DOI：10.19789/j.1004-9398.2026.05.009　　**Open Access**
文献引用：高丽．包含Euler函数等数论函数方程的可解性[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2026，47（5）：55-61. Gao Li. The solvability of equations containing Euler functions and other functions[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2026，47（5）：55-61.

包含Euler函数等数论函数方程的可解性*

高　丽**

（西安翻译学院理工学部，陕西 西安　710105；延安大学
数学与计算机科学学院，陕西 延安　716000）

摘要：利用Euler函数$\varphi(n)$、Smarandache函数$S(n)$、Smarandache LCM函数$SL(n)$、广义Euler函数$\varphi_2(n)$的定义与性质，以及初等的方法和技巧，结合分类讨论的思想，研究了形如$\varphi(n)+S(SL(n^l))=k\varphi_2(n)$的数论函数方程的可解性，得到了包含Euler函数等的数论函数方程$\varphi(n)+S(SL(n^9))=k\varphi_2(n)$有35组正整数解。

关键词：数论函数；广义Euler函数；Smarandache函数；可解性
中图分类号：O156　　**文献标志码**：A

The solvability of equations containing Euler functions and other functions*

Gao Li**

（College of Science Technology，Xi'an Fanyi University，Xi'an Shaanxi　710105；College of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an Shaanxi　716000）

Abstract：By using the definitions and properties of Euler function $\varphi(n)$，Smarandache function $S(n)$，Smarandache LCM function $SL(n)$ and generalized Euler function $\varphi_2(n)$，as well as the elementary methods and techniques，combined with the idea of classification discussion，the paper studies the solvability of the number theory function equation $\varphi(n)+S(SL(n^l))=k\varphi_2(n)$，and obtain that the equation containing Euler functions $\varphi(n)+S(SL(n^9))=k\varphi_2(n)$ has 35 positive integer solutions.

Keywords：number theoretic function；generalized Euler function；Smarandache function；solvability
CLC：O156　　**DC**：A

0　引　言

数论函数是数论研究的重要内容[1-2]，Euler函数与Smarandache函数是数论中的重要函数，自提出以来就受到数论爱好者的广泛关注，文献[3]研究了Smarandache kn数列及其与Smarandache LCM函数的混合均值，文献[4-5]分别对包含Euler函数与Smarandache函数的方程进行研究。关于数论函数方程的可解性研究已经取得了非常多的成果[6-11]。如文献[12]利用Smarandache函数$S(n)$、

收稿日期：2025-05-07
*国家自然科学基金项目（62261055，11471007）
**通信作者：yadxgl@163.com

Smarandache LCM 函数 $SL(n)$、Euler函数 $\varphi(n)$ 和广义 Euler函数 $\varphi_e(n)$ 的基本性质,结合初等方法研究了当 $k=13,18$ 时,数论函数方程 $t\varphi(n)+\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$ 的可解性,并给出了2个方程的全部正整数解。

对于形如 $k\varphi(n)=m\varphi_2(n)+S(n^l)$ 数论函数方程的可解性,文献[13]给出了当 $m=1,l=8$ 时,方程只有在 $k=1,2,4,5,9,11$ 时有正整数解;文献[14]给出了当 $m=1,l=10$ 时,方程只有在 $k=1,2,4,6,8,11,13$ 时有正整数解;文献[15]给出了当 $m=7,l=13$ 时,方程只有在 $k=1,4,5,6,7,8,9,11,14,17,23$ 时有正整数解;文献[16]给出了当 $k=2,m=1,l=25$ 时,方程的正整数解为 $n=867,1\,156,1\,734$。

本文利用 Euler 函数 $\varphi(n)$、Smarandache 函数 $S(n)$、Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 和广义 Euler 函数 $\varphi_2(n)$ 的定义与性质,以及初等的方法和技巧,结合分类讨论的方法研究了方程 $\varphi(n)+S(SL(n^l))=k\varphi_2(n)$ 在 $l=9$ 的可解性,得出如下定理。

定理 数论函数方程

$$\varphi(n)+S(SL(n^9))=k\varphi_2(n) \tag{1}$$

共有35组正整数解,分别为 $(k,n)=(3,176),(3,224),(3,288),(3,384),(3,1\,083),(3,1\,369),(3,1\,444),(3,2\,166),(3,2\,738),(4,120),(4,128),(4,361),(4,722),(5,96),(6,40),(7,48),(7,60),(8,32),(10,24),(12,12),(12,15),(12,16),(12,20),(12,30),(13,2),(15,9),(15,18),(18,8),(21,19),(21,38),(22,4),(22,5),(22,10),(23,3),(23,6)$。

