DOI:10.19789/j.1004-9398.2026.05.008　　Open Access
文献引用:张丹.伪环代数上的双极值模糊理想[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(5):47-54. Zhang Dan. Bipolar valued fuzzy ideals on pseudo hoop algebra[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2026,47(5):47-54.

伪环代数上的双极值模糊理想*

张　丹**

(西安交通工程学院科研处，陕西 西安　710300；中国人民大学统计学院，北京　100872)

摘要:在伪环代数上给出了双极值模糊理想和双极值模糊正规理想的定义并研究其性质,并用双极值模糊理想诱导了伪环代数上的双极值模糊同余关系,证明了伪环代数上的所有双极值模糊正规理想集与其上所有双极值模糊同余关系集之间具有一一对应关系。最后在伪环同态下研究了2个伪环代数上的双极值模糊(正规)理想的关系。

关键词:伪环代数;双极值模糊理想;双极值模糊同余关系;伪环同态
中图分类号:O159　　**文献标志码**:A

Bipolar valued fuzzy ideals on pseudo hoop algebra*

Zhang Dan**

(Office of Scientific Research, Xi'an traffic engineering institute, Xi'an Shannxi　710300;
School of Statistics, Renmin University of China, Beijing　100872)

Abstract: The definitions and properties of bipolar valued fuzzy ideals and bipolar valued fuzzy normal ideals are given on pseudo hoop algebra, and bipolar valued fuzzy ideals are used to induce bipolar valued fuzzy congruence relationships on pseudo hoop algebra. It is proved that there is a one-to-one correspondence between all bipolar fuzzy normal ideal sets on pseudo hoop algebras and all bipolar fuzzy homozy relation sets on pseudo hoop algebras. Finally, under the premise of pseudo hoop isomorphism, the relationship between bipolar valued fuzzy (normal) ideal primitives on two pseudo hoop algebras was studied.

Keywords: pseudo hoop algebra; hesitation fuzzy ideals; bipolar valued fuzzy congruence relationship; pseudo hoop homomorphism
CLC: O159　　**DC**: A

0　引　言

Bosbach[1-2]引入了环代数,是有序交换剩余积分单模。继Georgescu和Iorgulescu[3]引入伪多值逻辑代数的概念之后,Georgescu等[4]引入了伪环代数的概念,成为环代数不可交换的推广。伪MV代数是伪环代数的子类,其侧重格值逻辑与模糊计算,伪环代数更广义,包含更多运算规则。近年来,环代数和伪环代数的研究取得了很大进展:文献[5]研究了伪环代数的对合滤子;文献[6]研究了伪BL代数和伪环代数中的正则最大滤子;文献[7-9]深入地研究了伪环代数上的节点滤子及理想,这些成果为后续研究伪环代数理论起到了一定的铺垫作用。

投稿日期:2025-05-08
*陕西省教育厅科学研究计划项目(25JK0545)
**通信作者:zhangdan@xjy.edu.cn

模糊集理论已经被许多学者从多个方面进行了研究。Rosenfeld[10]引入了模糊子群,其工作开创了模糊数学的一个新领域。近年来,许多研究者都使用了这一思想,并应用于不同的代数中,如泛代数[11]、MS代数[12]和Ockham代数等[13]。作为模糊集的又一个推广,Zhang[14]引入双极值模糊集理论,并给出了关于双极值模糊集上的运算和基本性质。近年来学者们也做了一些关于双极值模糊集的研究,比如刘春辉等[15]研究了双极值模糊子格并讨论了双极值模糊子格的性质,姜曼和常在斌[16]及姜曼[17]分别在R_0代数(R-zero algebra)和伪BE代数(Pseudo-BE algebra)中研究了双极值模糊滤子,讨论了不同代数结构中双极值模糊滤子的性质以及各滤子之间的联系。双极值模糊集在工程中也有具体应用,比如喜文飞[18]用双极值模糊集评判法研究了鲁甸县的滑坡危险性的问题,并对因子的不稳定性研究中对滑坡危险性做出了一定评价。

在上述研究的基础上,本文结合双极值模糊集理论和伪环代数理论,给出了伪环代数中的双极值模糊理想的定义。此外,还研究了由双极值模糊理想诱导的伪环代数上的双极值模糊同余关系,并在伪环代数中,得到了双极值模糊(正规)理想的像是同态下的双极值模糊(正规)理想的结论。与其他模糊理想相比,双极值模糊理想在定义上同时考虑正负隶属度,性质上兼具模糊性与双极性,同余诱导时能区分矛盾信息,其优势在于能更全面刻画不确定性和矛盾信息,提升了在复杂模糊环境下的描述与处理能力。

1 预备知识

定义 1.1[1] 如果$(H,\Theta,1,\leqslant)$满足下列条件:

(1)$(H,\Theta,1)$是半群当且仅当Θ满足结合律,对$\forall s\in H$有$1\Theta s=s=s\Theta 1$;

(2)$\leqslant$是H的偏序关系;

(3)对 $\forall s,t,u\in H$, $s\leqslant t\Rightarrow s\Theta u\leqslant t\Theta u$, $u\Theta s\leqslant u\Theta t$;则称$(H,\Theta,1,\leqslant)$是偏序半群。

定义 1.2[1] 如果$(H,\Theta,\rightarrow,1,\leqslant_r)$是具有左剩余$\rightarrow$的偏序半群,则称代数结构$(H,\Theta,\rightarrow,1)$是左补单半群;其中半群上的逆右整关系$\leqslant_r$定义为,$\forall s,t,u\in H, s\leqslant_r t\Leftrightarrow\exists u(s=u\Theta t)$。

定义 1.3[1] 一个(2,2,2,0)型代数$(H,\Theta,\rightarrow,\dashrightarrow,1)$如果满足下列条件,对$\forall s,t,u\in H$,

(1)$(H,\Theta,\rightarrow,1)$是左完备半群;

(2)$(H,\Theta,\dashrightarrow,1)$是右完备半群;

(3)$\leqslant_r=\leqslant_l$,

则称$(H,\Theta,\rightarrow,\dashrightarrow,1)$是伪环代数。

引理 1.1[19] 令$(H,\Theta,\rightarrow,\dashrightarrow,1)$是伪环代数,对$\forall s,t,u\in H$,则有下列结论成立:

(1)$s\Theta t\leqslant u\Leftrightarrow s\leqslant t\rightarrow u\Leftrightarrow t\leqslant s\dashrightarrow u$;

(2)如果$s\leqslant t$,则有$s\Theta w\leqslant t\Theta w$, $w\Theta s\leqslant w\Theta t$;

(3)$(H,\Theta,1)$是半群;

(4)$s\wedge t=(s\rightarrow t)\Theta t=(t\rightarrow s)\Theta t=t\Theta(s\dashrightarrow t)=t\Theta(t\dashrightarrow s)$;

