛应用于航空、航天、海洋和其他工程领域。Yas和Aragh[13-14]研究了纤维的体积分数和纤维的取向分布对功能梯度分布的纤维增强结构固有频率的影响;Nejati等[15]对纤维铺设方向在厚度方向可变的梁,即转角呈梯度分布,给出了3种分布模型,研究了温度变化、纤维的取向分布以及不同边界条件下对梁固有频率的影响;Nejati等[2]基于三维弹性理论对梯度分布的纤维增强矩形板的2种分布模型在热环境下的自由振动进行分析,研究了温度、体积分数和边界条件对结构无量纲固有频率的影响。

微分求积法(differential quadrature method,DQM)是一种数值求解微分方程的常用方法。该方法操作简单且易于编制程序,并有精度高和计算工作量少等优势,较为适合结构静、动力学行为研究。因此,本文选用DQM作为求解方法。Bellman团队在20世纪70年代提出了DQM,并逐渐成为物理和工程科学求初值或边值问题的一种独特的数值求解方法[16-17]。在DQM求解微分方程时,首先要对计算域进行节点划分,然后使用节点处的函数值作为未知量,用所有节点函数值的加权求和来替代函数在各个节点处的偏导数,每个节点都可以建立一个这样的方程,因此微分方程转化为代数方程组,求解该代数方程组就可得到微分方程的数值解。关于DQM新的发展及其在结构力学问题上的应用与总结可参考相关文献[18-19]。

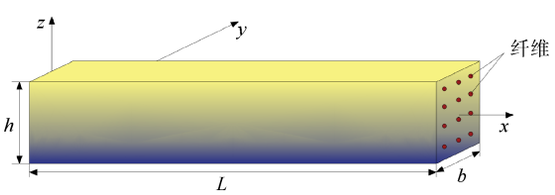
作为一种性能优异的热保护功能材料,FGM结构一般是由金属材料和陶瓷材料混合而成。为提高FGM结构的断裂韧性,可在FGM结构中嵌入均匀或非均匀分布的连续纤维增强而形成增强FGM复合材料[20]。目前,关于温度影响下FGM基体纤维增强结构的力学行为研究在国内外还未见有文献报道。因此,本文将基于经典梁理论(classical

beam theory,CBT)和Hamilton原理,建立温度影响下纤维增强FGM梁自由振动的控制微分方程,采用DQM对梁自由振动的控制微分方程和不同边界条件求解,计算得到其无量纲固有频率值,并分析纤维增强FGM梁在不同边界条件下的纤维体积分数、长细比和温度变化等对梁无量纲固有频率的影响,可为纤维增强FGM的结构设计提供力学依据。

1　控制微分方程的建立

1.1　坐标系的建立

纤维增强FGM梁的几何模型如图1所示。考虑一个长为L、宽为b、厚度为h的纤维增强FGM梁,x轴与梁轴线方向一致,y轴为梁的宽度方向,z轴为梁的厚度方向,建立笛卡尔坐标系。梁基体为FGM材料,纤维沿梁轴线的方向铺设,在梁横截面内均匀分布。



注:L、b和h分别表示纤维增强功能梯度材料(FGM)梁的长、宽和厚度。

图1　纤维增强FGM梁的几何模型

1.2　材料物性描述

由混合率模型,可将纤维增强FGM的物性参数(P),如弹性模量(E)、质量密度(ρ)和热膨胀系数(α)表示为[3]

$$P(z,T)=P_{\mathrm{F}}(z,T)\,(1-\zeta_{\mathrm{f}})+P_{\mathrm{f}}(z,T)\zeta_{\mathrm{f}}, \quad (1)$$

式中:P表示E、ρ和α;z表示梁厚度方向的坐标;T表示温度;ζ为不同材料体积分数。FGM基体的相关物性参数用下标F标注,下标m、c和f分别代表金属、陶瓷和纤维。

FGM基体的物性参数由指数模型[21]给出

$$P_{\mathrm{F}}(z)=B\cdot \mathrm{e}^{\delta(z+h/2)}, \quad (2)$$

式中

$$B=P_{\mathrm{m}},\ \delta=\frac{1}{h}\ln\frac{P_{\mathrm{c}}}{P_{\mathrm{m}}}, \quad (3)$$

