DOI:10.19789/j.1004-9398.2026.05.007　　**Open Access**
文献引用:黄旭,耿俊.一类Trellis上的三角模[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(5):42-46. Huang Xu, Geng Jun. A class of triangular norms on Trellis[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2026,47(5):42-46.

一类Trellis上的三角模*

黄　旭，耿　俊**

（内蒙古师范大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特　010022）

摘要:本文探究了非传递性对于Trellis结构上定义聚合算子的重要作用,基于区间子Trellis上给定的三角模得到了Trellis上一类新的三角模,给出了Trellis上三角模的不同构造方法。

关键词:Psoset;Trellis;三角模
中图分类号:O153;O159　　**文献标志码**:A

A class of triangular norms on Trellis*

Huang Xu，Geng Jun**

（College of Mathematics Science，Inner Mongolia Normal University，
Hohhot Inner Mongolia　010022）

Abstract: This article explores the important role of non transitivity in defining aggregation operators on Trellis. Based on the given triangular norms on interval sub Trellis, a new class of triangular norms on Trellis is obtained, and different construction methods for triangular norms on Trellis are presented.

Keywords: Psoset; Trellis; triangular norms
CLC: O153; O159　　**DC**: A

0　引　言

为了在统计度量空间的框架下对三角不等式进行推广,Menger[1]提出了三角模的概念,其在诸多应用领域起到了重要的作用。自Goguen[2]将三角模从单位区间扩展到广义序结构以来,其成果已成为处理复杂智能系统中非数字化信息的关键工具。

在许多数学分支及其他学科领域中,除了二元关系中较常见的传递性属性外,非传递关系同样普遍存在且发挥着重要作用[3]。概率论中对随机变量的讨论也体现出不具有传递性的关系特征[4-5]。Fried[6]中提出了Psoset的概念,文献[7]中定义了类似于格的Trellis结构,其他文献也对Psoset与Trellis展开了研究[8-15]。受有界格上聚合算子研究成果的启发[16-19],探索Trellis上的聚合算子逐渐成为该领域的热点。Zedam和Baets[20]首次将三角模的概念引入到Trellis上;Kong与Zhao[21]研究了Trellis上的一致模并提出了其构造方法。探索Trellis上更多新型聚合算子,仍是该领域的重要课题。

在此基础之上,本文基于Trellis上给定的三角模,构造Trellis上一类新的三角模,为信息聚合领域提供新的数学理论。

1　预备知识

定义1.1[20]　设X是一个非空集合,$\trianglelefteq$是其上的二元关系,若满足自反性和反对称性,则称$\trianglelefteq$是X上的一个Pseudo序。具有Pseudo序关系的集合X称为Psoset,记作$\mathbb{P}=(X,\trianglelefteq)$。

收稿日期:2024-07-09
*国家自然科学基金项目(12461093);内蒙古自然科学基金项目(2023MS01009);内蒙古师范大学科研专项项目(2023JBQN044)
**通信作者:gengjun@imnu.edu.cn

定义 1.2[20]　设 $\mathbb{P}=(X, \trianglelefteq)$是Psoset,若对任意 $x,y\in X$,$x\wedge y(x\vee y)$存在,则称 $\mathbb{P}$为∧–semi–Trellis(∨–semi–Trellis)。若 $\mathbb{P}$既是∧–semi–Trellis,又是∨–semi–Trellis,则称为Trellis,记作 $\mathbb{T}=(X, \trianglelefteq, \wedge, \vee)$。

定义 1.3[20]　若Psoset存在最小元(用0表示)和最大元(用1表示),则称为有界Psoset,记作 $\mathbb{P}=(X, \trianglelefteq, 0, 1)$。同理有界Trellis记作$\mathbb{T}=(X, \trianglelefteq, \wedge, \vee, 0, 1)$。

定义 1.4[20]　设 $\mathbb{T}=(X, \trianglelefteq, \wedge, \vee, 0, 1)$是有界Trellis,若 a和 b不可比较,则记为 $a\|b$。将所有与 a不可比较的元的集合记为 $I_a=\{x\in X|x\|a\}$。

定义 1.5[20]　设 $\mathbb{P}=(X, \trianglelefteq)$是一个Psoset,称 X中的元 a为:

