DOI：10.19789/j.1004-9398.2023.06.002
文献引用：赵临龙．一类Riccati方程特解的探析[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2023，44（6）：8-11. ZHAO L L. Analysis of the special solutions of a class of Riccati equations[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2023，44（6）：8-11.

一类Riccati方程特解的探析*

赵　临　龙**

（安康学院数学与统计学院，陕西 安康　725000）

摘要：Riccati方程在物理学和力学等学科有着广泛的应用，但由于Riccati方程存在的不可积性，使其求解异常困难。现利用Riccati方程的不变量关系，给出一类Riccati方程的解析解，使Riccati方程的不变量解法成为Riccati方程求解的重要路径。

关键词：Riccati方程；解析解；不变量；解法
中图分类号：O175.2　　**文献标识码**：A

Analysis of the special solutions of a class of Riccati equations*

ZHAO Linlong**

（School of Mathematics and Statistics，Ankang University，Ankang Shaanxi　725000）

Abstract：The Riccati equation is widely used in physics，mechanics and other disciplines，but due to the non integrability of Riccati equation，it is very difficult to solve it. In this paper，the analytic solution of a kind of Riccati equation is given by using the invariant relationship of Riccati equation，which makes the invariant solution of Riccati equation an important path to solve Riccati equation.

Keywords：Riccati equation；analytical solution；invariants；solution
CLC：O175.2　　**DC**：A

0　引　言

2010年，哈尔滨工程大学核科学与技术学院博士研究生幸奠川，在研究力学问题时，遇到了一个形式看起来很简单的Riccati方程，但很难求出其解析解，请求给予解答。

问题　对于Riccati方程 $y' = py^2 + a + b\sin\omega t$，$t = 0$，$y(0) = y_0$，求特解 $y = y(1)$，其中 p、a、b、ω 为非零常数。

客观上本题有一定难度。作者经过长期思考与研究，直今才对该问题研究有所突破，现给出相关结果。

1　Riccati方程研究简况

1841年，Liouville考虑了二次Riccati方程

$$L[y] = -y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (1)$$

式中 $P(x)Q(x) \neq 0$，$P(x)$、$Q(x)$ 为连续函数。

一般不能通过初等积分法求得方程（1）的初等函数解[1]。但在实际中，需要得到方程（1）的精确解，即本文引言面临的问题。

Riccati方程在某些条件下，可以获得其初等函数解。1724年，威尼斯学者Jacopo Francesco Riccati，对一般Riccati方程给出结论：Riccati方程在已知一个特解的条件下，可以求其解[2]。因此，Riccati方程的精确解研究，成为人们讨论的重要问题。刘玉

收稿日期：2022-02-22
* 陕西省一流课程建设项目《常微分方程》（2020-156）；陕西省科技厅研究项目（2022JM-050）；2021年陕西省教育科学研究项目（SGH21Y021）
** 通信作者：859041422@qq.com

堂和辛祥鹏[2]对2010—2016年的相关文献进行了分析和总结。2014年：Bougoffa[3]提出了解决满足特定条件方程(1)的直接方法，即如果方程(1)的系数函数满足一定关系，使其成为变量分离方程，就可得到解；王明建等[4]研究了与方程(1)等价的一类微分方程，给出了简单方程的解；段锋等[5]讨论了方程(1)与某个可分离变量微分方程等价的充分必要条件，给出了等价方程的形式；李松桦和张泽川[6]通过函数变换简化方程(1)，分析得到了一类特殊Riccati方程的通解公式。2015年：魏帅帅等[7]通过齐次平衡原理和G'/G展开法对方程(1)进行求解，得到了满足一定条件的G'/G解；何雨蔚[8]求得方程(1)特殊形式的解；张玮玮[9]给出了一类特殊的方程(1)的通解；唐晓等[10]利用积分因子法给出方程(1)有相关的充分必要条件。2016年：王明建等[11]给出复常数系数的方程(1)存在相关通解的充分必要条件；段峰[12]求解方程(1)的3种特殊形式，给出了这些解之间的关系式。2017年：凌云和李满枝[13]研究了一类不能用初等积分法求解的特殊方程(1)的解性，并求出相关方程的通解；Pala和Ertas[14]通过新的变换探求方程(1)级数解，不断拓展方程(1)初等解的形式。

2017—2022年，有10余篇文献讨论Riccati方程的精确解，其主要思路和方法是按照Bougoffa的直接方法，探寻Riccati方程可积的类型。赵临龙[15]将具有代表性的文献[16-18]统一到不变量解法之中，显示不变量解法的优势。现再用不变量方法，研究本文的问题。

