DOI:10.19789/j.1004-9398.2026.03.009 **Open Access**
文献引用:冯瑞龙,韩明君,汪卫东.超音速碳纳米管增强梁的颤振特性分析[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(3):93-104. FENG R L, HAN M J, WANG W D. Analysis of flutter characteristics of supersonic carbon nanotube-reinforced beams[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2026,47(3):93-104.

超音速碳纳米管增强梁的颤振特性分析

冯瑞龙，韩明君*，汪卫东

（兰州理工大学理学院，甘肃 兰州 730050）

摘要:基于Von-Kármán变形理论及气动力活塞理论,建立功能梯度碳纳米管增强复合材料(FG-CNTRC)梁的颤振模型,利用哈密顿原理推导FG-CNTRC梁的控制方程,使用Galerkin法,对控制方程进行离散,将其转化为非线性微分方程,再利用Hurwitz行列式对非线性方程进行求解,将根作为Hopf分岔的判定。考虑3种不同的碳纳米管(CNT)分布模式,对不同参数FG-CNTRC梁进行稳定性分析,得到不同参数FG-CNTRC梁的静气动弹性变形曲线,分析梁的长宽比对无量纲临界流速和无量纲临界动压的影响,并通过数值计算得到不同参数下时间历程、相位及Poincare映射图对其进行验证。

关键词:碳纳米管;颤振;功能梯度梁;Poincare映射图
中图分类号:O351 **文献标志码**:A

Analysis of flutter characteristics of supersonic carbon nanotube-reinforced beams

FENG Ruilong, HAN Mingjun*, WANG Weidong

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu 730050)

Abstract: Based on the Von-Kármán deformation theory and the aerodynamic piston theory, the flutter model of functionally graded carbon nanotube reinforced composite (FG-CNTRC) beams was established. The governing equation of FG-CNTRC beams was derived by Hamiltonian principle, and the governing equation was discretized by using the Galerkin method, and the nonlinear differential equation was transformed into a nonlinear differential equation. The Hurwitz determinant was used to solve the nonlinear equation, and the root was used as the determination of Hopf bifurcation. Considering three different carbon nanotube distribution modes, the stability analysis of the FG-CNTRC beams with different parameters was carried out, the hydrostatic and aeroelastic deformation curves of the FG-CNTRC beam with different parameters were obtained. The influence of the aspect ratio of the beam on the dimensionless critical flow velocity and dimensionless critical dynamic pressure was analyzed, and the time history diagram, phase diagram and Poincare map under different parameters were verified by numerical calculation.

Keywords: carbon nanotube; flutter; functional gradient beams; Poincare mapping
CLC: O351 **DC**: A

收稿日期:2024-11-16
*通信作者:hanmj5188@163.com

0 引 言

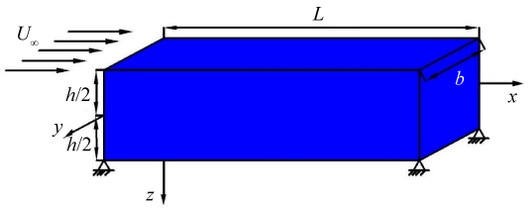
功能梯度材料因其优异的性能广泛地应用于各个领域,大量的飞行器结构就使用功能梯度材料。飞行器结构不仅需要承受复杂的外部环境,如高温、高速气流及剧烈的气动载荷等,同时还要满足质量、刚度和强度等方面的要求。飞行器在复杂的外部环境中还会面临可能发生的颤振问题[1],碳纳米管(carbon nanotube,CNT)在复合材料领域中的引入,为复合材料的发展提供另一种可能性。CNT优异的性能如高强度和高模量,被广泛认为是制造航空航天部件的理想材料。其可以显著提高金属基复合材料的比强度和耐磨性,这对于制造航天飞机部件和喷气发动机部件至关重要。因此,研究CNT增强复合材料的颤振问题非常有必要。