(5)如果$s\leqslant t$,则有$t\rightarrow u\leqslant s\rightarrow u$, $t\dashrightarrow u\leqslant s\dashrightarrow u$;

(6)如果$s\leqslant t$,则有$u\rightarrow s\leqslant u\rightarrow t$, $u\dashrightarrow t\leqslant u\dashrightarrow s$;

(7)$(t\rightarrow u)\Theta(s\rightarrow t)\leqslant s\rightarrow u$, $(t\dashrightarrow u)\Theta(s\dashrightarrow t)\leqslant s\dashrightarrow u$。

注 在文献[19]中,如果$0\leqslant s$,则称H有界,在此情况下,有$s^-=s\rightarrow 0$, $u^\sim=u\dashrightarrow 0$;如果$s^{-\sim}=s^{\sim-}$,则称有界伪环代数是优的。

引理 1.2[19] 令H是有界伪环代数,则对$\forall s,t,u\in H$,下列结论成立:

(1)$s\Theta 0=0\Theta s=0$;

(2)$s^-\Theta s=0$, $s\Theta s^\sim=0$;

(3)$s\Theta t=0\Leftrightarrow s\leqslant t^-\Leftrightarrow t\leqslant s^\sim$;

(4)$s\leqslant s^{-\sim}$, $s\leqslant s^{\sim-}$;

(5)$s^{-\sim-}=s^-$, $s^{\sim-\sim}=s^\sim$;

(6)如果H是优的,则有$(s\rightarrow t)^{-\sim}=s^{-\sim}\rightarrow t^{-\sim}$和$(s\dashrightarrow t)^{-\sim}=s^{-\sim}\dashrightarrow t^{-\sim}$;

(7)如果H是优的,则有$s\rightarrow t^-=s^{-\sim}\rightarrow t^-$和$s\dashrightarrow t^\sim=s^{-\sim}\dashrightarrow t^\sim$。

定义 1.4[4] 设F是伪环代数H的一个非空子集,如果F满足:

(1)$s,t\in F\Rightarrow s\Theta t\in F$;

(2)$\forall s,t\in H$,如果$s\leqslant t, t\in F$,则有$s\in F$,

则称F是伪环代数H的一个滤子。

定义 1.5[4] 令F是伪环代数H的一个滤子,如果$s\rightarrow t\in F\Leftrightarrow s\dashrightarrow t\in F$,则称$F$是正规的。

引理 1.3[9] 令$(H,\Theta,\rightarrow,\dashrightarrow,1)$是有界伪环代数,对$\forall s,t\in H$,则左加$\triangleleft$和右加$\triangleright$定义为$s\triangleleft t=t^-\dashrightarrow s$和$s\triangleright t=s^\sim\dashrightarrow t$。

引理 1.4[9] 令H是有界伪环代数,对$\forall t,u,m,n\in H$,如果$t\leqslant u, m\leqslant n$,则有$t\triangleleft m\leqslant u\triangleleft n$和$t\triangleright m\leqslant u\triangleright n$成立。

引理 1.5[9]　令H是有界伪环代数,如果H是正规的,则称左加$\triangleleft$和右加$\triangleright$是结合的。

引理 1.6[9]　令I是有界伪环代数H的非空子集,如果有:

(1)$t, u \in I \Rightarrow t \triangleleft u \in I$;

(2)对$\forall t, u \in H, t \leqslant u, u \in I \Rightarrow t \in I$,则称$I$是$H$的左理想。

类似地,如果有:

(3)$t, u \in I \Rightarrow t \triangleright u \in I$;

(4)对$\forall t, u \in H, t \leqslant u, u \in I \Rightarrow t \in I$,则称$I$是$H$的右理想。

如果I是H上的左理想和右理想,则称I是H的理想;如果I是H的理想,则有$0 \in I$。对$\forall t \in H$,则有$u \in I \Leftrightarrow t^{\sim} \in I \Leftrightarrow t^{\frown} \in I$。

令H_1和H_2是2个伪环代数,在文献[9]中,如果f保持运算Θ, $\rightarrow$, $\rightsquigarrow$,则映射$f: H_1 \rightarrow H_2$称为伪环同态;如果H_1和H_2有界且$f(0)=0$,则映射$f: H_1 \rightarrow H_2$称为有界伪环同态。

定义 1.6[14]　设X是论域$\phi^+: X \rightarrow [0,1]$和$\phi^-: X \rightarrow [-1,0]$是2个映射,称$\phi=\{(x, \phi^-(x), \phi^+(x)) | x \in X\}$是$X$上的双极值模糊集,简记为$\phi=(\phi^-, \phi^+)$。这里正隶属度$\phi^+$表示元素$x$关于双极值模糊集$\phi$对某种性质的满足度,负隶属度$\phi^-$表示元素$x$关于双极值模糊集$\phi$对这种性质的相反性质的满足度。记$X$上的全体双极值模糊集为$\mathrm{BVF}(X)$。

2　伪环代数的双极值模糊理想

定义 2.1　设H为有界伪环代数,$\phi \in \mathrm{BVF}(H)$,如果对$\forall t, u \in H$,ϕ满足以下条件:

(1)$\phi^+(t \triangleleft u) \geqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+(u), \phi^-(t \triangleleft u) \leqslant \phi^-(t) \vee \phi^-(u)$;

(2)$t \leqslant u \Rightarrow \phi^+(t) \geqslant \phi^+(u), \phi^-(t) \leqslant \phi^-(u)$,

则称ϕ为H的双极值模糊左理想。

类似地,如果对$\forall t, u \in H$,ϕ满足以下条件:

(3)$\phi^+(t \triangleright u) \geqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+(u), \phi^-(t \triangleright u) \leqslant \phi^-(t) \vee \phi^-(u)$;

(4)$t \leqslant u \Rightarrow \phi^+(t) \geqslant \phi^+(u), \phi^-(t) \leqslant \phi^-(u)$,

则称ϕ为H的双极值模糊右理想。

如果ϕ既是H的双极值模糊左理想又是H的双极值模糊右理想,称ϕ是H的双极值模糊理想。记全体伪环代数H的双极值模糊理想为$\mathrm{BVFI}(H)$。

例 2.1　令$H=\{0, w, x, y, z, 1\}$,在H上定义运算Θ, $\rightarrow$和$\rightsquigarrow$如表1和2。

表1　运算Θ

Table 1　operator Θ

Θ	0	w	x	y	z	1
0	0	0	0	0	0	0
w	0	w	z	0	z	w
x	0	z	y	y	0	x
y	0	0	y	y	0	y
z	0	z	0	0	0	z
1	0	w	x	y	z	1