(1)右传递元:对任意 $x,y\in X$,当 $a\trianglelefteq x\trianglelefteq y$,有 $a\trianglelefteq y$。

(2)左传递元:对任意 $x,y\in X$,当 $x\trianglelefteq y\trianglelefteq a$,有 $x\trianglelefteq a$。

(3)中间传递元:对任意 $x,y\in X$,当 $x\trianglelefteq a\trianglelefteq y$,有 $x\trianglelefteq y$。

(4)传递元:同时满足左传递、右传递及中间传递的元素。

本文记 X^{rtr}、X^{ltr}、X^{mtr}、X^{tr}依次为 X中所有右传递元、左传递元、中间传递元及传递元构成的集合。

定义 1.6[20]　设 $\mathbb{T}=(X, \trianglelefteq, \wedge, \vee, 0, 1)$是一个有界Trellis,其上的二元运算 F具有:

(1)交换性:对任意 $x,y\in X$,有 $F(x,y)=F(y,x)$。

(2)结合性:对任意 $x,y,z\in X$,有 $F\big(x,F(y,z)\big)=F\big(F(x,y),z\big)$。

(3)左单调性:对任意 $x_1, x_2, y\in X$,当 $x_1\trianglelefteq x_2$时,有 $F(x_1,y)\trianglelefteq F(x_2,y)$。

(4)右单调性:对任意 $x_1, x_2, y\in X$,当 $x_1\trianglelefteq x_2$时,有 $F(y,x_1)\trianglelefteq F(y,x_2)$。

(5)单调性:对任意 $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$,当$x_1\trianglelefteq x_2$, $y_1\trianglelefteq y_2$时,有 $F(x_1,y_1)\trianglelefteq F(x_2,y_2)$成立。

定义1.7[20]　设$\mathbb{P}=(X, \trianglelefteq, 0, 1)$是一个有界Psoset,若 $T: X^2\to X$满足交换性、结合性、单调性、存在单位元1,则称 T为 X上的三角模。

2　主要结果

定理 2.1　设 $\mathbb{T}=(X, \trianglelefteq, \wedge, \vee, 0, 1)$是一个有界 Trellis, $a\in(X^{\mathrm{mtr}}\cap X^{\mathrm{rtr}})\backslash\{0,1\}$, $T_a(x,y)$是 $[a,1]$上的三角模。若对任意 $x\in I_a, y\in(0,a)$,有 $x\|y$,则二元运算

$$T(x,y)=\begin{cases}T_a(x,y), & (x,y)\in[a,1]^2,\\ x, & (x,y)\in[0,a)\times[a,1]\cup I_a\times\{1\},\\ y, & (x,y)\in[a,1]\times[0,a)\cup\{1\}\times I_a,\\ 0, & \text{其他情况,}\end{cases}$$

是 X上的三角模。

证明　单位元、交换性显然成立。

证明单调性,只需要证明对任意的 $x,y,z,t\in X$,当 $x\trianglelefteq z$, $y\trianglelefteq t$时,有 $T(x,y)\trianglelefteq T(z,t)$成立。当 x,y,z,t属于同一个区间的时候,结论显然成立。以下是 x,y,z,t属于不同区间的情况。

2.1　当$x\in[0,a)$的情形

(1)$y\in[0,a)$。

①$z\in[0,a)$,当$t\in[a,1]$时,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq z=T(z,t);$$

②$z\in[a,1]$,当$t\in[a,1]$时,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq T_a(z,t)=T(z,t)。$$

(2)$y\in[a,1]$。

①$z\in[0,a)$,当$t\in[a,1]$时,有

$$T(x,y)=x\trianglelefteq z=T(z,t);$$

②$z\in[a,1]$,当$t\in[a,1]$时,有

$$T(x,y)=x\trianglelefteq a\trianglelefteq T_a(z,t)=T(z,t)。$$

(3)$y\in I_a$。

①$z\in[0,a)$,当$t\in[a,1]$时,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq z=T(z,t);$$

当$t\in I_a$时,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq 0=T(z,t)。$$

②$z\in[a,1]$,当$t\in[a,1]$时,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq T_a(z,t)=T(z,t)。$$