1 预备知识及引理

为了完成定理的证明,首先给出了Euler函数 $\varphi(n)$、Smarandache LCM 函数 $SL(n)$、Smarandache函数 $S(n)$、广义Euler函数 $\varphi_e(n)$ 一些基本理论知识和后续定理证明过程中所需要的相关引理。

定义1[17] 正整数 n 的欧拉函数 $\varphi(n)$ 定义为序列 $1,2,\cdots,n$ 中与 n 互素的正整数的个数。

定义2[18] Smarandache函数 $S(n)$ 的定义为使得 $n\mid m!$ 成立的最小正整数 m,即

$$S(n)=\min\{m\in Z^+:n\mid m!\}。$$

定义3[18] 对任意的正整数 e,正整数 n 的广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$ 定义为序列 $1,2,\cdots,\left[\frac{n}{e}\right]$ 中与 n 互素的数的个数,即

$$\varphi_e(n)=\sum_{i=1,\gcd(i,n)=1}^{\left[\frac{n}{e}\right]}1。$$

定义4[18] Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 的定义为最小的正整数 m,使得 $1,2,3,\cdots,m$ 的最小公倍数能被 n 整除,即

$$SL(n)=\min\{m:m\in\mathbf{Z}^+,n\mid\operatorname{lcm}[1,2,3,\cdots,m]\}。$$

引理1[6] 当 $n\geqslant 3$ 时,$\varphi(n)$ 为偶数。

引理2[7] 当 $n\geqslant 3$ 时,有 $\varphi_2(n)=\frac{1}{2}\varphi(n)$;当 $n=1$ 时,$\varphi_2(1)=0$;当 $n=2$ 时,$\varphi_2(2)=1$。

引理3[7] 如果 $n=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_k^{\beta_k}$ 是正整数 n 的标准分解式,则

$$S(n)=\max\{S(q_1^{\beta_1}),S(q_2^{\beta_2}),\cdots,S(q_k^{\beta_k})\},$$

$$SL(n)=\max\{q_1^{\beta_1},q_2^{\beta_2},\cdots,q_k^{\beta_k}\}。$$

引理4[19] 对任意的正整数 m,n,有 $\varphi(mn)=\frac{(m,n)\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi((m,n))}$;当 $(m,n)=1$ 时,$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$。

引理5[7] 如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是正整数 n 的标准分解式,则

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)。$$

引理6[20] 对于素数 p 和正整数 k,有 $S(p^k)\leqslant kp$;特别地,当 $k<p$ 时,有 $S(p^k)=kp$。

引理7[21] 若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为互异的素数,则 $SL(n)=\max\{p_i^{\alpha_i}\mid i=1,2,\cdots,k\}$。特别地,当 p 为素数及 $k\geqslant 1$ 时,$SL(p^k)=p^k$。

2 定理的证明

证明 当 $n=1$ 时,有 $\varphi(1)+S(SL(1^9))=1+1=2,k\varphi_2(1)=0$,显然不满足方程(1),此时方程(1)无正整数解。当 $n=2$ 时,有 $\varphi(2)+S(SL(2^9))=1+12=13,k\varphi_2(2)=k$,代入方程(1)可得 $k=13$,此时方程(1)有正整数解 $(k,n)=(13,2)$。当 $n\geqslant 3$ 时,设正整数 n 的标准分解式为 $n=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_k^{\beta_k}$,其中 $q_i(i=$

$1,2,\cdots,k$)是n的素因子,且β_i是q_i在n的标准分解式中相应的幂次。根据引理3有

$$SL(n^9)=\max\left\{q_1^{9\beta_1},q_2^{9\beta_2},\cdots,q_k^{9\beta_k}\right\}=q^{9\beta},\quad(2)$$

其中$q^{9\beta}=\max\left\{q_1^{9\beta_1},q_2^{9\beta_2},\cdots,q_k^{9\beta_k}\right\}$,由引理2和式(1)有

$$\varphi(n)+S(SL(n^9))=k\varphi_2(n)=\frac{k\varphi(n)}{2},$$

即

$$(k-2)\varphi(n)=2S(SL(n^9))。\quad(3)$$

由式(3)可知$k\geqslant 3$,设$n=q^{\beta}m$,且$(q,m)=1$,则由式(2)和(3)及引理4有

$$(k-2)\varphi(n)=(k-2)\varphi(q^{\beta})\varphi(m)=$$
$$q^{\beta-1}(q-1)(k-2)\varphi(m)=2S(SL(n^9))=2S(q^{9\beta}),$$