表2　运算$\rightarrow$和$\rightsquigarrow$

Table 2　operator $\rightarrow$ and $\rightsquigarrow$

$\rightarrow$=$\rightsquigarrow$	0	w	x	y	z	1
0	1	1	1	1	1	1
w	y	1	x	y	x	1
x	z	w	1	x	w	1
y	w	w	1	1	w	1
z	x	1	1	x	1	1
1	0	w	x	y	z	1

可验证$(H, \Theta, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1)$是有界伪环代数,易得,$b \triangleleft c = c^{\sim} \rightsquigarrow b = a \rightsquigarrow b = b$和$c \triangleright a = c^{\sim} \rightarrow a = a \rightarrow a = 1$成立。

令$H=\{0, x, y, 1\}$,在H上定义运算$\rightarrow$和$\rightsquigarrow$如表3和4。

表3　运算$\rightarrow$

Table 3　operator $\rightarrow$

$\rightarrow$	0	x	y	1
0	1	1	1	1
x	0	1	1	1
y	0	x	1	1
1	0	x	y	1

表4　运算$\rightsquigarrow$

Table 4　operator $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$	0	x	y	1
0	1	1	1	1
x	x	1	1	1
y	y	y	1	1
1	1	1	1	1

若$x \leqslant y$,则$x \rightarrow y = 1$,若$x > y$,则$x \rightarrow y = y$;若$x \leqslant y$,则$x \rightsquigarrow y = 1$,若$x > y$,则$x \rightsquigarrow y = x$;则可验证$(H, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1)$是伪环代数,又由于$y \rightarrow x = x$,而

$y \rightsquigarrow x = y$。由此可得当$x \neq y$时,$y \to x \neq y \rightsquigarrow x$,因此有"$\to \neq \rightsquigarrow$"。

分别定义$H \to [0,1] \times [-1,0]$的双极值模糊集$\xi,\lambda$和$\mu$:

$$\xi^+(0) = 1 = \xi^+(y),$$
$$\xi^+(w) = \xi^+(y) = \xi^+(z) = 0.7,$$
$$\xi^+(1) = 0.2,$$
$$\xi^-(0) = 0 = \xi^-(y),$$
$$\xi^-(w) = \xi^-(y) = \xi^-(z) = -0.3,$$
$$\xi^-(1) = -0.6;$$
$$\lambda^+(0) = 0.9,$$
$$\lambda^+(w) = \lambda^+(z) = 0.7,$$
$$\lambda^+(x) = \lambda^+(y) = \lambda^+(1) = 0.4,$$
$$\lambda^-(0) = -0.3,$$
$$\lambda^-(w) = \lambda^-(z) = -0.4,$$
$$\lambda^-(x) = \lambda^-(y) = \lambda^-(1) = -0.6;$$
$$\mu^+(0) = 0.9,$$
$$\mu^+(w) = \mu^+(z) = \mu^+(x) = \mu^+(y) = \mu^+(1) = 0.3,$$
$$\mu^-(0) = -0.2,$$
$$\mu^-(w) = \mu^-(z) = \mu^-(x) = \mu^-(y) = \mu^-(1) = -0.6。$$

则可验证H的双极值模糊集ξ,λ和μ分别为H的双极值模糊理想。

引理 2.1 设H为有界伪环代数,$\phi \in \mathrm{BVF}(H)$,则有下列结论成立,对$\forall t \in H$:

(1)$\phi^+(0) \geqslant \phi^+(t), \phi^-(0) \leqslant \phi^-(t)$;

(2)$\phi^+(t) = \phi^+(t^{\sim}) = \phi^+(t^{-}), \phi^-(t) = \phi^-(t^{\sim}) = \phi^-(t^{-})$。

证明 (1)对$\forall t \in H, 0 \leqslant t$,由定义2.1(2和4)可得$\phi^+(0) \geqslant \phi^+(t), \phi^-(0) \leqslant \phi^-(t)$;

(2)对$\forall t \in H, \phi^+(t) = \phi^+(t) \wedge \phi^+(0) \leqslant \phi^+(t \triangleright 0) = \phi^+(t^{-}), \phi^-(t) = \phi^-(t) \vee \phi^-(0) \geqslant \phi^-(t \triangleright 0) = \phi^-(t^{-})$。

相反地,由于$t \leqslant t^{-}$,则有$\phi^+(t) \geqslant \phi^+(t^{-})$,$\phi^-(t) \leqslant \phi^-(t^{-})$,因此可得$\phi^+(t) = \phi^+(t^{-})$,$\phi^-(t) = \phi^-(t^{-})$。同理可得

$$\phi^+(t) = \phi^+(t^{\sim}), \phi^-(t) = \phi^-(t^{\sim})。$$

定义 2.2 设H是有界伪环代数,$\phi \in \mathrm{BVFI}(H)$,如果对$\forall s,t \in H$,$\phi^+(s^-\Theta t) = \phi^+(t^-\Theta s), \phi^-(s^-\Theta t) = \phi^-(t^-\Theta s)$。则称$\phi$是$H$的双极值模糊正规理想,记为$\phi \in \mathrm{BVFNI}(H)$。

定理 2.1 设H是有界伪环代数且对$\forall t \in H$有$t^{\sim\sim} = t^{\sim}$,$\phi \in \mathrm{BVF}(H)$,对$\forall t \in H$有$\phi^+(t) \leqslant \phi^+(0)$,$\phi^-(t) \geqslant \phi^-(0)$成立。则下列结论等价,$\forall t,u \in H$:

(1)$\phi \in \mathrm{BVFI}(H)$;

(2) $\phi^+(u) \geqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+(t^-\Theta u), \phi^-(u) \leqslant \phi^-(t) \vee \phi^-(t^-\Theta u)$;

(3) $\phi^+(u) \geqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+(u\Theta t^-), \phi^-(u) \leqslant \phi^-(t) \vee \phi^-(u\Theta t^-)$。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)假设$\phi \in \mathrm{BVFI}(H)$。因为$t^-\Theta u \leqslant t^-\Theta u$,则有$u \leqslant t^- \rightsquigarrow (t^-\Theta u) = (t^-\Theta u) \triangleleft t$。即有$\phi^+(t^-\Theta u) \wedge \phi^+(t) \leqslant \phi^+((t^-\Theta u) \triangleleft t) \leqslant \phi^+(u), \phi^-(t^-\Theta u) \vee \phi^-(t) \geqslant \phi^-((t^-\Theta u) \triangleleft t) \geqslant \phi^-(u)$。证毕。

(2)$\Rightarrow$(1)。令$t,u \in H$且$t \leqslant u$,则有$u^- \leqslant t^-$,$u^-\Theta t \leqslant t^-\Theta t = 0$。由条件(2)可得$\phi^+(u) = \phi^+(u) \wedge \phi^+(0) = \phi^+(u) \wedge \phi^+(t^-\Theta t) \leqslant \phi^+(t)$,$\phi^-(u) = \phi^-(u) \vee \phi^-(0) = \phi^-(u) \vee \phi^-(t^-\Theta t) \geqslant \phi^+(t)$成立。