当$t\in I_a$时,有如下2种情况:

$$T(x,y)=0\trianglelefteq 0=T(z,t);$$

$$T(x,y)=0\trianglelefteq t=T(z,t)。$$

2.2　当$x\in[a,1]$的情形

(1)$y\in[0,a)$。$z\in[a,1]$,当$t\in[0,a)$时,有

$$T(x,y)=y\trianglelefteq t=T(z,t);$$

当$t\in[a,1]$时,有

$$T(x,y)=y\trianglelefteq a\trianglelefteq T_a(z,t)=T(z,t)。$$

(2)$y\in I_a$。$z\in[a,1]$,当$t\in[a,1]$时,若$x\in[a,1)$,$z\in[a,1]$,则

$$T(x,y)=0\trianglelefteq T_a(z,t)=T(z,t);$$

若$x=1$,必有$z=1$,则

$$T(x,y)=y\trianglelefteq t=T(z,t);$$

当$t\in I_a$时,若$x\in[a,1),z\in[a,1)$,则

$$T(x,y)=0\trianglelefteq 0=T(z,t);$$

若$x\in[a,1),z=1$,则

$$T(x,y)=0\trianglelefteq t=T(z,t);$$

若$x=1$,必有$z=1$,则

$$T(x,y)=y\trianglelefteq t=T(z,t)。$$

2.3 当$x\in I_a$的情形

(1)$y\in[0,a)$。

①$z\in[a,1]$,当$t\in[0,a)$时,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq t=T(z,t);$$

当$t\in[a,1]$时,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq T_a(z,t)=T(z,t)。$$

②$z\in I_a$,当$t\in[0,a)$时,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq 0=T(z,t)。$$

当$t\in[a,1]$时,有如下2种情况:

$$T(x,y)=0\trianglelefteq 0=T(z,t);$$

$$T(x,y)=0\trianglelefteq z=T(z,t)。$$

(2)$y\in[a,1]$。

①$z\in[a,1]$,当$t\in[a,1]$时,若$y\in[a,1)$,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq T_a(z,t)=T(z,t);$$

若$y=1$,必有$t=1$,则

$$T(x,y)=x\trianglelefteq z=T(z,t)。$$

②$z\in I_a$,当$t\in[a,1]$时,若$y\in[a,1),t\in[a,1)$,则

$$T(x,y)=0\trianglelefteq 0=T(z,t);$$

若$y\in[a,1),t=1$,则

$$T(x,y)=0\trianglelefteq z=T(z,t);$$

若$y=1$,必有$t=1$,则

$$T(x,y)=x\trianglelefteq z=T(z,t)。$$

(3)$y\in I_a$。

①$z\in[a,1]$,当$t\in[a,1]$时,有

$$T(x,y)=0\trianglelefteq T_a(z,t)=T(z,t)。$$

当$t\in I_a$时,有如下2种情况:

$$T(x,y)=0\trianglelefteq 0=T(z,t);$$

$$T(x,y)=0\trianglelefteq t=T(z,t)。$$

②$z\in I_a$,当$t\in[a,1]$时有如下2种情况:

$$T(x,y)=0\trianglelefteq 0=T(z,t);$$

$$T(x,y)=0\trianglelefteq z=T(z,t)。$$

综上所证,$T(x,y)$具有单调性。

下证结合性。只需要证明对任意的$x,y,z\in X$,有$T\big(T(x,y),z\big)=T\big(x,T(y,z)\big)$成立。当$x,y,z$属于同一个区间的时候,结论显然成立。以下是$x,y,z$属于不同区间的情况。