再由引理5有

$$q^{\beta-1}(q-1)\leqslant q^{\beta-1}(q-1)(k-2)\varphi(m)=2S(q^{9\beta})\leqslant 18q\beta,\quad(4)$$

可得

$$q^{\beta-2}(q-1)\leqslant q^{\beta-2}(q-1)(k-2)\varphi(m)\leqslant 18\beta,\quad(5)$$

所以有

$$2^{\beta-2}\leqslant 18\beta。$$

对上式两边同时取对数有$\lg 2^{\beta-2}\leqslant\lg 18\beta$,即$(\beta-2)\lg 2\leqslant\lg 18+\lg\beta$,解得$\beta<10$,以下讨论$\beta<10$时的9种情况。

情况1　若$\beta=1$,则式(5)有$q^{-1}(q-1)\leqslant 18$,可得$q\geqslant 2$。

情况1.1　若$q=2$,则式(4)有$(k-2)\varphi(m)=2S(2^9)=24$。

(1)当$\varphi(m)=1$时,可得$m=1,2$,此时$k-2=24$,则$k=26$。因为$(2,m)=1$,所以$m=1$,从而$n=2m=2$。由于$n\geqslant 3$,故方程(1)无解。

(2)当$\varphi(m)=2$时,可得$m=3,4,6$,此时$k-2=12$,则$k=14$。因为$(2,m)=1$,所以$m=3$,从而$n=2m=6$,经检验$(k,n)=(14,6)$不是方程(1)的解。

(3)当$\varphi(m)=4$时,可得$m=5,8,10,12$,此时$k-2=6$,则$k=8$。因为$(2,m)=1$,所以$m=5$,从而$n=2m=10$,经检验$(k,n)=(8,10)$不是方程(1)的解。

(4)当$\varphi(m)=6$时,可得$m=7,9,14,18$,此时$k-2=4$,则$k=6$。因为$(2,m)=1$,所以$m=7,9$,从而$n=2m=14,18$,经检验$(k,n)=(6,14),(6,18)$均不是方程(1)的解。

(5)当$\varphi(m)=8$时,可得$m=15,16,20,24,30$,此时$k-2=3$,则$k=5$。因为$(2,m)=1$,所以$m=15$,从而$n=2m=30$,经检验$(k,n)=(5,30)$不是方程(1)的解。

(6)当$\varphi(m)=12$时,可得$m=13,21,26,28,36,42$,此时$k-2=2$,则$k=4$。因为$(2,m)=1$,所以$m=13,21$,从而$n=2m=26,42$,经检验$(k,n)=(4,26),(4,42)$均不是方程(1)的解。

(7)当$\varphi(m)=24$时,可得$m=35,39,45,52,56,70,72,78,84,90$,此时$k-2=1$,则$k=3$。因为$(2,m)=1$,所以$m=35,39,45$,从而$n=2m=70,78,90$,经检验$(k,n)=(3,70),(3,78),(3,90)$均不是方程(1)的解。

情况1.2　若$q=3$,则式(4)有$2(k-2)\varphi(m)=2S(3^9)=42$,即$(k-2)\varphi(m)=21$。

当$\varphi(m)=1$时,可得$m=1,2$,此时$k-2=21$,则$k=23$。因为$(3,m)=1$,所以$m=1,2$,从而$n=3m=3,6$,经检验$(k,n)=(23,3),(23,6)$均是方程(1)的解。

情况1.3　若$q=5$,则式(4)有$4(k-2)\varphi(m)=2S(5^9)=80$,即$(k-2)\varphi(m)=20$。

(1)当$\varphi(m)=1$时,可得$m=1,2$,此时$k-2=20$,则$k=22$。因为$(5,m)=1$,所以$m=1,2$,从而$n=5m=5,10$,经检验$(k,n)=(22,5),(22,10)$均是方程(1)的解。

(2)当$\varphi(m)=2$时,可得$m=3,4,6$,此时$k-2=10$,则$k=12$。因为$(5,m)=1$,所以$m=3,4,6$,从而$n=5m=15,20,30$,经检验$(k,n)=(12,15),(12,20),(12,30)$均是方程(1)的解。