由于$u^-\Theta(t \triangleleft u) = u^-\Theta(u^- \rightsquigarrow t) \leqslant t$,则有$\phi^+(t) \wedge \phi^+(u) \leqslant \phi^+(u^-\Theta(t \triangleleft u)) \wedge \phi^+(u) \leqslant \phi^+(t \triangleleft u)$,$\phi^-(t) \vee \phi^-(u) \geqslant \phi^-(u^-\Theta(t \triangleleft u)) \vee \phi^-(u) \geqslant \phi^-(t \triangleleft u)$。

因为H是优伪环代数,则有$t^{\sim\sim} = t^{\sim}$和$u^-\Theta(t \triangleright u) = u^-\Theta(t^{\sim} \to u) \leqslant t^{\sim\sim}$成立,因此有$t^-\Theta t^{\sim\sim} = 0$。即$\phi^+(t) \wedge \phi^+(u) \geqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+(0) \wedge \phi^+(u) = \phi^+(t) \wedge \phi^+(u^-\Theta t^{\sim\sim}) \wedge \phi^+(u) \leqslant \phi^+(t^{\sim\sim}) \wedge \phi^+(u) \leqslant \phi^+(u^-\Theta(t \triangleright u)) \wedge \phi^+(u) \leqslant \phi^+(t \triangleright u)$,类似的有$\phi^-(t) \vee \phi^-(u) \geqslant \phi^-(t \triangleright u)$。所以$\phi \in \mathrm{BVFI}(H)$。

因此(1)$\Leftrightarrow$(2)成立。同理可得(1)$\Leftrightarrow$(3)。

定理 2.2 设H是有界伪环代数且对$\forall t \in H$有$t^{\sim\sim} = t^{\sim}$。当$\phi \in \mathrm{BVF}(H)$时,对$\forall t \in H$有$\phi^+(t) \leqslant \phi^+(0)$,$\phi^-(t) \geqslant \phi^-(0)$。则下列结论等价,对$\forall t,u \in H$:

(1)$\phi \in \mathrm{BVFI}(H)$;

(2) $\phi^+(u) \geqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+((t^- \to u^-)^{\sim})$, $\phi^-(u) \leqslant \phi^-(t) \vee \phi^-((t^- \to u^-)^{\sim})$;

(3) $\phi^+(u) \geqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+(t^- \to u^-)^{\sim}, \phi^-(u) \leqslant \phi^-(t) \vee \phi^-(t^{\sim} \to u^{\sim})^{-}$。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)假设$\phi \in \mathrm{BVFI}(H)$。由$t^-\Theta u^{\sim} \leqslant (t^-\Theta u^{\sim})^{\sim} = (t^- \to u^{\sim})^{\sim} = (t^- \to u^-)^{\sim}$和$u \leqslant u^{\sim\sim}$,可得$\phi^+(t) \wedge \phi^+((t^- \to u^-)^{\sim}) \leqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+(t^-\Theta u^{\sim\sim}) \leqslant \phi^+(u^{\sim\sim}) \leqslant \phi^+(u)$,

$$\phi^-(t) \vee \phi^-((t^- \to u^-)^{\sim}) \geqslant \phi^-(t) \vee \phi^-(t^-\Theta u^{\sim\sim}) \geqslant \phi^-(u^{\sim\sim}) \geqslant \phi^-(u)。$$

(2) ⇒ (1)。由于 $(t^- \to t^{--})^- = (t^- \to t^-)^- = 0$,则由条件(2)可得:

$$\phi^+(t) = \phi^+(t) \wedge \phi^+(0) = \phi^+(t) \wedge \phi^+((t^- \to t^-)^-) \leqslant \phi^+((t^- \to t^{--})^-) \leqslant \phi^+(t^{--}),$$

$$\phi^-(t) = \phi^-(t) \vee \phi^-(0) = \phi^-(t) \vee \phi^-((t^- \to t^-)^-) \geqslant \phi^-((t^- \to t^{--})^-) \geqslant \phi^-(t^{--})。$$

因此,$\phi^+(t) \wedge \phi^+(t^- \Theta u) \leqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+((t^- \Theta u)^{--}) \leqslant \phi^+(t) \wedge \phi^+((t^- \to u^-)^-) \leqslant \phi^+(u)$,$\phi^-(t) \vee \phi^-(t^- \Theta u) \geqslant \phi^-(t) \vee \phi^-((t^- \Theta u)^{--}) \geqslant \phi^-(t) \vee \phi^-((t^- \to u^-)^-) \geqslant \phi^-(u)$。所以 $\phi \in \mathrm{BVFI}(H)$。

即(1) ⇔ (2)成立。同理可得(1) ⇔ (3)成立。

定义 2.3　令 H 是有界伪环代数,$\phi \in \mathrm{BVF}(H)$。如果最小的双极值模糊理想包括 ϕ,则称此双极值模糊理想是由 ϕ 生成的,记为 $\langle \phi \rangle$。

定理 2.3　令 H 是有界正规伪环代数,$\phi \in \mathrm{BVF}(H)$。则有:

$$\langle \phi \rangle^+(a) = \vee\{\phi^+(s_1) \wedge \phi^+(s_2) \wedge \cdots \wedge \phi^+(s_n): a \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\} = \vee\{\phi^+(s_1) \wedge \phi^+(s_2) \wedge \cdots \wedge \phi^+(s_n): a \leqslant s_1 \rhd s_2 \rhd \cdots \rhd s_n\};$$

$$\langle \phi \rangle^-(a) = \wedge\{\phi^-(s_1) \vee \phi^-(s_2) \vee \cdots \vee \phi^-(s_n): a \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\} = \wedge\{\phi^-(s_1) \vee \phi^-(s_2) \vee \cdots \vee \phi^-(s_n): a \leqslant s_1 \rhd s_2 \rhd \cdots \rhd s_n\}。$$

证明　令 $\eta^+(a) = \vee\{\phi^+(s_1) \wedge \phi^+(s_2) \wedge \cdots \wedge \phi^+(s_n): a \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\}$,

$$\eta^-(a) = \wedge\{\phi^-(s_1) \vee \phi^-(s_2) \vee \cdots \vee \phi^-(s_n): a \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\}。$$