式中:B表示FGM基体底部金属材料的物理性质;δ表示FGM基体的指数率;e为自然底数。

1.3　热环境下的物性参数及升温

热环境下纤维、金属和陶瓷的P会随T变化,由Touloukian非线性函数统一表述为[22]

$$P=P_0\left(P_{-1}T^{-1}+1+P_1T+P_2T^2+P_3T^3\right), \quad (4)$$

式中P_0、P_{-1}、P_1、P_2和P_3为温度相关系数,一般由实验给出[2,9],如表1所示。

本文仅考虑均匀升温

$$T=T_0+\Delta T, \quad (5)$$

式中:T_0为无应力状态下的温度;ΔT为升温值。

1.4　运动控制微分方程的建立

基于CBT,在考虑温度影响下建立纤维增强FGM梁的运动微分方程。位移场为:

$$u(x,z,t)=u_0(x,t)-(z-z_0)\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (6)$$

$$w(x,z,t)=w_0(x,t), \quad (7)$$

式中:u_0和w_0分别为几何中面上x和z方向上的位移;t为时间;z_0为物理中面的位置[23]。确定z_0的关系式为

$$z_0=\frac{\int_{-h/2}^{h/2}zE(z)\,\mathrm{d}z}{\int_{-h/2}^{h/2}E(z)\,\mathrm{d}z}=\frac{h\cdot\phi_2}{\phi_1}, \quad (8)$$

式中ϕ_1和ϕ_2是无量纲系数,其具体表达式为:

表1　材料物性参数的温度相关系数

材料	性质/单位	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
Al_2O_3	E/Pa	0	349.55×10^{9}	-3.853×10^{-4}	4.027×10^{-7}	1.673×10^{-10}
	α/K^{-1}	0	$6.826\ 9\times10^{-6}$	1.838×10^{-4}	0	0
	ρ/(kg·m^{-3})	0	3 800	0	0	0
SUS304	E/Pa	0	201.04×10^{9}	3.079×10^{-3}	-6.534×10^{-7}	0
	α/K^{-1}	0	$12.330\ 0\times10^{-6}$	8.086×10^{-4}	0	0
	ρ/(kg·m^{-3})	0	8 166	0	0	0
W	E/Pa	0	411.4×10^{9}	-1.070×10^{-4}	0	0
	α/K^{-1}	0	$4.600\ 0\times10^{-6}$	0	0	0
	ρ/(kg·m^{-3})	0	19 300	0	0	0

注:SUS304表示不锈钢;W表示钨;P表示与温度相关的系数,E、α和ρ分别表示弹性模量、热膨胀系数和质量密度。

$$\phi_1 = \frac{E_f}{E_m}\zeta_f + (1-\zeta_f)\frac{\left(E_c/E_m - 1\right)}{\ln\left(E_c/E_m\right)}, \tag{9}$$

$$\phi_2 = \left(1-\zeta_f\right)\left[\frac{\left(E_c/E_m - 1\right)}{\ln^2\left(E_c/E_m\right)} - \frac{\left(E_c/E_m + 1\right)}{2\ln\left(E_c/E_m\right)}\right], \tag{10}$$

式中:E_c/E_m为刚度比;ζ_f为纤维体积分数。

几何方程为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(z - z_0\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}。 \tag{11}$$

由Hamilton原理可建立温度影响下纤维增强FGM梁的运动微分方程。Hamilton变分原理的表达式为[9]

$$\int_0^t \delta\left(\Pi - U - V\right)\mathrm{d}t = 0, \tag{12}$$

式中:δ为变分符号,Π、U和V分别表示系统的动能、变形能和由热膨胀引起的外力势能。

系统Π的表达式为

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L\int_A \rho\left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2\right)\mathrm{d}A\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^L\int_A \rho\left(\left(\dot{u}_0 - \left(z - z_0\right)\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}\right)^2 + \dot{w}_0^2\right)\mathrm{d}A\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^L\left(I_0\dot{u}_0^2 + I_0\dot{w}_0^2 - 2I_1\dot{u}_0\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + I_2\left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}\right)^2\right)\mathrm{d}x, \tag{13}$$