(3)当$\varphi(m)=4$时,可得$m=5,8,10,12$,此时$k-2=5$,则$k=7$。因为$(5,m)=1$,所以$m=8,12$,从而$n=5m=40,60$,经检验$(k,n)=(7,40),(7,60)$中只有$(7,60)$是方程(1)的解。

(4)当$\varphi(m)=10$时,可得$m=11,22$,此时$k-2=2$,则$k=4$。因为$(5,m)=1$,所以$m=11,22$,从而$n=5m=55,110$,经检验$(k,n)=(4,55),(4,110)$均不是方程(1)的解。

(5)当$\varphi(m)=20$时,可得$m=25,33,44,50,66$,此时$k-2=1$,则$k=3$。因为$(5,m)=1$,所以

$m=33,44,66$,从而 $n=5m=165,220,330$,经检验 $(k,n)=(3,165),(3,220),(3,330)$ 均不是方程(1)的解。

情况 1.4 若 $q=7$,则式(4)有 $6(k-2)\varphi(m)=2S(7^9)=112$,即 $3(k-2)\varphi(m)=56$。因为 $3\nmid 56$,所以方程(I)无解。

情况 1.5 若 $q>9$,则式(4)和引理6有 $(q-1)(k-2)\varphi(m)=2S(q^9)=18q$。因为 $q-1\mid 18$,且 $q>9$,所以可得 $q=19$。

若 $q=19$,则有 $18(k-2)\varphi(m)=18\times 19=342$,即 $(k-2)\varphi(m)=19$。当 $\varphi(m)=1$ 时,可得 $m=1,2$,此时 $k-2=19$,则 $k=21$。因为 $(19,m)=1$,所以 $m=1,2$,从而 $n=19m=19,38$,经检验 $(k,n)=(21,19),(21,38)$ 均是方程(1)的解。

情况 2 若 $\beta=2$,则式(4)有 $q-1\leqslant 36$,可得 $q\leqslant 37$。

情况 2.1 若 $q=2$,则式(4)有 $2(k-2)\varphi(m)=2S(2^{18})=40$,即 $(k-2)\varphi(m)=20$。

(1)当 $\varphi(m)=1$ 时,可得 $m=1,2$,此时 $k-2=20$,则 $k=22$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=1$,从而 $n=2^2m=4$,经检验 $(k,n)=(22,4)$ 是方程(1)的解。

(2)当 $\varphi(m)=2$ 时,可得 $m=3,4,6$,此时 $k-2=10$,则 $k=12$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=3$,从而 $n=2^2m=12$,经检验 $(k,n)=(12,12)$ 是方程(1)的解。

(3)当 $\varphi(m)=4$ 时,可得 $m=5,8,10,12$,此时 $k-2=5$,则 $k=7$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=5$,从而 $n=2^2m=20$,经检验 $(k,n)=(7,20)$ 不是方程(1)的解。

(4)当 $\varphi(m)=10$ 时,可得 $m=11,22$,此时 $k-2=2$,则 $k=4$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=11$,从而 $n=2^2m=44$,经检验 $(k,n)=(4,44)$ 不是方程(1)的解。

(5)当 $\varphi(m)=20$ 时,可得 $m=25,33,44,50,66$,此时 $k-2=1$,则 $k=3$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=25,33$,从而 $n=2^2m=100,132$,经检验 $(k,n)=(3,100),(3,132)$ 均不是方程(1)的解。

情况 2.2 若 $q=3$,则式(4)有 $6(k-2)\varphi(m)=2S(3^{18})=78$,即 $(k-2)\varphi(m)=13$。

当 $\varphi(m)=1$ 时,可得 $m=1,2$,此时 $k-2=13$,则 $k=15$。因为 $(3,m)=1$,所以 $m=1,2$,从而 $n=3^2m=9,18$,经检验 $(k,n)=(15,9),(15,18)$ 均是方程(1)的解。

情况 2.3 若 $q=5$,则式(4)有 $20(k-2)\varphi(m)=2S(5^{18})=150$,即 $2(k-2)\varphi(m)=15$。因为 $2\nmid 15$,所以方程(1)无解。

情况 2.4 若 $q=7$,则式(4)有 $42(k-2)\varphi(m)=2S(7^{18})=224$,即 $3(k-2)\varphi(m)=16$。因为 $3\nmid 16$,所以方程(1)无解。

