DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.02.004

交换可剩余幺半群的极大元与分支*

杨闻起
(宝鸡文理学院数学系,陕西 宝鸡 721013)

摘 要

讨论了可剩余幺半群S中极大元的性质,并通过给出极大元的分支,对S中的元素进行了分类,建立了S上的同余等价关系,并给出了S的一种商半群结构.

关键词: 序半群,剩余半群,极大元,分支.
中图分类号: O153.1

1 引言和预备知识

序半群是偏序集与半群相互交融的产物,曾一度成为人们研究的热门课题,文[1]已经对序半群作了系统的研究和论述,文[2,3]对可换偏序半群的理想、偏序同态和商序同态的性质进行了刻画,并得到了一些重要结论.

定义1[1] 设S是半群,$\leqslant$为S上的偏序,$\forall a, b, c \in S$,如果$a \leqslant b$,必有

$$ac \leqslant bc, ca \leqslant cb,$$

称S为序半群,记为$(S, \leqslant, \cdot)$,在不致混淆时,也记为S.

定义2[1] 设x, y是序半群S中的元素,如果集合

$$\{z \in S \mid zx \leqslant y\}, \{z \in S \mid xz \leqslant y\}$$

非空,且有最大元,这个最大元分别称为y关于x的左剩余和右剩余,分别记为$y:x$和$y::x$. 如果对S中的任意两个元素都有左剩余和右剩余,称这个序半群为可剩余半群.

设S是交换序半群,那么左剩余与右剩余等价,在交换可剩余半群中,把左、右剩余统称为剩余.

引理1[1] 在交换可剩余半群S中,$\forall x, y, z \in S$,有

(1) $y \leqslant x:(x:y)$,$(x:y)z \leqslant xz:y$;

(2) $(x:y):z = x:yz$,$(x:y):z = (x:z):y$;

(3) $a \leqslant b \Rightarrow \forall x \in S$,有$a:x \leqslant b:x$,$x:b \leqslant x:a$.

在序半群$(S, \leqslant, \cdot)$中,如果存在元素1,使得$\forall x \in S$,有$1x = x1 = x$,称1为该序半群的幺元. 设$m \in S$,如果$\forall x \in S$,由$m \leqslant x$可推出$x = m$,称m是S中的极大元.

幺元是极大元的交换可剩余幺半群是一类重要的序半群,文[4-7]从不同的角度研究了它的性质,也给出了这类序半群的一些基本公式. 为了叙述方便,把幺元是极大元的可换剩余幺半群简记$(S,1)$,1表示其中幺元,它同时还是一个极大元.

引理2[4-7] 在序半群$(S,1)$中,有以下公式:

(1) $x:y = 1 \Leftrightarrow y \leqslant x$,进而$x = y \Leftrightarrow x:y = y:x = 1$;

(2) $x:1 = x$;

(3) $x:x = 1$;

(4) $1:(x:y) = (1:x):(1:y)$;

(5) $x:y \leqslant (x:z):(y:z)$.

本文试图讨论可剩余幺半群$(S,1)$中极大元的性质,并通过引入极大元的分支的概念,对$(S,1)$中的元素进行分类,建立$(S,1)$上的同余等价关系,进而给出它的一种商半群结构.

2 交换可剩余幺半群的极大元

定理1 在序半群$(S,1)$中,以下命题等价:

(1) m为S中的极大元;

(2) $1:(1:m) = m$;

(3) $\exists x \in S$,使$m = 1:x$.

收稿日期:2014-03-01
* 陕西省自然科学基金资助项目(2010JM1016)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明 (1)⇒(2):由引理 1 得 $m\leqslant 1:(1:m)$,但 m 为极大元,故 $1:(1:m)=m$.

(2)⇒(3): 取 $x=1:m$,显然 $m=1:x$.

(3)⇒(1): 设 $m=1:x\leqslant y$,由引理 2 知,$y:m=1$,由引理 1 和引理 2 又得 $m:y=(1:x):y=((y:m):x):y=((y:y):x):m=(1:x):m=m:m=1$. 从而 $y=m$,即 m 为极大元.

定理 2 在序半群 $(S,1)$ 中,$\forall x\in S$,存在唯一极大元 m,使 $x\leqslant m$.

证明 $\forall x\in S$,设 $m=1:(1:x)$,由定理 1 知,m 为极大元,由引理 1 得 $x\leqslant 1:(1:x)=m$.

