广义τ-奇异模和τ-非奇异模*

李 煜 彦

(陇南师范高等专科学校数学系, 甘肃 陇南 742500)

摘要:设τ是遗传挠理论,提出了广义τ-奇异和τ-非奇异的概念.称模M中的元素m是广义τ-奇异的,如果其右零化子$\mathrm{ann}_r(m)$是环R的广义τ-本质右理想.称模M是广义τ-奇异(或广义τ-非奇异)的,如果其所有元素都是广义τ-奇异的(或唯一的广义τ-奇异元是0).讨论了模M的广义τ-奇异子模$Z^{\tau}(M)$的若干性质,给出了$N\lhd_{\tau}M$与M/N是广义τ-奇异的等价条件,证明了模M是广义τ-非奇异的,当且仅当对任意广义τ-奇异模N,$\mathrm{Hom}(N,M)=0$.

关键词:广义τ-奇异;广义τ-非奇异;广义τ-本质子模

中图分类号:O153 **DOI**:10.19789/j.1004-9398.2021.02.002

0 引 言

近年来,许多研究者借助于Gomez Pardo[1]在1985年提出的广义τ-本质子模的概念,进一步丰富了extending模的研究范畴.2011年Asgari和Haghany[2]利用广义τ-本质子模引入了模M的维数,称其为M的τ-秩;2012年Seçil和Alkan[3-4]利用广义τ-本质子模引入了τ-extending模的概念,证明了模M每个子模都存在唯一的τ-闭包;2014年Albu[5]利用广义τ-本质子模证明了相对Ossofsky-Smith定理;2013年,Abbas和Hamid[6]推广了(非)奇异模的相关结论,研究了$Z_{\tau}(M)$的相关性质,其中$Z_{\tau}(M)=\{m\in M\mid \mathrm{ann}(m)\leqslant^{\tau e}R_R\}=\{m\in M\mid \exists I\leqslant^{\tau e}R_R,\ni mI=0\}$.受以上文献启发,本文利用广义$\tau$-本质子模提出了广义$\tau$-奇异和$\tau$-非奇异的概念,研究了模$M$的广义$\tau$-奇异子模$Z^{\tau}(M)$的若干性质,其中$Z^{\tau}(M)=\{m\in M\mid \mathrm{ann}(m)\lhd_{\tau}R_R\}=\{m\in M\mid \exists I\lhd_{\tau}R_R,\ni mI=0\}$.显然,当$M$是$\tau$-挠自由模时,$Z^{\tau}(M)=Z_{\tau}(M)$.

本文中的环都是有单位元的结合环,模指酉右R-模.用$N\leqslant_e M$表示N是M的本质子模,称N是M的τ-稠密(纯)子模,如果M/N是τ-挠(自由)的,记为$N\leqslant_{\tau-d}M$($N\leqslant_{\tau-p}M$),用$D_{\tau}(M)$($P_{\tau}(M)$)表示由M的所有τ-稠密(纯)子模构成的集合.称N是M的τ-本质子模,如果$N\leqslant_{\tau-d}M$且$N\leqslant_e M$,记为$N\leqslant^{\tau e}M$.称N是M的广义τ-本质子模,是指对任意$A\leqslant M$,若$N\cap A\in\tau(M)$,则$A\in\tau(M)$,记为$N\lhd_{\tau}M$,此时也称M是N的广义τ-本质扩张.如果N没有真广义τ-本质扩张,则称N是M的广义τ-闭子模,记为$N\leqslant_{tc}M$.称M是extending模,如果M的每个闭子模是M的直和因子.称M是τ-extending模,M的每个τ-闭子模是M的直和因子.称M是广义τ-extending模,M的每个广义τ-闭子模是M的直和因子.由文献[1]知,$N\leqslant_e M$当且仅当$N\lhd_{\tau}M$和$N\leqslant_{\tau-p}M$,故广义τ-extending模是τ-extending模.令$Z(M)=\{m\in M\mid \mathrm{ann}(m)\leqslant_e R_R\}=\{m\in M\mid \exists L\leqslant_e R_R,\ni mL=0\}$,称$Z(M)$为$M$的奇异子模.若$Z(M)=M$(或$Z(M)=0$),则称$M$是奇异(或非奇异)的.设$m\in M$,用$\mathrm{ann}(m)=\{r\in R\mid mr=0\}$表示$m$的零化子.

引理1[4] 以下对M模成立.