情况 2.5 若 $q=11$,式(4)有 $110(k-2)\varphi(m)=2S(11^{18})=374$,即 $5(k-2)\varphi(m)=17$。因为 $5\nmid 17$,所以方程(1)无解。

情况 2.6 若 $q=13$,式(4)有 $156(k-2)\varphi(m)=2S(13^{18})=442$,即 $6(k-2)\varphi(m)=17$。因为 $6\nmid 17$,所以方程(1)无解。

情况 2.7 若 $q=17$,式(4)有 $272(k-2)\varphi(m)=2S(17^{18})=578$,即 $8(k-2)\varphi(m)=17$。因为 $8\nmid 17$,所以方程(1)无解。

情况 2.8 若 $17<q\leqslant 37$,则式(4)及引理6和7有 $q(q-1)(k-2)\varphi(m)=2S(q^{18})=36q$,即 $(q-1)(k-2)\varphi(m)=36$。因为 $q-1\mid 36$,且 $17<q\leqslant 37$,所以可得 $q=19,37$。

情况 2.8.1 若 $q=19$,则有 $18(k-2)\varphi(m)=36$,即 $(k-2)\varphi(m)=2$。

(1)当 $\varphi(m)=1$ 时,可得 $m=1,2$,此时 $k-2=2$,则 $k=4$。因为 $(19,m)=1$,所以 $m=1,2$,从而 $n=19^2m=361,722$,经检验 $(k,n)=(4,361),(4,722)$ 均是方程(1)的解。

(2)当 $\varphi(m)=2$ 时,可得 $m=3,4,6$,此时 $k-2=1$,则 $k=3$。因为 $(19,m)=1$,所以 $m=3,4,6$,从而 $n=19^2m=1\,083,1\,444,2\,166$,经检验 $(k,n)=(3,1\,083),(3,1\,444),(3,2\,166)$ 均是方程(1)的解。

情况 2.8.2 若 $q=37$,则有 $36(k-2)\varphi(m)=36$,即 $(k-2)\varphi(m)=1$。

当 $\varphi(m)=1$ 时,可得 $m=1,2$,此时 $k-2=1$,则 $k=3$。因为 $(37,m)=1$,所以 $m=1,2$,从而 $n=37^2m=1\,369,2\,738$,经检验 $(k,n)=(3,1\,369),(3,2\,738)$ 均是方程(1)的解。

情况 3 若 $\beta=3$,则式(4)有 $q(q-1)\leqslant 54$,可得 $q=2,3,5,7$。

情况 3.1　若 $q=2$,则式(4)有 $4(k-2)\varphi(m)=2S(2^{27})=64$,即 $(k-2)\varphi(m)=16$。

(1)当 $\varphi(m)=1$ 时,可得 $m=1,2$,此时 $k-2=16$,则 $k=18$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=1$,从而 $n=2^3m=8$,经检验 $(k,n)=(18,8)$ 是方程(1)的解。

(2)当 $\varphi(m)=2$ 时,可得 $m=3,4,6$,此时 $k-2=8$,则 $k=10$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=3$,从而 $n=2^3m=24$,经检验 $(k,n)=(10,24)$ 是方程(1)的解。

(3)当 $\varphi(m)=4$ 时,可得 $m=5,8,10,12$,此时 $k-2=4$,则 $k=6$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=5$,从而 $n=2^3m=40$,经检验 $(k,n)=(6,40)$ 是方程(1)的解。

(4)当 $\varphi(m)=8$ 时,可得 $m=15,16,20,24,30$,此时 $k-2=2$,则 $k=4$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=15$,从而 $n=2^3m=120$,经检验 $(k,n)=(4,120)$ 是方程(1)的解。

(5)当 $\varphi(m)=16$ 时,可得 $m=17,32,34,40,48,60$,此时 $k-2=1$,则 $k=3$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=17$,从而 $n=2^3m=136$,经检验 $(k,n)=(3,136)$ 不是方程(1)的解。

情况 3.2　若 $q=3$,则式(4)有 $18(k-2)\varphi(m)=2S(3^{27})=114$,即 $3(k-2)\varphi(m)=19$。因为 $3\nmid 19$,所以方程(1)无解。

情况 3.3　若 $q=5$,式(4)有 $100(k-2)\varphi(m)=2S(5^{27})=230$,即 $10(k-2)\varphi(m)=23$。因为 $10\nmid 23$,所以方程(1)无解。

情况 3.4　若 $q=7$,式(4)有 $294(k-2)\varphi(m)=2S(7^{27})=336$,即 $7(k-2)\varphi(m)=8$。因为 $7\nmid 8$,所以方程(1)无解。