式中:ρ表示梁材料的质量密度;变量上面的圆点表示该变量对时间的导数;A为梁的横截面积;I_0、I_1和I_2为截面惯性系数,其表达式为

$$\left(I_0, I_1, I_2\right) = \int_A \rho(z)\left[1, \left(z - z_0\right), \left(z - z_0\right)^2\right]\mathrm{d}A。 \tag{14}$$

系统U的表达式为

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L\int_A\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}\right)\mathrm{d}A\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^L\int_A \sigma_{xx}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(z - z_0\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}A\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^L\left(N_{xx}\frac{\partial u_0}{\partial x} - M_{xx}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x, \tag{15}$$

式中N_{xx}和M_{xx}分别为轴力和弯矩,其表达式分别为

$$N_{xx} = \int_A \sigma_{xx}\mathrm{d}A = A_1\frac{\partial u_0}{\partial x} - B_1\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2},$$

$$M_{xx} = \int_A \sigma_{xx}\left(z - z_0\right)\mathrm{d}A = B_1\frac{\partial u_0}{\partial x} - D_1\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \tag{16}$$

式中A_1、B_1和D_1为刚度系数,其表达式为

$$\left(A_1, B_1, D_1\right) = \int_A E(z)\left[1, 2\left(z - z_0\right), \left(z - z_0\right)^2\right]\mathrm{d}A。 \tag{17}$$

由热膨胀引起的

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L N_T\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x, \tag{18}$$

式中N_T为升温引起的热轴力,其表达式为

$$N_T = \int_A \sigma_{xx}^T\mathrm{d}A = -\int_A E\left(z, T\right)\alpha\left(z, T\right)\Delta T\left(z\right)\mathrm{d}A, \tag{19}$$

式中σ_{xx}^T为温度应力。

忽略面内和转动惯性力,由式(12)可得到温度影响下纤维增强FGM梁的运动控制微分方程为

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0。 \tag{20}$$

2 控制微分方程的无量纲化及DQM变换

2.1 无量纲自由振动微分方程

假设温度影响下纤维增强FGM梁做简谐振动,其位移函数形式为$w(x,t) = \bar{W}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,其中:i为虚数单位,$\bar{W}(x)$为梁的振型,$\omega$为圆频率。引入无量纲参数

$$\xi = \frac{x}{L},\ W = \frac{\bar{W}}{h},\ N^* = \frac{N_T L^2}{E_m I},\ \lambda = \omega L^2\sqrt{\frac{\rho_m A}{E_m I}}, \tag{21}$$

式中:λ为无量纲固有频率;N^*为无量纲热载荷;$I = bh^3/12$为梁截面对y轴的惯性矩。则得到温度影响下纤维增强FGM梁的无量纲自由振动微分方程,即关于λ的特征方程

$$\left(\phi_3 - \frac{12\phi_2^2}{\phi_1}\right)\frac{\mathrm{d}^4 W}{\mathrm{d}\xi^4} - N^*\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\xi^2} = \lambda^2\varphi W, \tag{22}$$

式中ϕ_3和φ为无量纲系数,其具体表达式为:

$$\phi_3 = \frac{E_f\zeta_f}{E_m} + \left(1-\zeta_f\right)\left[\frac{3\left(E_c/E_m - 1\right)}{\ln\left(E_c/E_m\right)} - \frac{12\left(E_c/E_m + 1\right)}{\ln^2\left(E_c/E_m\right)}\right] + \left(1-\zeta_f\right)\frac{24\left(E_c/E_m - 1\right)}{\ln^3\left(E_c/E_m\right)}, \tag{23}$$

$$\varphi = \frac{\rho_f}{\rho_m}\zeta_f + \left(1-\zeta_f\right)\frac{\left(\rho_c/\rho_m - 1\right)}{\ln\left(\rho_c/\rho_m\right)}。 \tag{24}$$

$\xi = 0$和$\xi = 1$处的位移边界条件为:

固支(C)

$$W = 0\ 和\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi} = 0, \tag{25}$$

简支(S)

$$W = 0 \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\xi^2} = 0。 \tag{26}$$

