首都师范大学学报(自然科学版)
第 41 卷　第 1 期　Journal of Capital Normal University　No. 1
2020 年 2 月　(Natural Science Edition)　Feb. ,2020

关于 CopositivePlus 张量及其互补问题的研究

刘　康

(天津大学数学学院,天津　300350)

摘要:近年来,关于张量(超矩阵)的研究得到了越来越多的关注. 相应的互补问题——张量互补问题(TCP),也得到了广泛研究. 本文延伸 CopositivePlus 矩阵的概念到高阶张量的情形,定义了一类新的结构张量,称为 CopositivePlus 张量,并对其性质进行了研究;并且证明,当所涉及的张量是 Q 张量和 CopositivePlus 时,对应的张量互补问题的解集是有界的.

关键词: Q 张量;CopositivePlus 张量;张量互补问题

中图分类号:O224　**DOI**:10. 19789/j. 1004-9398. 2020. 01. 001

0　引　言

随着现代科学技术的发展,张量(超矩阵)作为矩阵的高阶推广,在化学、医学与神经科学、社会网络分析、高光谱图像以及人脸识别等方面都有着广泛应用. 张量互补问题(TCP)作为互补问题的一个特定子类,也引起了广泛关注和研究.

有许多文献对 TCP 解集的理论性质展开研究,包括解的存在性[1-6]、解的全局唯一性[3,7]、解集的有界性[8]和稀疏解的存在性[2]等. Huang 和 Qi 在文献[9]中给出了张量互补问题的一个重要应用,为 TCP 的进一步研究提供了动力.

在 TCP 的研究中,结构张量扮演了重要的角色. 很多结构张量已经被引入和研究,其中,具有广泛应用的 Copositive 张量得到了很多研究[10-14],文献[14]中给出了 Copositive 张量在物理和超图领域的应用. 特别地,在文献[15]中,作者对 Copositive 张量的理论、方法及其应用进行了综述.

在以往关于结构张量的研究中,大多数都是将结构矩阵的概念、相关的理论与方法延伸到张量情况. 由于张量远比矩阵复杂,有很多矩阵相关的理论不能延伸到张量情况. 在本文中,CopositivePlus 矩阵的概念被延伸到高阶张量,即引入了 CopositivePlus 张量的概念,然后讨论了 CopositivePlus 张量的性质,以及对应张量互补问题解集的性质.

收稿日期:2019-01-07

1　预备知识

本文假设 m 和 n 是两个给定的正整数, $m,n \geqslant 2$. 记 $[n]:=\{1,2,\cdots,n\}$. 用 $\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间,定义 $\boldsymbol{R}^n_+:=\{x \in \boldsymbol{R}^n : x \geqslant 0\}$, $\boldsymbol{R}^n_{++}:=\{x \in \boldsymbol{R}^n : x > 0\}$. 所有的向量都是列向量.

一个 m 阶 n 维张量 $A=(a_{i_1\cdots i_m})$ 可以看作是元素 $a_{i_1\cdots i_m}$ 的多重线性排列,其中 $i_j \in \{1,2,\cdots,n\}$, $j \in \{1,2,\cdots,m\}$. 如果张量的元素都为实数,则称该张量为实张量;所有 m 阶 n 维实张量的集合记作 $R^{[m,n]}$. 如果任意置换元素 $a_{i_1\cdots i_m}$ 的下标 $i_1,\cdots,i_m$,其值保持不变,则张量 $A=(a_{i_1\cdots i_m})$ 称为对称张量;如果任意置换元素 $a_{i_1\cdots i_m}$ 的下标 $i_2,\cdots,i_m$,其值保持不变,则张量 $A=(a_{i_1\cdots i_m})$ 称为偏对称张量.

Qi 在文献[16]中提出了对称张量特征值的概念,并讨论了相关的性质. 从此,掀起了张量谱理论的研究热潮. 之后,结构张量、张量互补问题相继引起人们的关注和研究.