如果还存在极大元 n 使得 $x\leqslant n$,由引理 1 知,$1:n\leqslant 1:x$,但由定理 1 知,$1:n$ 为极大元,故 $1:x=1:n$. 由于 m 也是极大元,同理得 $1:x=1:m$,进而得到 $1:m=1:n$,故 $1:(1:m)=1:(1:n)$,由于 m,n 都是极大元,由定理 1 得 $m=n$.

定理 3 序半群 $(S,1)$ 中极大元关于任意元的剩余也是极大元.

证明 设 m 是 S 中的极大元,由定理 1 知,存在 $x\in S$,使得 $m=1:x$. 设 a 是 S 中的任意元素,由引理 1 知,$m:a=(1:x):a=1:xa$,所以 $m:a$ 也是极大元.

定理 4 序半群 $(S,1)$ 的全体极大元之集为 $M=\{1:x\mid x\in S\}$,且 M 关于 S 的剩余运算封闭.

证明 由定理 1 知,m 为极大元当且仅当 $\exists x\in S$,使 $m=1:x$,故 $M=\{1:x\mid x\in S\}$. 由定理 3 显然可见,M 对剩余运算封闭.

3 交换可剩余幺半群的分支与商结构

定义 3 设 m 为序半群 $(S,1)$ 的极大元,把集合

$$C_m=\{x\in S\mid x\leqslant m\}$$

叫做该序半群的关于极大元 m 的分支. 特别地,$C_1=\{x\in S\mid x\leqslant 1\}$.

由于 m 是极大元,故 C_m 是可与极大元 m 比较大小的元素的集合. 且由引理 2 得到:$C_m=\{x\in S\mid m:x=1\}$,特别地,$C_1=\{x\in S\mid 1:x=1\}$. 另外这里的 C_1 与文[2]中的 P[4]等价.

定理 5 在序半群 $(S,1)$ 中,C_1 关于乘法和剩余运算:都封闭,从而 C_1 也是交换可剩余幺半群,且 1 为幺元同时为最大元.

证明 设 $x,y\in C_1$,有 $x\leqslant 1,y\leqslant 1$,即 $1:x=1:y=1$,由引理 1 和引理 2 得

$1:xy=(1:x):y=1:y=1$,$1:(x:y)=(1:x):(1:y)=1:1=1$,

即 $xy,x:y\in C_1$,且 $1\in C_1$,$(S,1)$ 是交换可剩余幺半群,故 C_1 也是交换可剩余幺半群,且 1 为幺元. 显然,1 是 C_1 的最大元.

定理 6 在序半群 $(S,1)$ 中,x,y 属于同一分支 $\Leftrightarrow x:y\in C_1$.

证明 设 $x,y\in C_m$,即 $m:x=m:y=1$,由引理 1 和引理 2 得

$$\begin{aligned}1:(x:y)&=(1:x):(1:y)\\&=((m:m):x):((m:m):y)\\&=((m:x):m):((m:y):m)\\&=(1:m):(1:m)=1,\end{aligned}$$

故 $x:y\in C_1$.

反过来,如果 $x:y\in C_1$,由引理 2 知,$(1:x):(1:y)=1:(x:y)=1$,则 $1:y\leqslant 1:x$,由定理 1 又知,$1:y$ 为极大元,故 $1:y=1:x$.

取 $m=1:(1:x)$,由定理 1 知,m 为极大元,由引理 1 知,$x\leqslant 1:(1:x)=m$,故 $x\in C_m$,但 $y\leqslant 1:(1:y)=1:(1:x)=m$,故 $y\in C_m$.

定理 7 序半群 $(S,1)$ 中的每个元素属于且只属于一个分支,故所有极大元的分支组成了 S 的一个等价分类,从而,序半群 $(S,1)$ 的两个不同极大元的分支不交.

证明 $\forall x\in S$,由定理 2 知,存在极大元 m,使 $x\leqslant m$,故 $x\in C_m$. 如果还有极大元 n,使得 $x\in C_n$,则 $x\leqslant n$,由定理 2 知,$m=n$,进而 $C_m=C_n$.

定理 8 在序半群 $(S,1)$ 中,规定:$x\sim y\Leftrightarrow x:y\in C_1$,则 $\sim$ 为 X 上的同余等价关系.

证明 由定理 6 知,x,y 属于同一分支$\Leftrightarrow x:y\in C_1$,故以上规定的关系就是由 S 上的等价分类决定的等价关系.