2.2　无量纲自由振动微分方程的DQM变换

DQM是将连续函数的定义域划分为节点,节点上的偏导数用所有节点函数值乘以一个加权系数的和来代替,从而将偏微分方程转换为代数方程组来求解的一种数值方法。因形式上近似连续函数的微分求积,故称为DQM。对无量纲自由振动微分方程式(22)进行DQM变换

$$\sum_{j=1}^{N} \phi_0 C_{ij}^{(4)} W_j - N^* C_{ij}^{(2)} W_j = \lambda^2 \varphi W_i, \quad (i = 2, 3, \cdots, N-1), \tag{27}$$

式中:$\phi_0 = \phi_3 - 12\phi_2^2/\phi_1$;$C_{ij}^{(2)}$和$C_{ij}^{(4)}$分别表示$W$对$\xi$二阶和四阶导数的加权系数;$N$是节点总数。

DQM分析中的已有算例表明,与相同数目的均匀化节点相比,非均匀化的节点能够得到较好的计算结果。本文使用非均匀的Chebyshev-Gauss-Lobatto分布选取节点,其表达式为

$$x_i = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi\right\}, \quad (i = 1, 2, \cdots, N)。 \tag{28}$$

一阶加权系数计算式为

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{N} (x_i - x_k)}{(x_i - x_j)\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} (x_j - x_k)}, & (i \neq j), \\ \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \dfrac{1}{x_i - x_k}, & (i = j)。 \end{cases} \tag{29}$$

高阶系数计算式为

$$C_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{N} C_{ik}^{(1)} C_{ik}^{(m-1)}, \ (m = 2, 3, \cdots, N-1), \tag{30}$$

式中$i, j = 1, 2, \cdots, N$。代入边界条件则方程变化为

$$\sum_{j=1}^{N+2} \phi_0 C_{ij}^{(4)} u_j - N^* C_{ij}^{(2)} u_j = \lambda^2 \varphi W_i (i = 2, 3, \cdots, N-1), \tag{31}$$

式中$\{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}} = \left[w_1, w_1', w_2, \cdots, w_{N-1}, w_N, w_N'\right]$。

边界条件变为:

$$u_1 = 0, \ \sum_{k=1}^{N+2} C_{1,k}^{(n_0)} \cdot u_k = 0, \tag{32}$$

$$u_N = 0, \ \sum_{k=1}^{N+2} C_{N,k}^{(n_1)} \cdot u_k = 0, \tag{33}$$

式中:

C-C: $n_0 = 1, n_1 = 1$,
C-S: $n_0 = 1, n_1 = 2$,
S-S: $n_0 = 2, n_1 = 2$,

式中C-C、C-S和S-S分别表示梁两边固支、一边固支一边简支和两边简支。得到特征方程形式为

$$\left[\boldsymbol{A}_v\right]\{\boldsymbol{u}\} = \lambda^2\{\boldsymbol{u}\}, \tag{34}$$

式中矩阵$\left[\boldsymbol{A}_v\right]$为$(N+2)\times(N+2)$阶矩阵。

3　计算结果及分析

材料I和II采用相同的基体材料,纤维分别为碳纤维和钨丝(W),陶瓷、金属和纤维的相关物性参数如表2所示[13,24]。通过计算特征值方程组求解温度影响下的纤维增强FGM梁自由振动时的λ。

表2　陶瓷、金属和纤维的相关物性参数

性质/单位	Al	Al_2O_3	碳纤维	W
E/GPa	70	380	400	400
ρ/(kg·m^{-3})	2 780	3 800	1 800	19 300

为验证DQM的有效性和准确性,本文选取长细比$L/h = 10$,E_c/E_m=2、3、4,ζ_f=0,所用材料为材料I,在不考虑温度的影响下,将式(22)自由振动微分方程退化为FGM梁的自由振动方程,并与文献[21]中前三阶λ作比较,如表3所示。可知采用DQM所得数值解与文献[21]精确解的结果完全吻合。