对于任意的张量 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 和任意的 $x \in \boldsymbol{R}^n$, $Ax^{m-1} \in \boldsymbol{R}^n$ 被定义如下:

$$(Ax^{m-1})_i = \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n} a_{ii_2\cdots i_m} x_{i_2}\cdots x_{i_m},$$
$$\forall\, i \in \{1,2,\cdots,n\}.$$

对于给定的映射 $F:\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$,且 $q \in \boldsymbol{R}^n$,经典互补问题是找到一个 $x \in \boldsymbol{R}^n$ 使得

$$x \geqslant 0, F(x)+q \geqslant 0, x^{\mathrm{T}}(F(x)+q)=0. \quad (1)$$

首都师范大学学报(自然科学版)

本文主要考虑问题(1)在 $F(x) = Ax^{m-1}, A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 的情形. 此时问题(1)具体化为

$$x \geqslant 0, Ax^{m-1} + q \geqslant 0, x^{\mathrm{T}}(Ax^{m-1} + q) = 0,$$

这被称为张量互补问题,简写为 TCP(A,q), 记 TCP(A,q) 的解集为 SOL(A,q).

定义 1.1[1] 称张量 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是 Q 张量,当且仅当对于所有 $q \in \boldsymbol{R}^n$, 张量互补问题 TCP(A,q) 有解.

定义 1.2[1] 称张量 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是 Copositive 的,当且仅当对于所有 $x \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$, 有 $Ax^m \geqslant 0$.

定义 1.3[1] 称张量 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是严格 Copositive 的,当且仅当对于所有 $x \in \boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}$, 有 $Ax^m > 0$.

定义 1.4[1] 称张量 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是 R 张量,当且仅当对于 $(x,t) \in (\boldsymbol{R}^n_+ \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{R}_+$, 下列方程组无解

$$\begin{cases} (Ax^{m-1})_i + t = 0, & x_i > 0, \\ (Ax^{m-1})_i + t \geqslant 0, & x_i = 0. \end{cases}$$

在上式中,如果取 $t = 0$, 称张量 A 是 R_0 张量.

2 主要结论

2.1 CopositivePlus 张量的性质

定义 2.1.1[17] 矩阵 M 称为 CopositivePlus 的,如果下列条件成立:

(1) $x \geqslant 0$, 有 $x^{\mathrm{T}}Mx \geqslant 0$;

(2) $x \geqslant 0, x^{\mathrm{T}}Mx = 0$, 有 $(M + M^{\mathrm{T}})x = 0$.

引理 2.1.1[17] 如果一个对称 Q 矩阵是 CopositivePlus 的,那么它一定是严格 Copositive 矩阵.

引理 2.1.2[17] 如果一个矩阵 M 是 CopositivePlus 的,那么下列命题等价:

(A) $M \in Q$; (B) $M \in R$; (C) $M \in R_0$.

由定义 2.1.1 引入 CopositivePlus 张量的概念.

定义 2.1.2 假设 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是一个偏对称张量,则 A 是 CopositivePlus 张量当且仅当下列条件成立:

(1) $x \in \boldsymbol{R}^n_+$, 有 $Ax^m \geqslant 0$;

(2) $x \in \boldsymbol{R}^n_+, Ax^m = 0$, 有 $Ax^{m-1} = 0$.

由定义 2.1.2、引理 2.1.1 和引理 2.1.2 有如下定理:

定理 2.1.1 假设 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是一个 Q 张量,如果 A 是 CopositivePlus 的,并且 TCP$(A,0)$ 有非零解,则 A 不是严格 Copositive 张量.

证明:由于张量互补问题 TCP$(A,0)$ 有一个非零解,记为 $\bar{x} \neq 0$, 根据已知条件,有如下结论

$$A\bar{x}^{m-1} \geqslant 0, \bar{x} \geqslant 0, A\bar{x}^m = 0.$$

又因为 A 又是 CopositivePlus 的,故有 $A\bar{x}^{m-1} = 0$. 根据定义 1.3,可知 A 不是严格 Copositive 的.