情况 4　若 $\beta=4$,则式(4)有 $q^2(q-1)\leqslant 72$,可得 $q=2,3$。

情况 4.1　若 $q=2$,则式(4)有 $8(k-2)\varphi(m)=2S(2^{36})=80$,即 $(k-2)\varphi(m)=10$。

(1)当 $\varphi(m)=1$ 时,可得 $m=1,2$,此时 $k-2=10$,则 $k=12$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=1$,从而 $n=2^4m=16$,经检验 $(k,n)=(12,16)$ 是方程(1)的解。

(2)当 $\varphi(m)=2$ 时,可得 $m=3,4,6$,此时 $k-2=5$,则 $k=7$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=3$,从而 $n=2^4m=48$,经检验 $(k,n)=(7,48)$ 是方程(1)的解。

(3)当 $\varphi(m)=10$ 时,可得 $m=11,22$,此时 $k-2=1$,则 $k=3$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=11$,从而 $n=2^4m=176$,经检验 $(k,n)=(3,176)$ 是方程(1)的解。

情况 4.2　若 $q=3$,则式(4)有 $54(k-2)\varphi(m)=2S(3^{36})=156$,即 $9(k-2)\varphi(m)=26$。因为 $9\nmid 26$,所以方程(1)无解。

情况 5　若 $\beta=5$,则式(4)有 $q^3(q-1)\leqslant 90$,可得 $q=2,3$。

情况 5.1　若 $q=2$,则式(4)有 $16(k-2)\varphi(m)=2S(2^{45})=96$,即 $(k-2)\varphi(m)=6$。

(1)当 $\varphi(m)=1$ 时,可得 $m=1,2$,此时 $k-2=6$,则 $k=8$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=1$,从而 $n=2^5m=32$,经检验 $(k,n)=(8,32)$ 是方程(1)的解。

(2)当 $\varphi(m)=2$ 时,可得 $m=3,4,6$,此时 $k-2=3$,则 $k=5$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=3$,从而 $n=2^5m=96$,经检验 $(k,n)=(5,96)$ 是方程(1)的解。

(3)当 $\varphi(m)=6$ 时,可得 $m=7,9,14,18$,此时 $k-2=1$,则 $k=3$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=7,9$,从而 $n=2^5m=224,288$,经检验 $(k,n)=(3,224)$ $(3,288)$ 均是方程(1)的解。

情况 5.2　若 $q=3$,式(4)有 $162(k-2)\varphi(m)=2S(3^{45})=186$,即 $27(k-2)\varphi(m)=31$。因为 $27\nmid 31$,所以方程(1)无解。

情况 6　若 $\beta=6$,则式(4)有 $q^4(q-1)\leqslant 108$,可得 $q=2$。

若 $q=2$,则式(4)有 $32(k-2)\varphi(m)=2S(2^{54})=116$,即 $8(k-2)\varphi(m)=29$。因为 $8\nmid 29$,所以方程(1)无解。

情况 7　若 $\beta=7$,则式(4)有 $q^5(q-1)\leqslant 126$,可得 $q=2$。

若 $q=2$,则式(4)有 $64(k-2)\varphi(m)=2S(2^{63})=128$,即 $(k-2)\varphi(m)=2$。

(1)当 $\varphi(m)=1$ 时,可得 $m=1,2$,此时 $k-2=2$,则 $k=4$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=1$,从而 $n=2^7m=128$,经检验 $(k,n)=(4,128)$ 是方程(1)的解。

(2)当 $\varphi(m)=2$ 时,可得 $m=3,4,6$,此时 $k-2=1$,则 $k=3$。因为 $(2,m)=1$,所以 $m=3$,从而 $n=$

$2^7m = 384$,经检验$(k, n) = (3, 384)$是方程(1)的解。

情况8 若$\beta = 8$,则式(4)有$q^6(q-1) \leqslant 144$,可得$q = 2$。

若$q = 2$,则式(4)有$128(k-2)\varphi(m) = 2S(2^{72}) = 152$,即$16(k-2)\varphi(m) = 19$。因为$16 \nmid 19$,所以方程(1)无解。

情况9 若$\beta = 9$,则式(4)有$q^7(q-1) \leqslant 162$,可得$q = 2$。

若$q = 2$,则式(4)有$256(k-2)\varphi(m) = 2S(2^{81}) = 168$,即$32(k-2)\varphi(m) = 21$。因为$32 \nmid 21$,所以方程(1)无解。

综上所述,定理证明完毕。

3 结束语

本文研究了方程$\varphi(n) + S(SL(n^l)) = k\varphi_2(n)$的可解性,得出当$l = 9$时,方程一共有35组正整数解。同时,此研究的方法还可以用来研究l为其他值时,方程$\varphi(n) + S(SL(n^l)) = k\varphi_2(n)$的正整数解。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2025. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

参 考 文 献

[1] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York:Springer-Verlag, 1976: 135-275.