可以证明 η 是包含 ϕ 的最小的理想。显然 $\phi \leqslant \eta$。

$$\eta^+(a) \wedge \eta^+(a^- \Theta b) = \vee\{\phi^+(s_1) \wedge \phi^+(s_2) \cdots \wedge \phi^+(s_n): a \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\} \wedge \vee\{\phi^+(t_1) \wedge \phi^+(t_2) \wedge \cdots \wedge \phi^+(t_n): a^- \Theta b \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\} \leqslant \vee\{\phi^+(s_1) \wedge \phi^+(s_2) \wedge \cdots \wedge \phi^+(s_n) \wedge \phi^+(t_1) \wedge \phi^+(t_2) \wedge \cdots \wedge \phi^+(t_n): b \leqslant (a^- \Theta b) \lhd a \leqslant t_1 \lhd t_2 \lhd \cdots \lhd t_n \lhd s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\} \leqslant \vee\{\phi^+(b) \wedge \phi^+(b) \wedge \cdots \wedge \phi^+(b): b \leqslant (a^- \Theta b) \lhd a \leqslant t_1 \lhd t_2 \lhd \cdots \lhd t_n \lhd s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\} = \eta^+(b)。$$

同理可得 $\eta^-(a) \vee \eta^-(a^- \Theta b) \geqslant \eta^-(b)$。即证 $\eta \in \mathrm{BVFI}(H)$。

假设 $\mu \in \mathrm{BVFI}(H)$ 且 $\phi \leqslant \mu$,则有

$$\eta^+(a) = \vee\{\phi^+(s_1) \wedge \phi^+(s_2) \wedge \cdots \wedge \phi^+(s_n): a \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\} \leqslant \vee\{\mu^+(s_1) \wedge \mu^+(s_2) \wedge \cdots \wedge \mu^+(s_n): a \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\} = \langle \mu \rangle^+(a) = \mu^+(a),$$

同理有 $\eta^-(a) \geqslant \mu^-(a)$。因此有

$$\langle \phi \rangle^+(a) = \vee\{\phi^+(s_1) \wedge \phi^+(s_2) \wedge \cdots \wedge \phi^+(s_n): a \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\},$$

$$\langle \phi \rangle^-(a) = \wedge\{\phi^-(s_1) \vee \phi^-(s_2) \vee \cdots \vee \phi^-(s_n): a \leqslant s_1 \lhd s_2 \lhd \cdots \lhd s_n\}。$$

即证 $\langle \phi \rangle^+(a) = \vee\{\phi^+(s_1) \wedge \phi^+(s_2) \wedge \cdots \wedge \phi^+(s_n): a \leqslant s_1 \rhd s_2 \rhd \cdots \rhd s_n\}$,

$$\langle \phi \rangle^-(a) = \wedge\{\phi^-(s_1) \vee \phi^-(s_2) \vee \cdots \vee \phi^-(s_n): a \leqslant s_1 \rhd s_2 \rhd \cdots \rhd s_n\}。$$

3　双极值模糊同余关系

定义 3.1　令 $(H, \Theta, \to, \dashrightarrow, 1)$ 是伪环代数且 Ω 是 H 的双极值模糊等价关系。则有下列定义:

(1)对 $\forall t, u, a \in H$,如果双极值模糊等价关系 Ω 满足

$$\Omega^+(t, u) \leqslant \Omega^+(a\Theta t, u\Theta t) \wedge \Omega^+(a \to t, a \to u) \wedge \Omega^+(a \dashrightarrow t, a \dashrightarrow u),$$

$$\Omega^-(t, u) \geqslant \Omega^-(a\Theta t, u\Theta t) \vee \Omega^-(a \to t, a \to u) \vee \Omega^-(a \dashrightarrow t, a \dashrightarrow u),$$

则称 Ω 是 H 的双极值模糊左同余关系。

(2)对 $\forall t, u, a \in H$,如果双极值模糊等价关系 Ω 满足

$$\Omega^+(t, u) \leqslant \Omega^+(x\Theta a, u\Theta a) \wedge \Omega^+(x \to a, u \to a) \wedge \Omega^+(t \dashrightarrow a, u \dashrightarrow a),$$

$$\Omega^-(t, u) \geqslant \Omega^-(x\Theta a, u\Theta a) \vee \Omega^-(x \to a, u \to a) \vee \Omega^-(t \dashrightarrow a, u \dashrightarrow a),$$

则称 Ω 是 H 的双极值模糊右同余关系。

(3)对 $\forall t_1, t_2, u_1, u_2 \in H$,如果双极值模糊等价关系 Ω 满足

$$\Omega^+(t_1, u_1) \wedge \Omega^+(t_2, u_2) \leqslant \Omega^+(t_1\Theta t_2, u_1\Theta u_2) \wedge \Omega^+(t_1 \to t_2, u_1 \to u_2) \wedge \Omega^+(t_1 \dashrightarrow t_2, u_1 \dashrightarrow u_2),$$

$$\Omega^-(t_1, u_1) \vee \Omega^-(t_2, u_2) \geqslant \Omega^-(t_1\Theta t_2, u_1\Theta u_2) \vee \Omega^-(t_1 \to t_2, u_1 \to u_2) \vee \Omega^-(t_1 \dashrightarrow t_2, u_1 \dashrightarrow u_2),$$

则称 Ω 是 H 的双极值模糊同余关系。

例 3.1　设 H 是伪环代数,对 $\forall 0, 1, x, y, z, w \in H$,在 H 上定义如下双极值模糊关系 Ω:

$$\Omega^+(0, 0) = \Omega^+(\omega, \omega) = \Omega^+(x, x) = \Omega^+(y, y) =$$

$$\Omega^+(z,z)=\Omega^+(1,1)=0.9;$$
$$\Omega^+(0,\omega)=\Omega^+(0,z)=\Omega^+(\omega,0)=\Omega^+(w,z)=\Omega^+(z,0)=\Omega^+(z,w)=\Omega^+(x,y)=\Omega^+(x,1)=\Omega^+(y,x)=\Omega^+(y,1)=\Omega^+(1,x)=\Omega^+(1,y)=0.6;$$
$$\Omega^+(0,y)=\Omega^+(y,0)=\Omega^+(0,1)=\Omega^+(1,0)=\Omega^+(w,x)=\Omega^+(x,w)=\Omega^+(w,y)=\Omega^+(y,w)=\Omega^+(1,w)=\Omega^+(w,1)=\Omega^+(x,z)=\Omega^+(z,x)=\Omega^+(y,z)=\Omega^+(z,y)=\Omega^+(1,z)=\Omega^+(z,1)=\Omega^+(0,x)=\Omega^+(x,0)=0.3,$$
$$\Omega^-(0,0)=\Omega^-(\omega,\omega)=\Omega^-(x,x)=\Omega^-(y,y)=\Omega^-(z,z)=\Omega^-(1,1)=-0.2;$$
$$\Omega^-(0,\omega)=\Omega^-(0,z)=\Omega^-(\omega,0)=\Omega^-(w,z)=\Omega^-(z,0)=\Omega^-(z,w)=\Omega^-(x,y)=\Omega^-(x,1)=\Omega^-(y,x)=\Omega^-(y,1)=\Omega^-(1,x)=\Omega^-(1,y)=-0.4;$$
$$\Omega^-(0,y)=\Omega^-(y,0)=\Omega^-(0,1)=\Omega^-(1,0)=\Omega^-(w,x)=\Omega^-(x,w)=\Omega^-(w,y)=\Omega^-(y,w)=\Omega^-(1,w)=\Omega^-(w,1)=\Omega^-(x,z)=\Omega^-(z,x)=\Omega^-(y,z)=\Omega^-(z,y)=\Omega^-(1,z)=\Omega^-(z,1)=\Omega^-(0,x)=\Omega^-(x,0)=-0.6。$$