定理 2.1.2 假设 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是一个 Q 张量,并且是 CopositivePlus 的,如果 $m \geqslant 3$, 那么 A 不一定是 R 张量.

证明:设张量 $A = (a_{i_1i_2i_3}) \in \boldsymbol{R}^{2\times 2\times 2}$ 为一个 3 阶 2 维张量,其元素为 $a_{111} = a_{211} = a_{122} = a_{222} = 1$, $a_{121} = a_{112} = a_{221} = a_{212} = -1$.

故有 $Ax^2 = \begin{pmatrix} (x_1 - x_2)^2 \\ (x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix}$,

$$Ax^3 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2.$$

由定义 2.1.2,知 A 是 CopositivePlus 的. 首先证明 A 是 Q 张量.

假设 a,b 为任意非负实数,就以下几种情形展开证明.

(1)令 $q = (a^2, b^2)^{\mathrm{T}}$, 取 $x = (0,0)^{\mathrm{T}}$, 显然为 TCP(A,q) 的解.

(2)令 $q = (a^2, -b^2)^{\mathrm{T}}$, 取 $x = (0,b)^{\mathrm{T}}$, 满足 $x \geqslant 0, Ax^{m-1} + q = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant 0, x^{\mathrm{T}}(Ax^{m-1} + q) = 0$, 即 TCP$(A,q)$ 有解.

(3)令 $q = (-a^2, b^2)^{\mathrm{T}}$, 取 $x = (a,0)^{\mathrm{T}}$, 满足 $x \geqslant 0, Ax^{m-1} + q = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 + b^2 \end{pmatrix} \geqslant 0, x^{\mathrm{T}}(Ax^{m-1} + q) = 0$, 即 TCP$(A,q)$ 有解.

(4)令 $q = (-a^2, -b^2)^{\mathrm{T}}$, 当 $a < b$ 时,取 $x = (0,b)^{\mathrm{T}}$, 满足 $x \geqslant 0$, $Ax^{m-1} + q = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant 0$, $x^{\mathrm{T}}(Ax^{m-1} + q) = 0$, 即 TCP$(A,q)$ 有解.

(5)令 $q = (-a^2, -b^2)^{\mathrm{T}}$, 当 $a \geqslant b$ 时,取 $x = (a,0)^{\mathrm{T}}$, 满足 $x \geqslant 0, Ax^{m-1} + q = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 - b^2 \end{pmatrix} \geqslant 0$, $x^{\mathrm{T}}(Ax^{m-1} + q) = 0$, 即 TCP$(A,q)$ 有解.

综上, A 是 Q 张量,且 A 是 CopositivePlus 的.

另一方面,由 q 的任意性,取 $q = (0,0)^{\mathrm{T}}$, 容易验证 $x^* = (1,1)^{\mathrm{T}}$ 为解之一,于是有 $(Ax^2)_i = 0$, $x_i \geqslant 0, i = 1,2$, 即 $x = (1,1)^{\mathrm{T}}, t = 0$ 为方程组

$$\begin{cases} (Ax^2)_i + t = 0, x_i > 0, i = 1,2, \\ (Ax^2)_i + t \geqslant 0, x_i = 0, i = 1,2 \end{cases}$$

的解. 由定义 1.4,可知 A 不是 R 张量.

定理 2.1.3 假设 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是一个 Q 张量,

首都师范大学学报(自然科学版)

且是 CopositivePlus 的,如果 $m \geqslant 3$, 那么 A 不一定是 R_0 张量.

证明:同定理 2.1.2,取 $A = (a_{i_1i_2i_3}) \in \boldsymbol{R}^{2\times2\times2}$ 为一个元素为 $a_{111} = a_{211} = a_{122} = a_{222} = 1$, $a_{121} = a_{112} = a_{221} = a_{212} = -1$ 的三阶张量. 由定理 2.1.2, 知 A 是 Q 张量且是 CopositivePlus 的.