2　主要定义及定理

1998年，赵临龙提出Riccati方程的不变量概念，并且利用不变量概念，给出Riccati方程的解法[19-20]。

定义[21-22]　对于Riccati方程(1)称$I_1=P(x)R(x)$，$I_2=\dfrac{P'(x)}{P(x)}+Q(x)$为方程(1)的不变量。

引理1[23]　在方程(1)中，如果存在常数α、β、γ，以及函数$y_0(x)$和可导函数$G(x)(\neq 0)$，满足不变量关系

$$I_1=P(x)L[y_0(x)]=\alpha\gamma G^2(x),\tag{2}$$

$$I_2=\frac{P'(x)}{P(x)}+Q(x)+2P(x)y_0(x)=\frac{G'(x)}{G(x)}+\beta G(x)。\tag{3}$$

则方程(1)经线性变换

$$y=\frac{\alpha G(x)}{P(x)}z(x)+y_0(x),\tag{4}$$

化成积分形式

$$\int\frac{\mathrm{d}z(x)}{\alpha z^2(x)+\beta z(x)+\gamma}=\int G(x)\mathrm{d}x+c,\ (c\text{为任意常数})。\tag{5}$$

3　问题探索

本文利用引理1，对于问题中的Riccati方程

$$y'=py^2+a+b\sin\omega t,\tag{6}$$

解的探求，是将引理1中函数$y_0(x)$的求法转化为一元四次代数方程求解，从而给出方程(6)的解。

令$\omega t=x$，则方程(6)化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{p}{\omega}y^2+\frac{a}{\omega}+\frac{b}{\omega}\sin x\quad(pab\omega\neq 0),\tag{7}$$

$$\text{即}\quad\frac{p}{\omega}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{p}{\omega}\right)^2y^2+\frac{a}{\omega}\frac{p}{\omega}+\frac{b}{\omega}\frac{p}{\omega}\sin x\quad(pab\omega\neq 0),\tag{8}$$

作变换

$$\frac{p}{\omega}y\to y,\frac{a}{\omega}\frac{p}{\omega}\to a,\frac{b}{\omega}\frac{p}{\omega}\to b,\tag{9}$$

其中，$pab\omega\neq 0$。

方程(7)化为方程

$$y'=y^2+a+b\sin x。\tag{10}$$

取函数$y=y_0(x)=m\cos x$(m为待定常数)，使方程(10)满足

$$L[y_0(x)]=m\sin x+m^2\cos^2x+a+b\sin x=-m^2\sin^2x+(m+b)\sin x+a+m^2=0,\tag{11}$$

对于特殊的待定常数m，使其满足

$$(m+b)^2=-4m^2(a+m^2)\Leftrightarrow 4m^4+(4a+1)m^2+2bm+b^2=0。\tag{12}$$

这是关于m的一元四次方程求解。

1545年，意大利数学家费拉里(Ferrari Lodovico)给出了一元四次方程的求根公式(见网页：https://www.doc88.com/p-3099162059900.html，更加具体的文献可参见[24-26])。

引理2[24-26]　对于方程

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,\tag{13}$$

记

$$\Delta_1=c^2-3bd+12ae,\tag{14}$$

$$\Delta_2=3c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace,\tag{15}$$

$$\Delta=\frac{\sqrt[3]{2}\,\Delta_1}{3a\sqrt[3]{\Delta_2+\sqrt{-\Delta_1^3+\Delta_2^2}}}+\frac{\sqrt[3]{\Delta_2+\sqrt{-\Delta_1^3+\Delta_2^2}}}{3\sqrt[3]{2}\,a}。\tag{16}$$

则方程(13)的根为

$$x=-\frac{b}{4a}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{2a^2}-\frac{2c}{3a}-\Delta\pm\frac{-\frac{b^3}{a^3}+\frac{4bc}{a^2}-\frac{8d}{a}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+\Delta}}}。\tag{17}$$

此时,对于方程(12),有

$$\Delta_1=c^2-3bd+12ae=(4a+1)^2+48b^2,\tag{18}$$

$$\Delta_2=3c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace=3(4a+1)^3+432b^2-288(4a+1)b^2,\tag{19}$$

$$\Delta=\frac{\sqrt[3]{2}\,\Delta_1}{3a\sqrt[3]{\Delta_2+\sqrt{-\Delta_1^3+\Delta_2^2}}}+\frac{\sqrt[3]{\Delta_2+\sqrt{-\Delta_1^3+\Delta_2^2}}}{3\sqrt[3]{2}\,a}。\tag{20}$$

则方程(12)的根为

$$m=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(4a+1)}{6}+\Delta}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(4a+1)}{6}-\Delta\pm\frac{-b}{\sqrt{-\frac{(4a+1)}{6}+\Delta}}}。\tag{21}$$