(1)设N是M的非τ-挠子模.则$N\lhd_{\tau}M$当且仅当对任意$m\in M\backslash\tau(M)$,存在$r\in R\backslash\tau(R)$,使得$mr\in N\backslash\tau(N)$;

(2)若$N\lhd_{\tau}M$,则对任意$L\leqslant M$,都有$N\cap L\lhd_{\tau}N$;

(3)若$K\lhd_{\tau}K'\leqslant M$,$L\lhd_{\tau}L'\leqslant M$,则$K\cap L\lhd_{\tau}K'\cap L'$;

(4)设$\{A_i\}_{i\in I}$和$\{B_i\}_{i\in I}$分别是M的相互独立的子模族.则$\oplus_I A_i\lhd_{\tau}\oplus_I B_i$当且仅当对任意$i\in I$,$A_i\lhd_{\tau}B_i$;

(5)设$f:M\to N$是R-同态映射.若$W\lhd_{\tau}N$,则$f^{-1}(W)\lhd_{\tau}M$.

引理2[6] 设M是模,则以下结论成立.

(1)$Z_{\tau}(M)$是M是的子模;

收稿日期:2020-04-21

* 甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019B-224);甘肃省高等学校科研项目(2018A-269)

(2)$Z_\tau(M)\mathrm{soc}(R_R)=0$,其中$\mathrm{soc}(R_R)=\bigcap\{I \mid I\leqslant^{\tau e} R\}$;

(3)设$f: M\to N$是R-同态映射,则$f(Z_\tau(M))\subseteq Z_\tau(N)$;

(4)若$N\leqslant M$,则$Z_\tau(N)=N\cap Z_\tau(M)$;

(5)设$M=\oplus_{i\in I}M_i$,则$Z_\tau(M)=\oplus_{i\in I}Z_\tau(M_i)$.

下面先给出$Z^\tau(M)$的性质.

性质1 设M是模,则以下结论成立.

(1)$Z^\tau(M)$是M是的子模;

(2)$Z_\tau(M)\subseteq Z(M)\subseteq Z^\tau(M)$,特别地,若$R_R$或$M$是$\tau$-挠自由的,则$Z_\tau(M)=Z(M)=Z^\tau(M)$;

(3)若$f: M\to N$是R-同态映射,则$f(Z^\tau(M))\subseteq Z^\tau(N)$;

(4)若$N\leqslant M$,则$Z^\tau(N)=N\cap Z^\tau(M)$;

(5)$Z_\tau(M)\mathrm{soc}(R_R)=0$,其中$\mathrm{soc}(R_R)=\bigcap\{I \mid I\lhd_\tau R\}$;

(6)设$M=\oplus_{i\in I}M_i$,则$Z^\tau(M)=\oplus_{i\in I}Z^\tau(M_i)$.

证明 (1)设$x,y\in Z^\tau(M), r\in R$.则存在$I\lhd_\tau R_R$,$J\lhd_\tau R_R$,使得$xI=0, yJ=0$.由引理1(3)知,$I\cap J\lhd_\tau R_R$,且$(x+y)(I\cap J)=0$.因此,$x+y\in Z^\tau(M)$.同理可证$xr\in Z^\tau(M)$.从而$Z^\tau(M)$是M是的子模.

(2)由文献[4]性质2.1知,$N\leqslant_e M$当且仅当$N\lhd_\tau M$和$N\leqslant_{\tau\text{-}p}M$,故$Z(M)\subseteq Z^\tau(M)$.由文献[6]知,$Z_\tau(M)=Z(M)\cap\tau(M)$,故$Z_\tau(M)\subseteq Z(M)$.从而$Z_\tau(M)\subseteq Z(M)\subseteq Z^\tau(M)$.

特别地,若R_R或M是τ-挠自由的,则R_R的广义τ-本质右理想和本质右理想以及M的广义τ-本质子模和本质子模都是一致的,故$Z_\tau(M)=Z(M)=Z^\tau(M)$.

(3)设$x\in f(Z^\tau(M))$,则存在$m\in Z^\tau(M)$,使得$f(m)=x$.于是存在$I\lhd_\tau R_R$,使得$mI=0$.因此,$f(mI)=f(m)I=xI=0$,从而$x\in Z^\tau(N)$.即$f(Z^\tau(M))\subseteq Z^\tau(N)$.

(4)显然.

(5)设$x\in Z^\tau(M)$,则$\mathrm{ann}(x)\lhd_\tau R_R$.故$\mathrm{soc}(R_R)\subseteq\mathrm{ann}(x)$,从而$x\mathrm{soc}(R_R)=0$.