易证,Ω是H的双极值模糊同余关系。

定理 3.1 若$(H,\Theta,\rightarrow,\rightsquigarrow,1)$是伪环代数,则$H$的双极值模糊等价关系$\Omega$是$H$的双极值模糊同余关系当且仅当$\Omega$是$H$的双极值模糊左(右)同余关系。

证明 易证。

令ϕ是有界伪环代数H的双极值模糊理想。则H的双极值模糊关系Ω_ϕ定义如下:对$\forall t,u\in H$,有$\Omega_\phi^+(t,u)=\phi^+(t^-\Theta u)\wedge\phi^+(u^-\Theta t)\wedge\phi^+(t^\sim\Theta u)\wedge\phi^+(u^\sim\Theta t)$,$\Omega_\phi^-(t,u)=\phi^-(t^-\Theta u)\vee\phi^-(u^-\Theta t)\vee\phi^-(t^\sim\Theta u)\vee\phi^-(u^\sim\Theta t)$。

定理 3.2 令H是有界伪环代数且ϕ是H的双极值模糊理想。则Ω_ϕ是H的双极值模糊等价关系。

证明 因为$t\Theta t^-=0$,$t\Theta t^\sim=0$,则对$\forall t,u,v\in H$,

$$\Omega_\phi^+(t,t)=\phi^+(t\Theta t^-)\wedge\phi^+(t\Theta t^\sim)=\phi^+(0)\wedge\phi^+(0)\geqslant\phi^+(u^-\Theta v)\wedge\phi^+(u^-\Theta u)\wedge\phi^+(u^\sim\Theta v)\wedge\phi^+(v^\sim\Theta u)=\Omega_\phi^+(u,v),$$
$$\Omega_\phi^-(t,t)=\phi^-(t\Theta t^-)\vee\phi^-(t\Theta t^\sim)=\phi^-(0)\vee\phi^-(0)\leqslant\phi^-(u^-\Theta v)\vee\phi^-(u^-\Theta u)\vee\phi^-(u^\sim\Theta v)\vee\phi^-(v^\sim\Theta u)=\Omega_\phi^+(u,v)。$$

因此Ω_ϕ满足双极值模糊自反性。显然可得Ω_ϕ满足双极值模糊对称性。

下面证明Ω_ϕ满足双极值模糊传递性。因为

$$(v^-\Theta u)^-\Theta(v^-\Theta t)=((v^-\rightarrow u^-)\Theta v^-)\Theta t\leqslant u^-\Theta t,$$
$$(t^-\Theta u)^-\Theta(t^-\Theta v)=((t^-\rightarrow u^-)\Theta t^-)\Theta v\leqslant u^-\Theta z,$$
$$(t\Theta v^\sim)\Theta(u\Theta v^\sim)^\sim=t\Theta(v^\sim\rightsquigarrow v^\sim))\leqslant t\Theta u^\sim,$$
$$(v\Theta t^\sim)\Theta(v\Theta t^\sim)^\sim=v\Theta(t^\sim\Theta(t^\sim\rightsquigarrow u^\sim))\leqslant v\Theta u^\sim$$

成立,则有:

$$\Omega_\phi^+(t,u)\wedge\Omega_\phi^+(u,v)=\phi^+(t^-\Theta u)\Theta\phi^+(u^-\Theta t)\wedge\phi^+(u^-\Theta v)\Delta\phi^+(v^\sim\Theta u),$$
$$\Omega_\phi^-(t,u)\vee\Omega_\phi^-(u,v)=\phi^-(t^-\Theta u)\Theta\phi^-(u^-\Theta t)\vee\phi^-(u^-\Theta v)\Delta\phi^-(v^\sim\Theta u);$$
$$\phi^+(x\Theta u^\sim)\Theta\phi^+(u\Theta t^\sim)\wedge\phi^+(u\Theta v^\sim)\Theta\phi^+(v\Theta u^\sim)\leqslant\phi^+(t^-\Theta u)\Theta\phi^+((v^-\Theta u)^-\Theta(v^-\Theta t))\wedge\phi^+((t^-\Theta u)^-\Theta(t^-\Theta v))\wedge\phi^+(v^-\Theta u)\wedge\phi^+((t\Theta v^\sim)\Theta(u\Delta v^\sim)^\sim)\Theta\phi^+(u\Theta t^\sim)\wedge\phi^+(u\Theta v^\sim)\wedge\phi^+((v\Theta t^\sim)\Theta(u\Theta t^\sim)^\sim)\leqslant\phi^+(t^-\Theta v)\wedge\phi^+(v^-\Theta t)\wedge\phi^+(t\Theta v^\sim)\wedge\phi^+(v\Theta t^\sim)=\Omega_\phi^+(t,v)。$$

同理可得

$$\phi^-(x\Theta u^\sim)\Theta\phi^-(u\Theta t^\sim)\vee\phi^-(u\Theta v^\sim)\Theta\phi^-(v\Theta u^\sim)\geqslant\Omega_\phi^-(t,v)。$$

因此Ω_ϕ满足双极值模糊传递性。综上,Ω_ϕ是H的双极值模糊等价关系。

定理 3.3 令H是优伪环代数且ϕ是H的双极值模糊正规理想,则称Ω_ϕ是H的双极值模糊同余关系。

证明 由定理3.2可得Ω_ϕ是H的双极值模糊等价关系。由于$(t\Theta a)\Theta(u\Theta a)^\sim=t\Theta(a\Theta(a\rightsquigarrow u^\sim))\leqslant t\Theta u^\sim$和$(u\Theta a)\Theta(t\Theta a)^\sim=u\Theta(a\Theta(a\rightsquigarrow t^\sim))\leqslant u\Theta t^\sim$,$\phi$是$H$的双极值模糊正规理想,则有

$$\Omega_\phi^+(t,u)=\phi^+(t^-\Theta u)\wedge\phi^+(u^-\Theta t)\wedge\phi^+(t\Theta u^\sim)\wedge\phi^+(u\Theta t^\sim)\leqslant\phi^+(t\Theta u^\sim)\wedge\phi^+(u\Theta t^\sim)\leqslant\phi^+((t\Theta a)\Theta(u\Theta a)^\sim)\wedge\phi^+((u\Theta a)\Theta(t\Theta a)^\sim)=\phi^+((t\Theta a)\Theta(u\Theta a)^\sim)\wedge\phi^+((u\Theta a)\Theta(t\Theta a)^\sim)\wedge\phi^+((u\Theta a)^-\Theta(t\Theta a))\wedge\phi^+((t\Theta a)^-\Theta(u\Theta a))=\Omega_\phi^+(t\Theta a,u\Theta a)$$