[2] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 73-175.

[3] 黄炜, 刘龙展. 关于Smarandache *kn*数列及其与Smarandache LCM函数的混合均值[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2023, 44(6): 12-15. DOI: 10.19789/j.1004-9398.2023.06.003.
Huang Wei, Liu Longzhan. Smarandache *kn*-digital sequence and it's asymptotic properties of Smarandache LCM function [J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition), 2023, 44(6): 12-15.

[4] Chen B. An equation involving the Smarandache function[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 204/205/206/207/208: 4785-4788. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.204-208.4785.

[5] 高丽, 赵祈芬. 一类包含伪Smarandache函数与欧拉函数的方程[J]. 河南科学, 2017, 35(2): 180-183.
Gao Li, Zhao Qifen. An equation involving the pseudo-Smarandache function and Euler function [J]. Henan Science, 2017, 35(2): 180-183.

[6] 张四保. 数论函数方程$\varphi_2(N) = S(N^{16})$的可解性[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2020, 34(7): 249-254. DOI: 10.3969/j.issn.1674-8425(z). 2020.07.035.
Zhang Sibao. The solvability of arithmetic function equation $\varphi_2(N) = S(N^{16})$[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2020, 34(7): 249-254.

[7] 梁晓艳, 高丽, 高倩. 数论函数方程$Z(n^2) = \varphi_e^2(n)(e = 1, 2)$解的探讨[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2020, 40(6): 35-38. DOI: 10.7699/j.ynnu. ns-2020-078.
Liang Xiaoyan, Gao Li, Gao Qian. Solvability of $Z(n^2) = \varphi_e^2(n)(e = 1, 2)$ Function Equations[J]. Journal of Yunnan Normal University (Natural Sciences Edition), 2020, 40(6): 35-38.

[8] 张四保. 数论函数方程$\varphi_2(n) = S(SL(n^k))$的可解性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(4): 65-69. DOI:10.13718/j.cnki. xdzk.2020.04.008.
Zhang Sibao. The solvability of arithmetic function equation $\varphi_2(n) = S(SL(n^k))$[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2020, 42(4): 65-69.

[9] 杜珊, 廖群英, 王慧莉. 方程$Z(SL(n)) = \varphi_e(n)$的正整数解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2023, 46(1): 21-26. DOI: 10.3969/j. issn. 1001-8395.2023.01.003.
Du Shan, Liao Qunying, Wang Huili. The positive integral solutions for the equation $Z(SL(n)) = \varphi_e(n)$ [J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2023, 46(1): 21-26.

[10] 朱杰, 廖群英. 方程$Z(n) = \varphi_e(\mathrm{SL}(n))$的可解性[J]. 数学进展, 2019, 48(5): 541-554. DOI: 10.11845/sxjz.2018064b.
Zhu Jie, Liao Qunying. The solvability of the equation $Z(n) = \varphi_e(\mathrm{SL}(n))$[J]. Advances in Mathematics (CHINA), 2019, 48(5): 541-554.

[11] 张四保. 包含两个广义Euler函数的一个方程的解[J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(2): 189-201. DOI: 10.13413/j.cnki. jdxblxb.2021182.
Zhang Sibao. Solutions of an equation involving two generalized euler functions [J]. Journal of Jilin University(Science Edition), 2022, 60(2): 189-201.

[12] 朱山山，瞿云云，周建华，等. 数论函数方程$t\varphi(n)+\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$的正整数解[J]. 贵州师范大学学报（自然科学版），2023，41(2)：80-85，120. DOI：10.16614/j.gznuj. zrb.2023.02.011.
Zhu Shanshan，Zai Yunyun，Zhou Jianhua，at al . The positive integer solutions of arithmetic functione quation $t\varphi(n)+\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$[J]. Journal of Guizhou Normal University（Natural Sciences），2023，41(2)：80-85，120.