不考虑温度的影响,不同边界条件下ζ_f对纤维增强FGM梁前三阶λ(即λ_1、λ_2和λ_3)的影响如图2所示。相同材料(材料I)与文献[24]得出相同结论:纤维增强FGM梁的λ随ζ_f的增大而线性增大;更换纤维材料后(材料II)得到相反结论,即纤维增强FGM梁的λ随ζ_f的增大而线性减小。

考虑温度对纤维增强FGM梁的物性参数产生影响与升温,3种不同边界下,ζ_f、T、ΔT及L/h对纤维增强FGM梁λ的影响。注:物性参数由表1给出。

为考察材料温度依赖性质的影响,当$\Delta T = 0$,$L/h = 20$时,3种边界不同ζ_f的纤维增强FGM梁λ_1随T的变化曲线如图3所示。随T的增加,λ_1微弱降低;$T > 300$ K后λ_1显著增大;此外,ζ_f越大,λ越小。在梁的边界条件中,两端固支约束强度最大,两端简支约束强度最小。可见,边界约束越强,λ也越大。

3种边界条件下,不同ζ_f的纤维增强FGM梁前

表3　不同边界条件下FGM梁的前三阶λ比较

E_c/E_m	λ	S-S		C-S		C-C	
		本文解	解析解[21]	本文解	解析解[21]	本文解	解析解[21]
2	λ_1	9.753	9.752 5	15.235	15.235	22.108	22.108
	λ_2	39.010	39.010 0	49.373	49.373	60.942	60.942
	λ_3	87.773	87.773 0	103.012	103.010	119.470	119.470
3	λ_1	9.581	9.581 3	14.968	14.968	21.720	21.720
	λ_2	38.325	38.325 0	48.505	48.505	59.871	59.871
	λ_3	86.232	86.231 0	101.202	101.200	117.371	117.370
4	λ_1	9.419	9.419 0	14.714	14.714	21.352	21.352
	λ_2	37.676	37.676 0	47.684	47.684	58.857	58.857
	λ_3	84.771	84.771 0	99.488	99.488	115.384	115.380

注：E_c/E_m为刚度比；λ为无量纲固有频率；S-S、C-S和C-C分别表示梁两边简支、一边固支一边简支和两边固支。

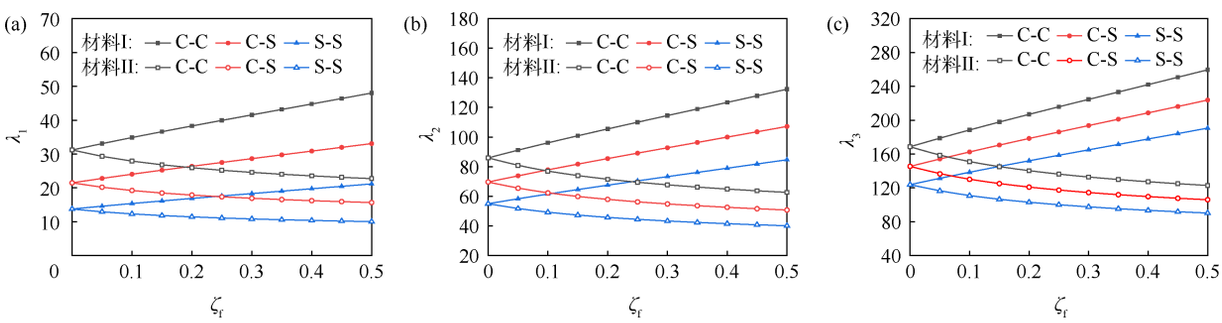


图2　不同边界条件下ζ_f对纤维增强FGM梁前三阶λ的影响

(a)一阶(λ_1)；(b)二阶(λ_2)；(c)三阶(λ_3)