成立,同理可得$\Omega_\phi^-(t,u)\geqslant\Omega_\phi^-(t\Theta a,u\Theta a)$。类似可得$\Omega_\phi^+(t,u)\leqslant\Omega_\phi^+(a\Theta t,a\Theta u)$,$\Omega_\phi^-(t,u)\geqslant\Omega_\phi^-(a\Theta t,a\Theta u)$。

由

$$(t^-\Theta u)^-\Theta(t^-\Theta u^{--})=((t^-\rightarrow u^-)\Theta t^-)\Theta u^{--}\leqslant u^-\Theta u^{--}=0,$$
$$(u^-\Theta t)^-\Theta(u^-\Theta t^{--})=((u^-\rightarrow t^-)\Theta u^-)\Theta t^{--}\leqslant t^-\Theta t^{--}=0,$$

则有

$$\Omega_\phi^+(t,u)=\phi^+(t^-\Theta u)\wedge\phi^+(u^-\Theta t)\wedge\phi^+(t\Theta u^\sim)\wedge\phi^+(u\Theta t^\sim)=\phi^+(t^-\Theta u)\wedge\phi^+(u^-\Theta t)\wedge\phi^+(t\Theta u^\sim)\wedge\phi^+(u\Theta t^\sim)\wedge$$

$$\phi^+(0)\wedge\phi^+(0)\leqslant$$
$$\phi^+(t^-\Theta u)\wedge\phi^+(u^-\Theta t)\wedge\phi^+(t\Theta u^\sim)\wedge\phi^+(u\Theta t^\sim)\wedge$$
$$\phi^+((t^-\Theta u)^-\Theta(t^-\Theta u^{-\sim}))\wedge\phi^+((u^-\Theta t)^-\Theta\phi^+(u^-\Theta t^{-\sim}))=$$
$$\phi^+(t^-\Theta u^{-\sim})\wedge\phi^+(u^-\Theta t^{-\sim})=$$
$$\phi^+(t^-\Theta u^{-\sim})\wedge\phi^+(u^-\Theta t^{-\sim})\wedge\phi^+(u^{-\sim}\Theta t^-)\wedge\phi^+(t^{-\sim}\Theta u^-)=$$
$$\Omega_\phi{}^+(t^-,u^-)。$$

同理可得$\Omega_\phi{}^-(t,u)\geqslant\Omega_\phi{}^-(t^-,u^-)$。类似有$\Omega_\phi{}^+(t,u)\leqslant\Omega_\phi{}^+(t^\sim,u^\sim)$和$\Omega_\phi{}^-(t,u)\geqslant\Omega_\phi{}^-(t^\sim,u^\sim)$成立。

对$\forall t,u,a\in H$,有

$$\Omega_\phi{}^+(t,u)\leqslant\Omega_\phi{}^+(t^{-\sim},u^{-\sim})\leqslant\Omega_\phi{}^+((t^{-\sim}\Theta a^\sim)^\sim,(u^{-\sim}\Theta a^\sim)^\sim)=$$
$$\Omega_\phi{}^+((t^{-\sim}\to a^{-\sim},u^{-\sim}\to a^{-\sim}))\leqslant\Omega_\phi{}^+((t^{-\sim}\to a^{-\sim},u^{-\sim}\to a^{-\sim}))=$$
$$\Omega_\phi{}^+(((t\to a)^{-\sim},(u\to a)^{-\sim}))=\Omega_\phi{}^+(t\to a,u\to a),$$

同理可得$\Omega_\phi{}^-(t,u)\geqslant\Omega_\phi{}^-(t\to a,u\to a)$,类似有:

$$\Omega_\phi{}^+(t,u)\leqslant\Omega_\phi{}^+(a\to t,a\to u),$$
$$\Omega_\phi{}^-(t,u)\geqslant\Omega_\phi{}^-(a\to t,a\to u);$$
$$\Omega_\phi{}^+(t,u)\leqslant\Omega_\phi{}^+(t\twoheadrightarrow a,u\twoheadrightarrow a),$$
$$\Omega_\phi{}^-(t,u)\geqslant\Omega_\phi{}^-(t\twoheadrightarrow a,u\twoheadrightarrow a);$$
$$\Omega_\phi{}^+(t,u)\leqslant\Omega_\phi{}^+(a\twoheadrightarrow t,a\twoheadrightarrow u),$$
$$\Omega_\phi{}^-(t,u)\geqslant\Omega_\phi{}^-(a\twoheadrightarrow t,a\twoheadrightarrow u)。$$

因此,Ω_ϕ是H的双极值模糊同余关系。

定理3.4　令H,J是两个有界伪环代数,$f:H\to J$是有界伪环同态,如果λ是H的双极值模糊(正规)理想,则$\lambda_f=(\lambda_f{}^-,\lambda_f{}^+)$是$J$的双极值模糊(正规)理想,这里$\lambda_f^-(x)=\lambda^-(f(x)),\lambda_f^+(x)=\lambda^+(f(x)),x\in H$。

证明　假设$\lambda\in\mathrm{BVFI}(H)$。下面证明$\lambda_f=(\lambda_f{}^-,\lambda_f{}^+)\in\mathrm{BVFI}(J)$。令$t,u\in J$且$t\leqslant u$。

由于f是有界伪环同态,则存在$a,b\in H$使得$f(a)=t,f(b)=u$。这意味着

$$1=t\to u=f(a)\to f(b)=f(a\to b)\Rightarrow a\to b=1,$$

即$a\leqslant b$。现在有

$$\lambda_f^+(u)=\vee\{\lambda^+(b):f(b)=u\}\leqslant\vee\{\lambda^+(a):f(a)=t\}=\lambda_f^+(t),$$
$$\lambda_f^-(u)=\wedge\{\lambda^-(b):f(b)=u\}\geqslant\wedge\{\lambda^-(a):f(a)=t\}=\lambda_f^-(t)。$$