自20世纪90年代CNT被发现以来[2-3],迅速吸引了科研界的广泛关注。CNT不仅有着优异的力学强度、电导性和热导性,还展现出独特的化学稳定性和可调谐的光学性质,由于其非凡的力学性能,CNT被认为是复合材料的理想增强材料[4]。许多学者对功能梯度碳纳米管增强复合材料(functionally graded carbon nanotube reinforced composite,FG-CNTRC)结构的弯曲、屈曲和振动行为进行了研究:Wuite和Adali[5]为观察CNT在梁等结构上的增强效果,对CNT增强复合材料梁的挠度和应力行为进行分析,研究表明,在基体材料中加入少量的CNT能够使梁的刚度大幅提升;Yas和Samadi[6]针对弹性基底上单壁CNT增强Ti-moshenko梁的自由振动与弯曲力学行为开展数值仿真分析,计算结果显示,CNT的分布和体积分数对CNT增强复合材料梁的固有频率和临界屈曲载荷有显著影响,且与其他分布形式相比,FG-X分布的梁具有更高的基频和临界屈曲载荷;Shen和Xiang[7]探究热环境下单壁CNT梁的大振幅振动、非线性弯曲与热屈曲响应,研究结果表明:CNT体积分数可显著调控结构荷载-挠度变化曲线,但其对复合材料非线性与线性频率比值、热屈曲荷载-挠度曲线的影响程度较弱;Arani等[8]使用解析方法和有限元方法对单壁CNT增强的层压复合板进行了屈曲分析,研究显示,CNT在聚合物基体中的不均匀分散会降低临界屈曲载荷。壁板颤振的研究起源于20世纪50年代,有些学者对壁板颤振分析模型进行了分类研究:Dowell[9]在前人基础上,基于线性活塞理论和线化势流理论将壁板颤振分析模型分为4类,但其只适用于马赫数<5的情况;Carl和Chuh[10]基于非线性活塞理论将壁板颤振分析模型拓展至第5类,补充了马赫数>5时壁板颤振分析模型的空白;张桂玮等[11]采用地面颤振模拟实验对飞行器颤振特性在地面上进行模拟,对颤振模拟实验的研究现状进行了概述,并对未来的研究方向进行了预测;韩明君等[12]分析超声速气流中梯度多孔壁板的非线性颤振演化规律,结果表明,孔隙占比提升能够有效减小壁板产生颤振无量纲临界动压;杨智春等[13]基于Von-Kármán变形理论和气动力活塞理论分析了曲率对复合材料曲壁板颤振特性的影响规律,随着初始几何曲率指数的增大,曲壁板的临界动压先降低随后出现复杂的变化;Asadi和Wang[14]对FG-CNTRC梁在轴向压缩力与超音速气流耦合作用下的气动弹性颤振特性进行了研究,探究了边界条件、几何参数、体积分数以及CNT和马赫数的分布对材料稳定性和变形的影响,研究表明,CNT体积分数对FG-CNTRC梁的稳定性边界有显著影响,增加CNT体积分数会增大颤振模态的频率。

国内外对壁板颤振的研究很多,但对CNT增强复合材料颤振的研究分析较少,本文基于Von-Kármán变形理论和气动力活塞理论建立了FG-CNTRC的颤振模型,对3种不同CNT分布模式下的FG-CNTRC梁进行颤振特性分析,得到相应的临界值,并通过数值计算,得到不同参数下对应的时间历程、相位和Poincare映射图对其进一步验证。

1 建立模型

建立一个长度为L,宽为b,高为h的FG-CNTRC梁模型,两端简支(图1)。在FG-CNTRC梁表面存在沿x方向、流速为U_∞的超声速流。本文探究CNT的3种分布模式,分别为均匀分布与2种功能分级分布模式:均匀分布(uniform distribution,UD)指在厚度Z方向上,CNT呈均匀分散状态;2种功能分级分布模式分别是功能梯度X型分布(functionally graded-X distribution,FGX)和功能梯度O型分布(functionally graded-O distribution,FGO);FGX分布的特点为从梁的顶部与底部向梁的中面CNT的含量逐渐减少;FGO分布则表现为从梁的中面向两端CNT的含量逐渐降低。



注:L、b、h分别为梁长、宽、高;U_∞为流速。

图1　功能梯度碳纳米管增强复合材料(FG-CNTRC)梁模型

Figure 1　beam model of functionally graded carbon nanotube-reinforced composites(FG-CNTRC)

CNT在梁中的3种分布模式如图2(a)所示,图2(b)为3种CNT分布模式下对应梁x轴方向的截面。

每种分布情况下的体积分数表达式为[6]:

$$V_{\mathrm{CN}}=\begin{cases}V_{\mathrm{CN}}^{*}, & \mathrm{UD}, \quad (1\text{-}1)\\ 2V_{\mathrm{CN}}^{*}\left(1-2\dfrac{|z|}{h}\right), & \mathrm{FGX}, \quad (1\text{-}2)\\ 4V_{\mathrm{CN}}^{*}\left(\dfrac{|z|}{h}\right), & \mathrm{FGO}, \quad (1\text{-}3)\end{cases}$$

式中:V_{CN}^{*}为CNT的体积分数,$V_{\mathrm{CN}}^{*}=\dfrac{\omega_{\mathrm{CN}}}{\omega_{\mathrm{CN}}+(\rho^{\mathrm{CN}}/\rho^{\mathrm{m}})-(\rho^{\mathrm{CN}}/\rho^{\mathrm{m}})\omega_{\mathrm{CN}}}$;$\omega_{\mathrm{CN}}$为CNT的质量分数。