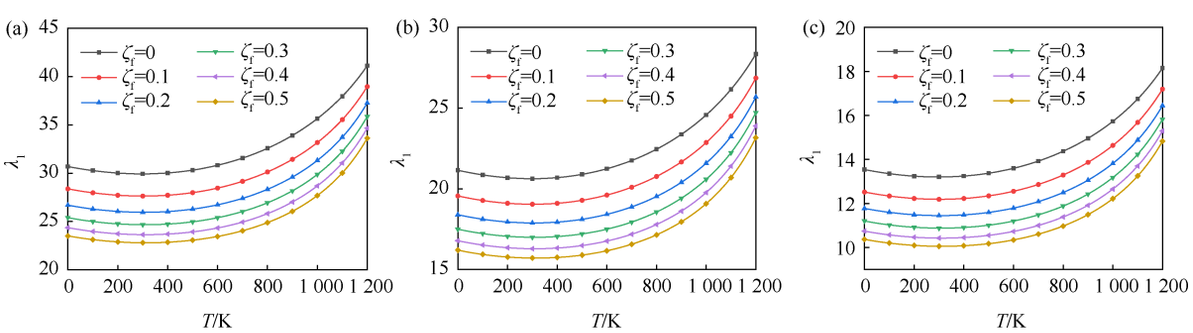


图3　不同边界条件和ζ_f的纤维增强FGM梁λ_1随T的变化

(a) C-C边界；(b) C-S边界；(c) S-S边界

三阶λ随ΔT变化曲线如图4所示，设T_0 = 300 K，L/h = 20。λ_1均随ΔT的增大而逐渐减小至0，且在某个特定升温值时，不同ζ_f的纤维增强FGM梁的固有频率相交于一点。考虑到该固有频率零点对应临界屈曲温度，可知ζ_f越大，临界屈曲温度越高。λ_2随ΔT的增加而降低。此外，约束越强的边界λ越大；ζ_f越大，λ越小。ΔT较小时，λ_3随ΔT的增加而降低，但随着ζ_f的增大，在ΔT超过一定温度时，λ_3随ΔT增大而增大，约束越强这种趋势越明显。

3种边界下，纤维增强FGM梁的前三阶λ随L/h的变化曲线如图5所示，设T_0 = 300 K，ΔT = 20，ζ_f = 0.1。结果表明，前三阶λ随L/h的增加而降低。另外，边界约束越强，λ值越高。