(6)设$(m_i)_{i\in I}\in Z^\tau(M)$,则$\mathrm{ann}((m_i)_{i\in I})\lhd_\tau R_R$.于是对任意$i\in I$,$\mathrm{ann}(m_i)\lhd_\tau R_R$.因此$(m_i)_{i\in I}\in Z^\tau(M_i)$,即$Z^\tau(M)\subseteq\oplus_{i\in I}Z^\tau(M_i)$.反过来,设$(m_i)_{i\in I}\in\oplus_{i\in I}Z^\tau(M_i)$,则任意$i\in I$,$\mathrm{ann}(m_i)\lhd_\tau R_R$.则存在$I$的有限子集$J$,使得只有当$i\in J$时,$m_i\neq 0$.由引理1(3)知,$\mathrm{ann}((m_i)_{i\in I})=\bigcap_{i\in J}\mathrm{ann}\,(m_i)_i\lhd_\tau R_R$.从而$(m_i)_{i\in I}\in Z^\tau(M)$.

定义1 设M是模.称$Z^\tau(M)$为M的广义τ-奇异子模.若$Z^\tau(M)=M$(或$Z^\tau(M)=0$),则称M是广义τ-奇异(或非奇异)的.

易知,Z^τ是左正和预根.由文献[4]知,由广义τ-奇异模构成的类关于子模、商模、直和是封闭的;由广义τ-非奇异模构成的类关于子模、本质扩张、模扩张、直积是封闭的.

由性质1易得如下结论.

推论1 以下对模M成立.

(1)若M是广义τ-非奇异的,则M是非奇异的;

(2)若M是奇异的,则M是广义τ-奇异的.

定理1 模M是广义τ-非奇异的,当且仅当对任意广义τ-奇异模N,都有$\mathrm{Hom}(N,M)=0$.

证明 必要性.设M是广义τ-非奇异的,N是广义τ-奇异的,$f: N\to M$是R-模同态映射.则由性质1,$f(N)=f(Z^\tau(N))\subseteq Z^\tau(M)=0$.

充分性.设对任意广义τ-奇异模N,都有$\mathrm{Hom}(N,M)=0$.因为$Z^\tau(Z^\tau(M))=Z^\tau(M)$,所以$\mathrm{Hom}(Z^\tau(M),M)=0$.特别地,对于包含同态映射$g: Z^\tau(M)\to M$,$g=0$.从而$Z^\tau(M)=0$.

定理2 若存在短正和序列$0\to N\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}L\to 0$,使得$\mathrm{Im}f\lhd_\tau M$,则$L$是广义$\tau$-奇异的.

证明 只需证$L\subseteq Z^\tau(L)$.设$l\in L$,则存在$m\in M$,使得$g(m)=l$.定义映射$h: R_R\to M(r\mapsto mr,\forall r\in R)$,易知$h$是$R$-同态映射.因为$\mathrm{Im}f\lhd_\tau M$,由引理1(5)知,$h^{-1}(\mathrm{Im}f)\lhd_\tau R_R$.令$I=\{r\in R \mid mr\in f(N)\}$,则$I\lhd_\tau R_R$.于是$mI\subseteq\mathrm{Im}f=\ker g$.故有$g(mI)=g(m)I=lI=0$,即$l\in Z^\tau(L)$.从而$L\subseteq Z^\tau(L)$.

定理3 若L是τ-挠自由且广义τ-奇异模,则存在短正和序列$0\to N\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}L\to 0$,使得$\mathrm{Im}f\lhd_\tau M$.

证明 设L是τ-挠自由且广义τ-奇异模,则存在自由模M以及M的子模N,使得$0\to N\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}L\to 0$是短正和序列.设$\{m_i\}_{i\in I}$是$M$的一组基,则对任意$i\in I$,存在$J_i\lhd_\tau R_R$,使得$g(m_i)J_i=g(m_iJ_i)=0$,故$m_iJ_i\leqslant N$.由引理1(4),$\oplus_{i\in I}m_iJ_i\lhd_\tau\oplus_{i\in I}m_iR=M$.因为$\oplus_{i\in I}m_iJ_i\leqslant N$,由引理1(2),$N\lhd_\tau M$.从而$\mathrm{Im}f\lhd_\tau M$.

推论2 设L是τ-挠自由且广义τ-奇异模,$f: R\to L$是R-同态映射.则$\mathrm{Ker}f\lhd_\tau R$.