由 q 的任意性,取 $q = (0,0)^{\mathrm{T}}$, 容易验证 $x^* = (2,2)^{\mathrm{T}}$ 也为解之一,可知 $x = (2,2)^{\mathrm{T}}$ 为方程组

$$\begin{cases}(Ax^2)_i = 0, x_i > 0, i = 1,2,\\ (Ax^2)_i \geqslant 0, x_i = 0, i = 1,2\end{cases}$$

的一个解. 根据定义 1.4,可知 A 不是 R_0 张量.

2.2　CopositivePlus 张量互补问题

基于 CopositivePlus 矩阵的线性互补问题,Danao[18]证明了其解集的非空有界性,而对于 CopositivePlus 张量,其相应的张量互补问题未必有界.

首先,本研究将 Danao[18]的结论列举如下.

引理 2.2.1[18]　如果一个 Q 矩阵是 CopositivePlus 的,那么它对应的互补问题的解集一定非空有界.

由引理 2.2.1,关于张量互补问题,有如下定理:

定理 2.2.1　假设 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是一个 Q 张量, 并且是 CopositivePlus 的,如果 $m \geqslant 3$, 那么其解集 SOL(A,q) 不一定有界.

证明:举一个解集无界的例子进行反证.

设张量 $A = (a_{i_1i_2i_3}) \in \boldsymbol{R}^{2\times2\times2}$ 为一个 3 阶 2 维张量,其元素为 $a_{111} = a_{211} = a_{122} = a_{222} = 1$, $a_{121} = a_{112} = a_{221} = a_{212} = -1$. 故有

$$Ax^2 = \begin{pmatrix}(x_1 - x_2)^2\\ (x_1 - x_2)^2\end{pmatrix}, Ax^3 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2.$$

由定理 2.1.2 的证明, 知 A 是 Q 张量且是 CopositivePlus 的.

另一方面,由 q 的任意性可知,取 $q = (0,0)^T$, 此时,对任意满足 $(t,t)^T, t \geqslant 0$ 的向量均为张量互补问题的解,故 SOL(A,q) 无界,结论得证.

根据定理 2.2.1,如果 A 是 Q 张量且是 CopositivePlus 的, 那么在什么条件下, 一定能保证 SOL(A,q) 非空有界呢?

不妨假设 A 的每一个元素都为严格正,下面证明此时 SOL(A,q) 非空有界.

定理 2.2.2　假设 $A \in \boldsymbol{R}^{[m,n]}$ 是 Q 张量,并且是 CopositivePlus 的,如果其元素严格正,则其解集 SOL(A,q) 有界.

证明:利用反证法证明该结论的正确性.

首先假设 SOL(A,q) 无界. 即存在一个非负向量列 $\{x^i\}, i = 1,2,\cdots, x^i \neq 0, \|x^i\| \to \infty$ 使得

$$\frac{A(x_i)^{m-1} + q}{\|x^i\|} \geqslant 0, \frac{x^i}{\|x^i\|} \geqslant 0,$$

$$\left(\frac{x^i}{\|x^i\|}\right)^T\left(\frac{A(x_i)^{m-1} + q}{\|x^i\|}\right) = 0, i = 1,2,\cdots$$

因为 $\|x^i\| \to \infty$ 且 $\left\{\frac{x^i}{x^i}\right\}$ 是有界序列,故至少存在一个非负非零向量 $\bar{x}$, 使得

$$A(\bar{x})^{m-1} \geqslant 0, \bar{x} \geqslant 0,$$

$$(\bar{x})^T(A(\bar{x})^{m-1}) = A(\bar{x})^m = 0.$$

根据已知条件,因为 A 是 CopositivePlus 的,可知 $A\bar{x}^{m-1} = 0$. 又因为题设条件有 A 所有元素严格正,所以由 $A\bar{x}^{m-1} = 0$, 可知 $\bar{x} = 0$, 这与其为非零向量矛盾. 故假设不成立, SOL(A,q) 有界.