4　结　论

本文考虑温度变化对材料物性参数的影响，基于CBT和Hamilton原理建立纤维增强FGM梁在热环境下的自由振动控制微分方程，对其无量纲化后

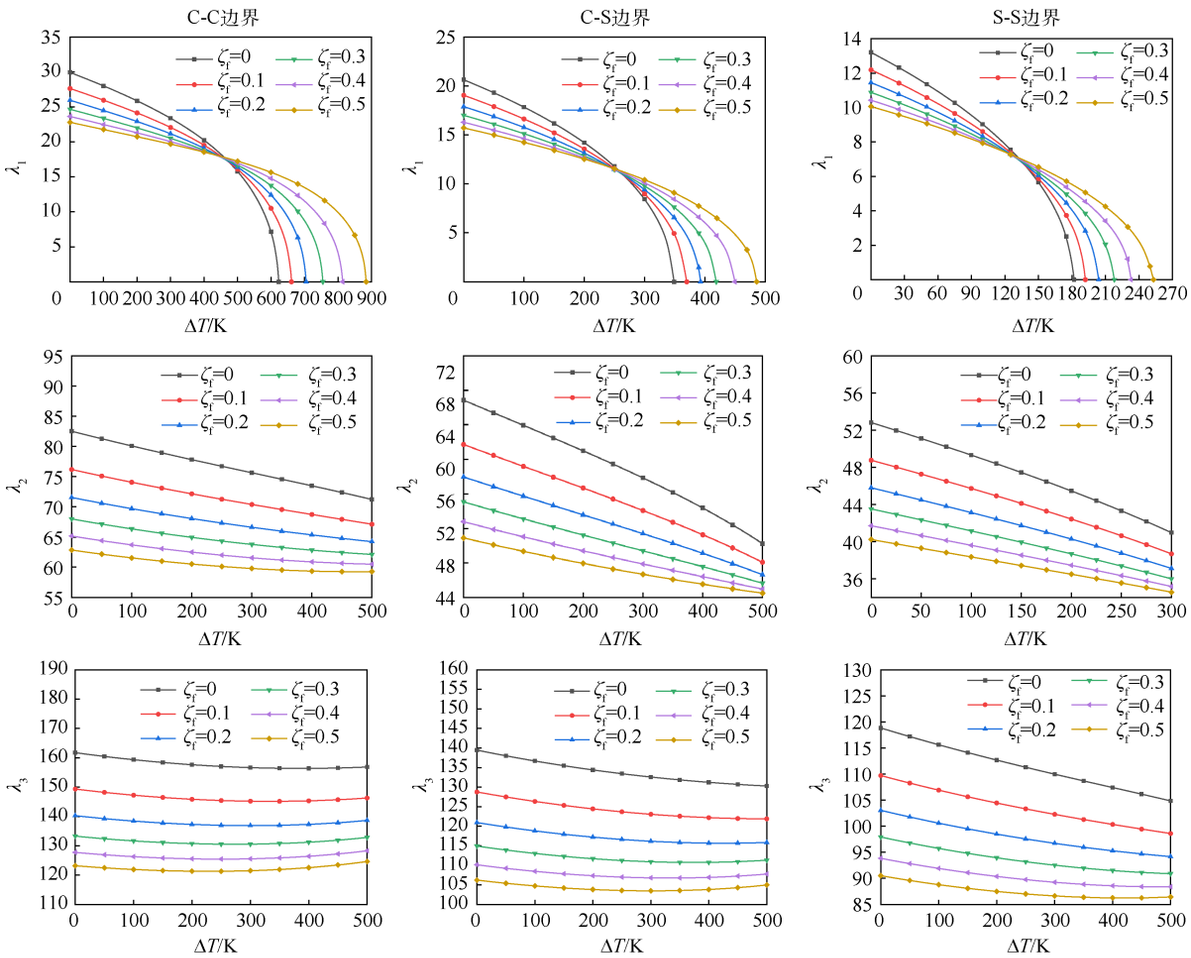


图4　不同边界条件和ζ_f的纤维增强FGM梁前三阶λ随ΔT的变化

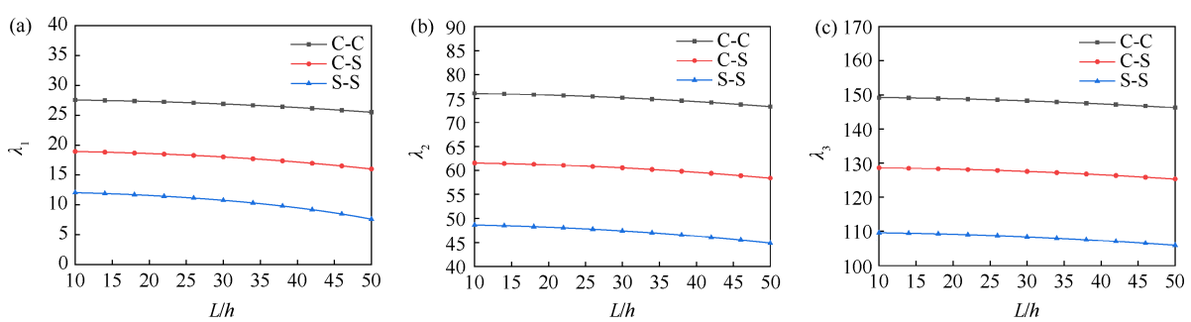


图5　不同边界条件下纤维增强FGM梁的前三阶λ随长细比(L/h)的变化曲线

(a) λ_1;(b) λ_2;(c) λ_3

运用DQM将无量纲自由振动控制微分方程及边界条件进行变换得到特征方程组,通过求解特征值得到λ。研究了C-C、C-S和S-S 3种不同边界下,ζ_f、T、ΔT及L/h对热环境下纤维增强FGM梁λ的影响。不同的纤维材料对纤维增强FGM梁λ的影响不同。考虑材料的温度依赖性质,纤维增强FGM梁λ_1在T较小时,λ_1随着T的升高而微弱降低,随T升高而显著增大。纤维增强FGM梁λ_1随ΔT的增加而降低,且ζ_f越高,临界屈曲温度越大;ΔT较小时,λ_2和λ_3随ΔT的增加而降低,但随着ζ_f的增大,在ΔT超过一定温度时,随升温增大而增大,并且约束越强这种趋势越明显。纤维增强FGM梁前三阶λ随着L/h的增大而减小。

参 考 文 献

[1] HOSSEINI-HASHEMI S, FADAEE M, ATASHIPOUR

S R. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2011,53(1):11-22.