[13] 张四保，姜莲霞. 数论函数方程$k\varphi(Y)=\varphi_2(Y)+S(Y^8)$的解[J]. 江西师范大学学报（自然科学版），2021，45(2)：194-197. DOI：10.16357/j.cnki. issn1000-5862.2021.02.13.
Zhang Sibao，Jiang Lianxia. The solutions of Arithmetic function equation $k\varphi(Y)=\varphi_2(Y)+S(Y^8)$[J]. Journal of Jiangxi Normal University（Natural Science Edition），2021，45(2)：194-197.

[14] 郑惠. 数论函数方程$m\varphi(n)=\varphi_2(n)+S(n^{10})$的解[J]. 江西科学，2022，40(2)：219-222. DOI：10.13990/j.issn1001-3679.2022.02.003.
Zheng Hui. Positive integer of solutions to ternary Euler function equation $m\varphi(n)=\varphi_2(n)+S(n^{10})$[J]. Jiangxi Science，2022，40(2)：219-222.

[15] 姜莲霞，杨振志. 数论函数方程$k\varphi(n)=7\varphi_2(n)+S(n^{13})$的正整数解[J]. 喀什大学学报，2023，44(3)：18-21. DOI：10.13933/j.cnki.2096-2134.2023.03.004.
Jiang Lianxia，Yang Zhenzhi. The positive integer solutions of arithmetic function equation $k\varphi(n)=7\varphi_2(n)+S(n^{13})$[J]. Journal of Kashi University，2023，44(3)：18-21.

[16] 李昌吉. 数论函数方程$2\varphi(n)=\varphi_2(n)+S(n^{25})$的正整数解[J]. 南宁师范大学学报（自然科学版），2019，36(4)：35-39. DOI：10.16601/j. cnki. issn2096-7330.2019.04.006.
Li Changji. The positive integer solutions of the arithmetic function equation $2\varphi(n)=\varphi_2(n)+S(n^{25})$[J]. Journal of Nanning Normal University（Natural Science Edition），2019，36(4)：35-39.

[17] 牛家星，高丽. 数论函数方程$\varphi_8(n)=\frac{n}{d}$的可解性[J]. 首都师范大学学报（自然科学版），2025，46(3)：16-23. DOI：10.19789/j.1004-9398.2025.03.003.
Niu Jiaxing，Gao Li. Solvability of the number theoretic functional equation $\varphi_8(n)=\frac{n}{d}$[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2025，46(3)：16-23.

[18] 高丽. 数论函数方程$k\varphi_2(n(n+1))+\varphi(n)=2S(SL(n^{11}))$的可解性[J]. 贵州大学学报（自然科学版），2025，42(3)：20-25. DOI：10.15958/j.cnki. gdxbzrb.2025.03.03.
Gao Li. The solvability of arithmetic function equation $k\varphi_2(n(n+1))+\varphi(n)=2S(SL(n^{11}))$[J]. Journal of Guizhou University（Natural Sciences），2025，42(3)：20-25.

[19] 戴妍百，高丽. 三元变系数Euler函数非线性方程的正整数解[J]. 西南师范大学学报（自然科学版），2023，48(4)：32-36. DOI：10.13718/j.cnki. xsxb.2023.04.004.
Dai Yanbai，Gao Li. Positive integer solutions of nonlinear equations of ternary variable coefficients Euler functions[J]. Journal of Southwest Normal University（Natural Sciences），2023，48(4)：32-36.

[20] 周建华，瞿云云，朱山山，等. 数论函数方程$t\varphi_2(n(n+1))=S(SL(n^{17}))$的可解性[J]. 贵州师范大学学报（自然科学版），2022，40(6)：33-37. DOI：10.16614/j.gznuj. zrb.2022.06.004.
Zhou Jianhua，Zai Yunyun，Zhu Shanshan，at al . The solvability of the arithmetic function equation $t\varphi_2(n(n+1))=S(SL(n^{17}))$[J]. Journal of Guizhou Normal University（Natural Sciences），2022，40(6)：33-37.

[21] 姜莲霞. 关于方程$SL(n)=\varphi_e(n)$的可解性[J]. 淮北师范大学学报（自然科学版），2023，44(3)：11-15. DOI：10.3969/j.issn.2096-8248.2023.03.003.
Jiang Lianxia. The solvability of the equation $SL(n)=\varphi_e(n)$[J]. Journal of Huaibei Normal University（Natural Sciences），2023，44(3)：11-15.

（责任编辑：马田田）