设 $x\sim y$,即 $1:(x:y)=1$,$\forall a\in S$,由引理 2 和引理 1 得

$$\begin{aligned}1:(ax:ay)&=(1:ax):(1:ay)\\&=((1:a):x):((1:a):y)\\&=((1:x):a):((1:y):a)\geqslant\\&(1:x):(1:y)=1:(x:y)=1,\end{aligned}$$

但 1 为极大元,故 $1:(ax:ay)=1$,即 $ax:ay\in C_1$,从而 $xa\sim ya$,也有 $ax\sim ay$,故 $\sim$ 是 S 上的同余等价关系.

在序半群 $(S,1)$ 中,$\forall x\in S$,由定理 2 知,存在唯一的极大元 m,使 $x\leqslant m$,我们补充定义 $C_x=C_m$,显然,$C_x=C_y\Leftrightarrow x\sim y\Leftrightarrow x:y\in C_1\Leftrightarrow x,y$ 属于同一分支.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理 9　在序半群$(S,1)$中,设按照以上等价关系得到的商集为$\frac{S}{C_1}$,规定: $C_xC_y = C_{xy}$,那么,$\left(\frac{S}{C_1},\cdot\right)$必是交换幺半群,且$C_1$是幺元,称之为 S 关于$C_1$的商半群.

证明　首先,说明以上乘法的合理性. 设$C_x = C_{x'}, C_y = C_{y'}$,即$x \sim x', y \sim y'$,由定理 8 知,~ 是同余等价关系,故$xy \sim x'y \sim x'y'$,即$xy \sim x'y'$,故$C_xC_y = C_{xy} = C_{x'y'} = C_{x'}C_{y'}$,故以上乘法合理的.

其次 $\forall C_x, C_y, C_z \in \frac{S}{C_1}$,有 $C_xC_y = C_{xy} = C_{yx} = C_yC_x$, $C_xC_1 = C_1C_x = C_{1x} = C_x$, $(C_xC_y)C_z = C_{xy}C_z = C_{(xy)z} = C_{x(yz)} = C_x(C_yC_z)$,故$\left(\frac{S}{C_1},\cdot\right)$交换幺半群,且$C_1$是幺元.

值得注意的是,在商半群$\left(\frac{S}{C_1},\cdot\right)$中,如果定义序关系为: $C_x \leqslant C_y \Leftrightarrow x \leqslant y$,由于$x \leqslant y$时$x, y$在同一个极大元的分支中,故$C_x = C_y$,故这样的偏序其实是平凡偏序,即序半群$\left(\frac{S}{C_1},\leqslant,\cdot\right)$是平凡序半群,所以,这样定义偏序没有多大的意义.

定理 10　在序半群$(S,1)$中,设$\frac{S}{C_1}$是 S 关于C_1的商半群,M 是 S 的全体极大元之集,则$\frac{S}{C_1}$与 M 是半群同构.

证明　令$f: M \to \frac{S}{C_1}, m \to C_m$,如果$f(m) = f(n)$,即$C_m = C_n$,于是$m \leqslant n, n \leqslant m$,即$m = n$,从而$f$是单射. $\forall C_x \in \frac{S}{C_1}$,由定理 2 知,存在极大元 m,使$x \leqslant m$,从而$C_x = C_m = f(m)$,故$f$是满射.

$\forall m, n \in M, f(mn) = C_{mn} = C_mC_n = f(m)f(n)$,故$f$是半群同构映射.

参 考 文 献

[1] 谢祥云. 序半群引论[M]. 北京: 科学出版社. 2001.

[2] 邵海琴,何万生,郭莉琴,等. 可换偏序半群的同态与商序同态的若干重要性质[J]. 浙江大学学报(理学版). 2013,40(4):367 – 370.

[3] 邵海琴,何万生,郭莉琴,等. 可换偏序半群的理想扩张、偏序同态与商序同态[J]. 北京联合大学学报(自然科学版). 2012,26(4):51 – 54.

[4] 李继成. 关于剩余幺半群中元素的剩余周期[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版). 1995,23(2):27 – 30.

[5] 李继成. 剩余幺半群的商结构[J]. 纯粹数学与应用数学. 1995,11(1):109 – 113.

[6] 朱少平. 蕴含偏序半群的同态[J]. 纯粹数学与应用数学. 1999,15(4):71 – 74.

[7] 杨胜良. 关于剩余幺半群的锥与序[J]. 湖州师专学报(自然科学版),1997,19(5):1 – 3.

Maximal Elements and Branches of the Commutative Residual Monoids

Yang Wenqi

(Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013)

Abstract

Some properties of maximal elements in commutative residual monoids are discussed, The concepts of branches are introduced, elements of the ordered semigroup are classified, congruentially equivalent relation of the ordered semigroup are established, a quotient of ordered semigroup are given.

Key words: ordered semigroup, residual monoid, maximal element, branch.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net