此时,对于一元二次方程(11)有重根时,待定常数m满足

$$|\sin x|=\left|\frac{m+b}{2m^2}\right|\leqslant 1。\tag{22}$$

即

$$2m^2+m+b\geqslant 0\text{或}2m^2-m-b\geqslant 0。\tag{23}$$

按照初等数学相关求解过程,给出不等式(23)成立的条件为

$$|b|\geqslant\frac{1}{8},m<-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{1-8b}}{4},m>\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{1+8b}}{4}。\tag{24}$$

即方程(12)在条件(24)下有解(21)。于是,由变换(9)得到方程(12)的解m。

$$\Delta_1=(4\frac{aP}{\omega^2}+1)^2+48(\frac{bP}{\omega^2})^2,\tag{25}$$

$$\Delta_2=3(4\frac{aP}{\omega^2}+1)^3+432(\frac{bP}{\omega^2})^2-288(4\frac{aP}{\omega^2}+1)(\frac{bP}{\omega^2})^2,\tag{26}$$

$$\Delta=\frac{\sqrt[3]{2}\,\Delta_1}{3a\sqrt[3]{\Delta_2+\sqrt{-\Delta_1^3+\Delta_2^2}}}+\frac{\sqrt[3]{\Delta_2+\sqrt{-\Delta_1^3+\Delta_2^2}}}{3\sqrt[3]{2}\,a}。\tag{27}$$

$$m=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(4aP/(\omega^2)+1)}{6}+\Delta}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(4aP/(\omega^2)+1)}{6}-\Delta\pm\frac{-bP/(\omega^2)}{\sqrt{-\frac{(4aP/(\omega^2)+1)}{6}+\Delta}}}。\tag{28}$$

其中,

$$\left|\frac{bP}{\omega^2}\right|\geqslant\frac{1}{8},m<-\frac{1}{2}-\sqrt{1-8\frac{bP}{\omega^2}},m>\frac{1}{2}+\sqrt{1+8\frac{bP}{\omega^2}}。\tag{29}$$

由引理1得到

$$I_1=P(x)L[y_0(x)]=0=\alpha\gamma G^2(x),\tag{30}$$

$$I_2=\frac{P'(x)}{P(x)}+Q(x)+2P(x)y_0(x)=2m\cos x=\frac{G'(x)}{G(x)}+\beta G(x)。\tag{31}$$

取$\alpha=1,\beta=\gamma=0$,由$2m\cos x=\frac{G'(x)}{G(x)}$,求得$G(x)=e^{\int 2m\cos x\mathrm{d}x}=e^{2m\sin x}$。

则有

$$\int\frac{\mathrm{d}z(x)}{z^2(x)}=\int e^{2m\sin x}\mathrm{d}x+c,(c\text{是积分常数}),$$

$$\frac{1}{z(x)}=-\int e^{2m\sin x}\mathrm{d}x+c,(c\text{是积分常数}),$$

$$z(x)=(-\int e^{2m\sin x}\mathrm{d}x+c)^{-1},(c\text{是积分常数})。$$

于是,

$$y=(\frac{\alpha G(x)}{P(x)})z(x)+y_0(x)=e^{2m\sin x}(-\int e^{2m\sin x}\mathrm{d}x+c)^{-1}+m\cos x,(c\text{是积分常数})。$$

即$\frac{p}{\omega}y=e^{2m\sin\omega t}(-\omega\int e^{2m\sin\omega t}\mathrm{d}t+c)^{-1}+m\cos\omega t$,($c$是积分常数)。

$$y=\frac{1}{p}[e^{2m\sin\omega t}(-\int e^{2m\sin\omega t}\mathrm{d}t+c)^{-1}+m\omega\cos\omega t],\tag{32}$$

其中c是积分常数,$pab\omega\neq 0$。

当$t=0,y(0)=y_0$时,则有

$$y_0 = \frac{1}{p}\left[\left(-\int e^{2m\sin\omega t}dt + c\right)^{-1}\Big|_{t=0} + \omega m\right],$$

$$(pab\omega \neq 0)。$$

于是，$c = \frac{1}{py_0 - \omega m} + \int e^{2m\sin\omega t}dt\Big|_{t=0}$，$(pab\omega \neq 0)$。

$$y = \frac{1}{p}\left[e^{2\sin\omega t}\left(-\int e^{2m\sin\omega t}dt + \frac{1}{py_0 - \omega m} + \int e^{2m\sin\omega t}dt\right)^{-1}\Big|_{t=0} + m\omega\cos\omega t\right],(pab\omega \neq 0)。(33)$$