另外,

$$\lambda_f^+(t)\wedge\lambda_f^+(u)=\vee\{\lambda^+(a):f(a)=t\}\wedge\vee\{\lambda^+(b):f(b)=u\}=\vee\{\lambda^+(a)\wedge\lambda^+(b):f(b)=u,f(a)=t\}\leqslant\vee\{\lambda^+(a\lhd b):f(b)=u,f(a\lhd b)=t\lhd u\}=\lambda_f^+(t\lhd u)。$$

同理可得$\lambda_f^-(t)\vee\lambda_f^-(u)\geqslant\lambda_f^+(t\lhd u)$。类似的有

$$\lambda_f^-(t)\wedge\lambda_f^-(u)\leqslant\lambda_f^-(t\rhd u),$$
$$\lambda_f^+(t)\vee\lambda_f^+(u)\geqslant\lambda_f^+(t\rhd u)$$

成立。即证,$\lambda_f=(\lambda_f{}^-,\lambda_f{}^+)\in\mathrm{BVFI}(J)$。

假设$\lambda\in\mathrm{BVFNI}(H)$,令$t,u\in J$,则有

$$\lambda_f^+(t^-\Theta u)=\lambda^+(f(a^-)\Theta f(b))=\vee\{\lambda^+(a^-\Theta b):f(a^-\Theta b)=t^-\Theta u\}=\vee\{\lambda^+(a\Theta b^\sim):f(a\Theta b^\sim)=t\Theta u^\sim\}=\lambda_f^+(t\Theta u^\sim),$$

同理可得$\lambda_f^-(t^-\Theta u)=\lambda_f^-(t\Theta u^\sim)$。即证

$$\lambda_f=(\lambda_f{}^-,\lambda_f{}^+)\in\mathrm{BVFNI}(J)。$$

4　结　论

有关理想的研究在逻辑代数性质的研究中起着重要作用。本文结合双极值模糊集理论和伪环代数理论,在伪环代数中提出了双极值模糊理想的概念,并用双极值模糊理想诱导了伪环代数上的双极值模糊同余关系,证明了一些相关的代数性质,这些工作进一步丰富和完善了伪环代数中理想问题的研究体系。在此工作的基础上,可以研究伪环代数中滤子的一些性质,未来,作者将继续关注并推动这一研究的不断深入。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2025. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

参 考 文 献

[1] Bosbach B. Komplementäre halbgruppen. axiomatik und arithmetik[J]. Fundamenta Mathematicae, 1969, 64(3): 257-287. DOI: 10.4064/fm-64-3-257-287.

[2] Bosbach B. Komplementäre halbgruppen kongruenzen und quotienten[J]. Fundamenta Mathematicae, 1970, 69(1): 1-14. DOI: 10.4064/fm-69-1-1-14.

[3] Georgescu G, Iorgulescu A. Pseudo-MV algebras[J]. Multiple-Valued Logic, 2001, 6(1): 95-135. DOI: 10.1007/s005000100135.

[4] Georgescu G, Leustean L, Preoteasa V. Pseudo-hoops[J]. Journal of Multiple-Valued Logic and soft computing, 2005, 11(2): 153-184. DOI: 10.1016/j.jlap.2004.01.007.

[5] Ciungu L C. Involutive filters of pseudo-hoops[J]. Soft Computing, 2019, 23(19): 9459-9476. DOI: 10.1007/s00500-019-03793-y.

[6] Botur M, Dvurečenskij A. On pseudo-BL-algebras and pseudo-hoops with normal maximal filters[J]. Soft Computing, 2016, 20(2): 439-448. DOI: 10.1007/

s00500-015-1793-3.

[7] Zalavi S, Borzooei R A, Kologani M A. Filter theory of pseudo hoop-algebras[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathrmatics, 2017, 37(1): 619-632. DOI: 97919db0ae94ebe4.

[8] Namdar A, Borzooei R A. Nodal filters in hoop algebras[J]. Soft Computing, 2018, 22(21): 7119-7128. DOI: 10.1007/s00500-017-2986-8.

[9] Xie F, Liu H X. Ideals in pseudo-hoop algebras[J]. Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras, 1999, 1(4): 39-53. DOI: 10.52547/hatef.jahla.1.4. 3.

[10] Rosenfeld A. Fuzzy groups[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 35(3): 512-517. DOI: 10.1016/0022-247X(71)90199-5.

[11] 周鑫, 刘淼. 基于*L*-值泛代数的*L*-值模[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(3): 48-54. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.0. 2022.461.
Zhou Xin, Liu Miao. *L*-valued modules based on *L*-valued universal algebras[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2023, 58(3): 48-54.

[12] Gubena Y M, Alemayehu T G, Wondifraw Y G. Closure fuzzy filters of decomposable MS-algebras[J]. Topological Algebra and Its Applications, 2022, 10(1): 216-226. DOI: 10.1515/taa-2022-0128.

[13] Alemayehu T G, Engidaw D A, Addis G M. L-fuzzy congruences and L-fuzzy kernel ideals in ockham algebras[J]. Journal of Mathematics, 2021, 2021(1): 6644443. DOI: 10.1155/2021/6644443.

[14] Zhang W R. Bipolar fuzzy sets and relations: a computational framework for cognitive modeling and multiagent decision analysis [C]//Mcbann M. Proceedings of IEEE Conference, 13, American, North American Fuzzy Information Processing Society. San Antonio, TX: IEEE, 1994: 305-309.

[15] 刘春辉, 白彦辉, 秦学成. 双极值模糊子格[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2023, 46(1): 78-82. DOI: 10.3969/j.issn.1001-8395.2023.01.010.
Liu Chunhui, Bai Yanhui, Qin Xuecheng. Bipolar fuzzy sublattices[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2023, 46(1): 78-82.

[16] 姜曼, 常在斌. R_0代数的几类双极值模糊滤子及其相互关系[J]. 模糊系统与数学, 2023, 37(4): 42-48.
Jiang Man, Chang Zaibin. Some kinds of bipolar valued fuzzy filters of R_0 algebra and their relations[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2023, 37(4): 42-48.

[17] 姜曼. 伪BE代数的双极值模糊滤子[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2025, 49(1): 19-26. DOI: 10.3969/j.issn.1000-2162.2025.01.003.
Jiang Man. Bipolar fuzzy filters of pseudo BE algebras[J]. Journal of Anhui University (Natural Sciences), 2025, 49(1): 19-26.

[18] 喜文飞. 基于双极值模糊集评判法的滑坡灾害危险性评价研究: 以鲁甸县为例[J]. 测绘学报, 2024, 53(8): 1661. DOI: 10.11947/j.AGCS. 2024.20230215.
Xi Wenfei. Evaluation of landslide hazard risk rating based on bipolar fuzzy set evaluation method: take Ludian county as an example[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2024, 53(8): 1661.

[19] Ciungu L C. Non-commutative multiple-valued logic algebras[M]. Cham: Springer International Publishing, 2014.

(责任编辑:马田田)