[2] NEJATI M, FARD K M, ESLAMPANAH A, et al. Free vibration analysis of reinforced composite functionally graded plates with steady state thermal conditions[J]. Latin American Journal of Solids and Structures, 2017, 14:886-905.

[3] REDDY J N, CHIN C D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates[J]. Journal of Thermal Stresses, 1998, 21(6):593-626.

[4] PANDEY P M, RATHEE S, SRIVASTAVA M, et al. Functionally graded materials (FGMs): fabrication, properties, applications, and advancements[M]. Boca Raton:CRC Press, 2021.

[5] SHEN H S. Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells[M]. Boca Raton: CRC Press, 2016.

[6] LAL R, AHLAWAT N. Axisymmetric vibrations and buckling analysis of functionally graded circular plates via differential transform method[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2015, 52:85-94.

[7] FAHSI B, BOUIADJRA R B, MAHMOUDI A, et al. Assessing the effects of porosity on the bending, buckling, and vibrations of functionally graded beams resting on an elastic foundation by using a new refined quasi-3D theory[J]. Mechanics of Composite Materials, 2019, 55(2):219-230.

[8] WANG Z Z, MA L S. Effect of thickness stretching on bending and free vibration behaviors of functionally graded graphene reinforced composite plates [J]. Applied Sciences, 2021, 11(23):11362.

[9] EBRAHIMI F, GHASEMI F, SALARI E. Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities[J]. Meccanica, 2016, 51(1):223-249.

[10] CHEN Y K, JIN G Y, ZHANG C Y, et al. Thermal vibration of FGM beams with general boundary conditions using a higher-order shear deformation theory [J]. Composites Part B (Engineering), 2018, 153: 376-386.

[11] ESEN I. Dynamic response of functional graded Timoshenko beams in a thermal environment subjected to an accelerating load [J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2019, 78:103841.

[12] 滕兆春,王伟斌,郑文达.温度影响下Winkler-Pasternak弹性地基上多孔FGM矩形板的自由振动分析[J].工程力学,2022,39(4):246-256.

[13] YAS M H, ARAGH B S. Free vibration analysis of continuous grading fiber reinforced plates on elastic foundation [J]. International Journal of Engineering Science, 2010, 48(12):1881-1895.

[14] ARAGH B S, YAS M H. Three-dimensional free vibration of functionally graded fiber orientation and volume fraction cylindrical panels [J]. Materials and Design, 2010, 31(9):4543-4552.

[15] NEJATI M, FARD K M, ESLAMPANAH A. Effects of fiber orientation and temperature on natural frequencies of a functionally graded beam reinforced with fiber[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2015, 29 (8):3363-3371.

[16] BELLMAN R, CASTI J. Differential quadrature and long-term integration [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 34(2):235-238.

[17] BELLMAN R, KASHEF B G, CASTI J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations [J]. Journal of Computational Physics, 1972, 10(1):40-52.

[18] BERT C W, MALIK M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review [J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(1):1-28.

[19] SHU C. Differential quadrature and its application in engineering[M]. London: Springer Science & Business Media, 2012.

[20] DING K, WENG G J. The influence of moduli slope of a linearly graded matrix on the bulk moduli of some particle- and fiber-reinforced composites[J]. Journal of Elasticity, 1999, 53:1-22

[21] BOUAMAMA M, ELMEICHE A, ELHENNANI A, et al. Exact solution for free vibration analysis of FGM beams [J]. Journal of Composite and Advanced Materials, 2020, 30(2):55-60.

[22] ARIA A I, RABCZUK T, FRISWELL M I. A finite element model for the thermo-elastic analysis of functionally graded porous nanobeams [J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2019, 77:1-16.

[23] 张大光.基于物理中面与高阶剪切变形理论FGM圆板的后屈曲分析[J].力学季刊,2020,41(3):486-498.

[24] 滕兆春,王伟斌,马铃权.纤维增强FGM梁的自由振动和临界屈曲载荷分析[J].机械科学与技术,2022,41 (12):1960-1966.

(责任编辑:兰丽丽)