证明 因为广义τ-奇异模构成的类关于子模是封闭的,所以$f(R)$是τ-挠自由且广义τ-奇异的.由定理3知,存在短正和序列$0\to N\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M/N\to 0$,使

得 $N\lhd_\tau M$,且 $f(R)\cong M/N$. 由于 R_R 是投射的,因此存在 R-同态映射 $h: R\to M$,使得图1可换.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & R & \xrightarrow{f} & f(R) & & \\ & & & & h\downarrow & & \cong\downarrow & & \\ 0 & \to & N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M/N & \to & 0 \end{array}$$

图1　交换图

由引理1(5)知,$\ker f=h^{-1}(N)\lhd_\tau R$.

推论3　设 M 是广义 τ-非奇异的,$N\leqslant M$. 则 M/N 是广义 τ-奇异的当且仅当 $N\lhd_\tau M$.

证明　必要性. 若 M/N 是广义 τ-奇异的,设 $m\in M\backslash\tau(M)$. 显然 $m\neq 0$,且存在 $I\lhd_\tau R_R$,使得 $mI+N=N$. 下面说明 $mR\cap N\neq 0$,否则若 $mR\cap N=0$,则 $mI\cap N=0$,且 $(mI+N)/N\cong(mI\cap N)/mI$. 从而由正合序列 $0\to mI\cap N\to mI\to(mI+N)/N\to 0$ 可知,$mI=0$. 于是 $m\in Z^\tau(M)=0$,这与 $m\neq 0$ 矛盾. 因此,存在 $r\in R$,使得 $mr\in N\backslash\tau(M)$. 从而由引理1(1),$N\lhd_\tau M$.

充分性. 由定理3易证.

参 考 文 献

[1] GOMEZ PARDO J L. Spectral Gabriel topologies and relative singular functors[J]. Communications in Algebra, 1985, 13(1): 21-57.

[2] ASGARI S H, HAGHANY A. Ranks of modules relative to a torsion theory[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2011, 37(4): 19-33.

[3] SEÇIL Ç G, ALKAN M. UC modules with respect to a torsion theory[J]. Turkish Journal of Mathematics, 2012, 36(3): 376-385.

[4] SEÇIL Ç G, ALKAN M. On τ-extending modules[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2012, 9(1): 129-142.

[5] ALBU T. The Osofsky-Smith theorem for modular lattices, and applications (Ⅱ)[J]. Communications in Algebra, 2014, 42(6): 2663-2683.

[6] ABBAS M S, HAMID A F. A note on singular and nonsingular modules relative to Torsion Theories[J]. Mathematical Theory and Modeling, 2013, 3(14): 11-15.

[7] ASGARI S H, HAGHANY A, REZAEI A R. Modules whose t-closed submodules have a summand as a complement[J]. Communications in Algebra, 2014, 42(12): 5299-5318.

[8] ASGARI S H. T-quasi-continuous modules[J]. Communications in Algebra, 2019, 47(5): 1939-1953.

[9] ASGARI S H. T-continuous modules[J]. Communications in Algebra, 2017, 45(5): 1941-1952.

[10] DUNG N V, HUYNH D V, SMITH P F, et al. Extending modules[M]. Pitman Research Notes in Mathematics Series 313. Harlow: Longman Scientifific& Technical, 1994.

[11] AMIN I, IBRAHIM Y, YOUSIF M F. C3-modules[J]. Algebra Colloquium, 2015, 22(4): 655-670.

[12] DING N Q, IBRAHIM Y, ZHOU Y Q. C4-modules[J]. Communications in Algebra, 2017, 45(4): 1727-1740.

[13] DEHGHANI N, AZMY F E, RIZVI S T. On the Schröder-Bernstein property for modules[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2019, 223(1): 422-438.

Generalized τ-singular and τ-nonsingular modules

LI Yuyan

(Department of Mathematics, Longnan Teachers College, Longnan Gansu　742500)

Abstract: In this paper, the concept of generalized τ-(non)singularity is introduced. An element m in a module M is called generalized τ-singular if its right annihilator is a generalized τ-essential right ideal in R. The module M is generalized τ-singular (resp. generalized τ-nonsingular) if all its elemenets are generalized τ-singular (resp. if the only generalized τ-singular element is 0). Some properties of $Z^\tau(M)$ which is a generalized τ-singular submudules of M are discussed, the equivalent condition of $N\lhd_\tau M$ and M/N being generalized τ-singular is given, it is proved that a module M is generalized τ-nonsingular if and only if $\mathrm{Hom}(N,M)=0$ for all generalized τ -singular modules N.

Keywords: generalized τ-singular; generalized τ-nonsingular; generalized τ-essential submodules

(责任编辑:马田田)