2.4 当$x\in[0,a)$的情形

(1)$y\in[0,a)$。当$z\in X$,有

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big)。$$

(2)$y\in[a,1]$。$z\in[0,a)$,有

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big);$$

当$z\in[a,1]$,有

$$T\big(T(x,y),z\big)=x=T\big(x,T(y,z)\big);$$

当$z\in I_a$,有

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big)。$$

(3)$y\in I_a$。当$z\in X$,有

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big)。$$

2.5 当$x\in[a,1]$的情形

(1)$y\in[0,a)$。当$z\in[0,a)$时,有

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big);$$

当$z\in[a,1]$时,有

$$T\big(T(x,y),z\big)=y=T\big(x,T(y,z)\big)。$$

当$z\in I_a$时,有

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big)。$$

(2)$y\in[a,1]$。当$z\in[0,a)$时,有

$$T\big(T(x,y),z\big)=z=T\big(x,T(y,z)\big)。$$

当$z\in I_a$时,若$x\in[a,1),y\in[a,1)$时,

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big);$$

若$x\in[a,1),y=1$时,

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big);$$

若$x=1,y\in[a,1)$时,

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big);$$

若$x=1,y=1$时,

$$T\big(T(x,y),z\big)=z=T\big(x,T(y,z)\big)。$$

(3)$y\in I_a$。当$z\in[0,a)$时,则

$$T\big(T(x,y),z\big)=0=T\big(x,T(y,z)\big)。$$

当$z\in[a,1]$时,若$x\in[a,1),z\in[a,1)$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

当$x\in[a,1),z=1$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

当$x=1,z\in[a,1)$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

当$x=1,z=1$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=y=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

当$z\in I_a$时,

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right)。$$

2.6　当$x\in I_a$的情形

(1)$y\in[0,a)$。当$z\in X$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right)。$$

(2)$y\in[a,1]$。当$z\in[0,a)$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

当$z\in[a,1]$时,若$y\in[a,1),z\in[a,1)$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

若$y\in[a,1),z=1$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

若$y=1,z\in[a,1)$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

若$y=1,z=1$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=x=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

当$z\in I_a,y\in[a,1]$时,有

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right)。$$

(3)$y\in I_a$。当$z\in[0,a)$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right);$$

当$z\in[a,1]$,则

$$T\left(T\left(x,y\right),z\right)=0=T\left(x,T\left(y,z\right)\right)。$$

综上所证,$T(x,y)$具有结合性。因此,$T(x,y)$是T上的三角模。

定理 2.2　设$\mathbb{T}=(X,\trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是一个有界 Trellis,$a\in(X^{\mathrm{mtr}}\cap X^{\mathrm{ltr}})\backslash\{0,1\}$,$S_a(x,y)$是$[0,a]$上的三角余模。若对任意$x\in I_a,y\in(a,1)$,有$x\|y$,则二元运算

$$S(x,y)=\begin{cases}S_a(x,y), & (x,y)\in[0,a]^2,\\ x, & (x,y)\in(a,1]\times[0,a]\cup I_a\times\{0\},\\ y, & (x,y)\in[0,a]\times(a,1]\cup\{0\}\times I_a,\\ 1, & \text{其他情况},\end{cases}$$

是X上的三角余模。

证明　过程与定理2.1类似。

例 1　设$T=(X,\trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是图1所示的Trellis,$c\in(X^{\mathrm{mtr}}\cap X^{\mathrm{rtr}})\backslash\{0,1\}$,$T_c(x,y)=x\wedge y$是$[c,1]$上的三角模,由定理2.1可得一类新的三角模$T$,见表1。

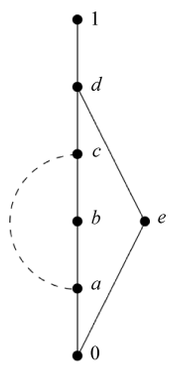


图1　例1中的Trellis

Figure 1　Trellis in example 1

表1　三角模T

Table 1　triangular norm T

T	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	a
b	0	0	0	b	b	0	b
c	0	0	b	c	c	0	c
d	0	0	b	c	d	0	d
e	0	0	0	0	0	0	e
1	0	a	b	c	d	e	1

推论 2.1　设$\mathbb{T}=(X,\trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是一个有界 Trellis,$a\in(X^{\mathrm{mtr}}\cap X^{\mathrm{rtr}})\backslash\{0,1\}$,$T_a(x,y)$是$[a,1]$上的三角模。若对于$x\in I_a,y\in(0,a)$和$x\in I_a,y\in(a,1)$,有$x\|y$,则定理2.1中的二元运算$T$是$X$上的三角模。

推论 2.2　设$\mathbb{T}=(X,\trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是一个有界Trellis,$a\in(X^{\mathrm{mtr}}\cap X^{\mathrm{ltr}})\backslash\{0,1\}$,$S_a(x,y)$是$[0,a]$上的三余角模。若对于$x\in I_a,y\in(0,a)$和$x\in I_a,y\in(a,1)$,有$x\|y$,则定理2.2中的二元运算$S$是$X$上的三角余模。

3　结束语

Trellis结构上的聚合算子是目前该领域的研究热点,特别是Trellis上的三角模、一致模相继被提出,引起了众多学者的关注。本文研究了Trellis上一类新的三角模,给出了由区间子Trellis上三角模

扩张得到Trellis上三角模的构造方法,文中主要结果为后续研究Trellis上的聚合算子提供了新的思路。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2024. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

参 考 文 献

[1] Menger K. Statistical metrics[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1942, 28(12): 535-537.