3　总　结

本文给出了 CopositivePlus 张量的定义,并对这类新定义的结构张量的性质进行了研究. 对于张量互补问题解集的研究方面,本文也证明了 CopositivePlus 张量在为 Q 张量且每一个元素都为严格正时,它对应的张量互补问题的解集是有界的. 当然, CopositivePlus 张量作为 CopositivePlus 矩阵在高阶张量的自然推广,作为 Copositive 张量的一个子类, 具有很好的理论性质,理论上还有很多相应的结论值得延伸和探索.

首都师范大学学报(自然科学版)

参 考 文 献

[1] SONG Y, QI L. Properties of tensor complementarity problem and some classes of structured tensors[J]. Annals of Applied Mathematics, 2017(3):308 - 323.

[2] LUO Z, QI L, XIU N. The sparsest solutions to Z -tensor complementarity problems[J]. Optimization Letters, 2017, 11(3):471 - 482.

[3] GOWDA M S, LUO Z Y, QI L, et al. Z-tensors and complementarity problems[EB/OL]. (2018-11-28)[2015-10-

27]. arXiv: 1510.07933v1.
[4] SONG Y, QI L. Tensor complementarity problem and semi-positive tensors[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 169(3):1069 – 1078.
[5] WANG Y, HUANG Z H, BAI X L. Exceptionally regular tensors and tensor complementarity problems[J]. Optimization Methods & Software, 2015, 31(4): 815 – 828.
[6] SONG Y, YU G. Properties of solution set of tensor complementarity problem[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 170(1):85 – 96.
[7] BAI X, HUANG Z, WANG Y. Global uniqueness and solvability for tensor complementarity problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 170(1):72 – 84.
[8] CHE M, QI L, WEI Y. Positive-definite tensors to nonlinear complementarity problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 168(2):475 – 487.
[9] HUANG Z, QI L. Formulating an n-person noncooperative game as a tensor complementarity problem[J]. Computational Optimization and Applications, 2016, 66(3):1 – 20.
[10] CHEN H, HUANG Z, QI L. Copositivity detection of tensors: theory and algorithm[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 174:1 – 16.
[11] LI L, ZHANG X, HUANG Z, et al. Test of copositive tensors[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2019, 15 (2): 881 – 891.
[12] QI L. Symmetric nonnegative tensors and copositive tensors[J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 439(1): 228 – 238.
[13] SONG Y, QI L. The necessary and sufficient conditions of copositive tensors[J]. Linear & Multilinear Algebra, 2013, 63(1):120 – 131.
[14] CHEN H, HUANG Z, QI L. Copositive tensor detection and its applications in physics and hypergraphs[J]. Computational Optimization and Applications, 2018, 69: 133 – 158.
[15] CHEN H, WANG Y. High-order copositive tensors and its applications[J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2018, 8(6): 1863 – 1885.
[16] QI L. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor[J]. Journal of Symbolic Computation, 2005, 40(6):1302 – 1324.
[17] PANG J. On Q-matrices[J]. Mathematical Programming, 1979, 17(1):243 – 247.
[18] DANAO R. Q-matrices and boundedness of solutions to linear complementarity problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 83(2):321 – 332.

On CopositivePlus Tensor and Tensor Complementarity Problem

LIU Kang

(School of Mathematical Science, Tianjin University, Tianjin 300350)

Abstract: In recent years, researches on tensor (hypermatrices) have received more and more attention. The tensor complementarity problem (TCP), correspondingly, has also been extensively studied. In this paper, we extend the concept of CopositivePlus matrix to the case of tensor. We define a class of structured tensors, called CopositivePlus tensor, and study its properties. We prove that the solution set of a tensor complementarity problem is nonempty and bounded when the involved tensor is a Q tensor and a CopositivePlus tensor.

Keywords: Q tensor; CopositivePlus tensor; tensor complementarity problem

首都师范大学学报(自然科学版)