当$t = 1, y_1 = y(1)$时，则有

$$y_1 = \frac{1}{p}\left[e^{2m\sin\omega}\left(-\int e^{2m\sin\omega t}dt\Big|_{t=1} + \frac{1}{py_0 - \omega m} + \int e^{2m\sin\omega t}dt\Big|_{t=0}\right)^{-1} + m\omega\cos\omega\right],(pab\omega \neq 0)。(34)$$

由求解过程可见，本题不仅反映出微分方程求解的艰难性，更反映出代数方程的复杂性，是值得探讨的问题。

4　结束语

本文给出了方程(6)的通解(32)、初值问题解(33)和初值问题解在t=1时的值(34)，其中m由式(28)、(29)确定。

由此可见Riccati方程(6)的求解，是一个艰难的过程。Riccati方程(1)的精确解研究仍然是一个永远很有趣的问题。利用Riccati方程的不变量研究其可积性，是一条可行的探寻之路。

参 考 文 献

[1] 赵临龙.二次Riccati方程不变量解法的进一步研究[J].首都师范大学学报(自然科学版),2019,40(4):12-15+40.

[2] 刘玉堂,辛祥鹏.二次Riccati方程研究综述[J].聊城大学学报(自然科学版),2017,30(3):21-27.

[3] BOUGOFFA L. New conditions for obtaining the exact solutions of the general Riccati equation [J]. The Scientific World Journal,2014(2014):1-8.

[4] 王明建,王五生,石东洋.一类一阶微分方程与Riccati方程的等价关系[J].河南科学,2014,32(4):479-481.

[5] 段锋,赵临龙,张兰.Riccati方程的几个性质[J].首都师范大学学报(自然科学版),2014,35(6):9-12+50.

[6] 李松桦,张泽川.一类特殊Riccati微分方程的通解公式[J].湖南理工学院学报(自然科学版),2014,27(1):28-30.

[7] 魏帅帅,李凯辉,刘汉泽.G'/G展开法在Riccati方程中的应用[J].河南科技大学学报(自然科学版),2015,36(5):92-97.

[8] 何雨蔚.Riccati微分方程解的探讨[J].攀枝花学院学报,2015,32(2):66-69.

[9] 张玮玮.一类特殊类型的Riccati方程的求解[J].安庆师范学院学报(自然科学版),2015,21(2):110-111.

[10] 唐晓,刘翠萍,周恺.积分因子法在两类微分方程求解中的应用[J].高师理科学刊,2015,35(8):26-27+49.

[11] 王明建,胡博,王桂花.复系数Riccati微分方程解的存在条件及应用[J].西安文理学院学报(自然科学版),2016,19(3):34-36.

[12] 段峰.几类可积的Riccati方程解的性质[J].中央民族大学学报(自然科学版),2016,25(1):27-31.

[13] 凌云,李满枝.一类Riccati方程解的性质[J].海南热带海洋学院学报,2017,24(2):43-46.

[14] PALA Y, ERTAS M O. A new analytical method for solving general Riccati equation [J]. Universal Journal of Applied Mathematics,2017,5(2):11-16.

[15] 赵临龙.Riccati方程精确解的“递推变换解法”研究[J].西南民族大学学报(自然科学版),2022,48(1):89-97.

[16] 倪华,刘向旭,孙菲.变量变换和几类里卡提方程的通解[J].大学数学,2019,35(4):99-105.

[17] 宋华兵.一类Riccati方程的可解的条件[J].数学学习与研究,2019(24):16-17.

[18] 王明建,温少挺.一类特型Riccati微分方程有解的充要条件及应用[J].西安文理学院学报(自然科学版),2019,22(6):1-3.

[19] 赵临龙.Riccati微分方程一个新的可积条件[J].科学通报,1998,43(1):107-109.

[20] ZHAO L L. A new integrability condition for Riccati differential equation[J]. Chinese Science Bulletin,1998,43(5):439-440.

[21] 赵临龙.Riccati方程的不变量及其应用[J].邵阳师专学报,1998(2):16-20.

[22] 赵临龙.可积的Riccati微分方程的不变量变换讨论[J].数学的实践与认识,2008(16):205-209.

[23] 赵临龙.常微分方程研究新论[M].西安:西安地图出版社,2000.

[24] 邹昊轩,朱修龙.论一元四次方程的求根法[J].福建中学数学,2016(5):47-49.

[25] 郭敏.一元四次方程公式解的追根溯源[J].数学之友,2011(3):72-73.

[26] 董祚蕃.关于一元实系数四次方程根的分布特征的续论[J].安庆师范学院学报(自然科学版),1996(1):10-13.

(责任编辑：马田田)