[2] Goguen J A. L-fuzzy sets[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1967, 18(1): 145-174. DOI: 10.1016/0022-247X(67)90189-8.

[3] De Baets B, De Loof K, De Meyer H. A frequentist view on cycle-transitivity of reciprocal relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 281(C): 198-218. DOI: 10.1016/j.fss.2015.06.020.

[4] De Baets B, De Meyer H, De Schuymer B. Cyclic evaluation of transitivity of reciprocal relations[J]. Social Choice and Welfare, 2006, 26(2): 217-238. DOI: 10.1007/s00355-006-0093-3.

[5] Reichenbach T, Mobilia M, Frey E. Mobility promotes and jeopardizes biodiversity in rock-paper-scissors games[J]. Nature, 2007, 448(7157): 1046-1049. DOI: 10.1038/nature06095.

[6] Fried E. Tournaments and non - associative lattices[J]. Annual University Science Budapest, 1970, 13: 151-164.

[7] Skala H L. Trellis theory[J]. Algebra Universalis, 1971, 1(1): 218-233. DOI: 10.1007/BF02944982.

[8] Rai S B, Rao P. Modular, weakly distributive and normal trellises[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2021, 1850(1): 012090. DOI: 10.1088/1742-6596/1850/1/012090.

[9] Rai S B, Bhatta S P. Some characterizations of pseudo-chains in pseudo-ordered sets[J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2021, 14(5): 2150074. DOI: 10.1142/s1793557121500741.

[10] Abueida A A, Diestelkamp W S, Edwards S P, et al. Determining properties of a multipartite tournament from its lattice of convex subsets[J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2005, 31: 217-230.

[11] Gács A, Sziklai P. On the structure of a generalization of weakly associative lattices[J]. Ars Comb, 2002, 62: 221-226.

[12] Sawicki D, Grabowski A. On weakly associative lattices and near lattices[J]. Formalized Mathematics, 2021, 29(2): 77-85. DOI: 10.2478/forma-2021-0008.

[13] Yettou M, Amroune A, Zedam L. A binary operation-based representation of a lattice[J]. Kybernetika, 2019: 252-272. DOI: 10.14736/kyb-2019-2-0252.

[14] Fried E, Grätzer G. Some examples of weakly associative lattices[J]. Colloquium Mathematicum, 1973, 27(2): 215-221. DOI: 10.4064/cm-27-2-215-221.

[15] Cruz-Quinones M D, Harding J. Completions of pseudo ordered sets[J]. Order, 2022, 39(1): 95-111. DOI: 10.1007/s11083-021-09565-4.

[16] Dan Y X, Hu B Q, Qiao J S. New construction of t-norms and t-conorms on bounded lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 395: 40-70. DOI: 10.1016/j.fss.2019.05.017.

[17] Geng J, Wang R N, Chen Z W. Generating quasi-*t*-subnorms on preordered sets via Adjunctions and Left Galois Connections[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2024, 490: 109036. DOI: 10.1016/j.fss.2024.109036.

[18] Geng J, Wang R N, Chen Z W. Construction of non-direct product triangular norms on product lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 469: 108637. DOI: 10.1016/j.fss.2023.108637.

[19] Geng J, Chen Z W, Wang R N, et al. Ordinal sums of triangular norms on sublattices of a bounded lattice[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 462: 108412. DOI: 10.1016/j.fss.2022.10.004.

[20] Zedam L, De Baets B. Triangular norms on bounded trellises[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 462: 108468. DOI: 10.1016/j.fss.2023.01.003.

[21] Kong Y, Zhao B. Uninorms on bounded trellises[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2024, 481: 108898. DOI: 10.1016/j.fss.2024.108898.

(责任编辑:马田田)