基于混合规则来计算复合材料的参数,其表达式为:

$$E=\eta_1 V_{\mathrm{CN}}E_{11}^{\mathrm{CN}}+V_{\mathrm{m}}E_{\mathrm{m}}, \quad (2\text{-}1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}}=\frac{V_{\mathrm{CN}}}{E_{22}^{\mathrm{CN}}}+\frac{V_{\mathrm{m}}}{E_{\mathrm{m}}}, \quad (2\text{-}2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}}=\frac{V_{\mathrm{CN}}}{G_{12}^{\mathrm{CN}}}+\frac{V_{\mathrm{m}}}{G_{\mathrm{m}}}, \quad (2\text{-}3)$$

$$\rho=\rho_{\mathrm{CN}}V_{\mathrm{CN}}+\rho_{\mathrm{m}}V_{\mathrm{m}}, \quad (2\text{-}4)$$

式中:V_{CN}和V_{m}分别为CNT和聚合物基体的体积分数,满足$V_{\mathrm{CN}}+V_{\mathrm{m}}=1$;$E$、$G$和$\rho$分别表示材料的杨氏模量、剪切模量及密度;$\eta_1$、$\eta_2$和$\eta_3$为与尺寸有关的材料性能。复合材料的泊松比为

$$r=V_{\mathrm{CN}}v_{\mathrm{CN}}+v_{\mathrm{m}}V_{\mathrm{m}}。 \quad (3)$$

2　方程推导

基于Von-Kármán变形理论,仅考虑FG-CNTRC梁的横向振动,u、v和w为沿梁x、y和z轴的位移,应变和位移间的关系可表示为:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4\text{-}1)$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}。 \quad (4\text{-}2)$$

假设FG-CNTRC梁的非线性变形不会对温度场产生影响,并且相较于梁的颤振响应,温度变化较为缓慢,因此在颤振分析中可以认为梁的温度场是定常的。由胡克定律得出应变为:

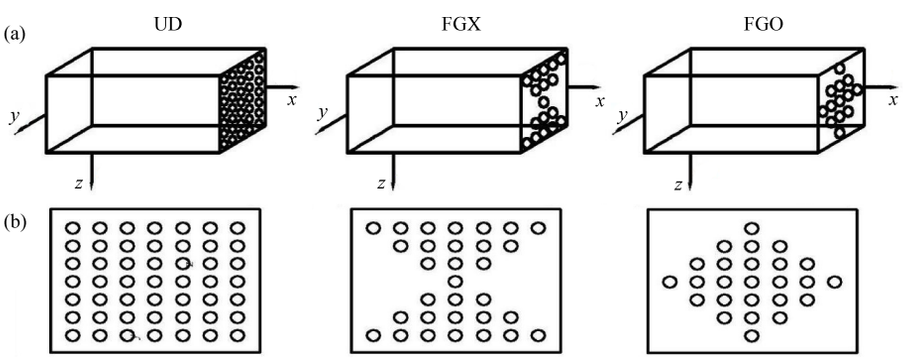
$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-v\sigma_y\right)+\alpha T, \quad (5\text{-}1)$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-v\sigma_x\right)+\alpha T, \quad (5\text{-}2)$$

式中:σ_x、σ_y分别表示梁在x、y方向上的应力;T表示温度;E、v和α分别为FG-CNTRC梁的弹性模量、泊松比和热膨胀系数。

对FG-CNTRC梁,略去ε_y的影响,代入各个参数,由式(4)和(5)得

$$\sigma_x=\frac{E}{1-[v]^2}\varepsilon_x-N_T, \quad (6)$$



注:UD表示CNT呈均匀分散状态;FGX表示从梁的两端向中面CNT含量逐渐减少;FGO表示从梁的中面向两端CNT含量逐渐减少。

图2　3种碳纳米管(CNT)分布模式

(a)3种CNT在梁中的分布模式;(b)FG-CNTRC梁x轴方向的截面

Figure 2　three carbon nanotube(CNT)distribution patterns

(a) three CNT distribution patterns in the beam;(b) cross-section of the FG-CNTRC beam along the x-axis direction

式中 $N_T=\dfrac{E}{1-v}\alpha T$,为温度应力。

非线性FG-CNTRC梁控制方程由Hamilton原理得出:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}=0, \tag{7-1}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\Delta q_{\mathrm{a}}=0, \tag{7-2}$$

式中:$I_1=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)\,\mathrm{d}z$;$\Delta q_{\mathrm{a}}$、$M_x$和$N_x$分别为气动力、弯矩和面内力,其表达式分别为:

$$\Delta q_{\mathrm{a}}=-\frac{2q_\infty}{\beta_0}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{M_\infty^2-2}{M_\infty^2-1}\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial w}{\partial t}\right), \tag{8}$$

$$N_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x\,\mathrm{d}z=A_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-N_T, \tag{9}$$

$$M_x=\int_{-h/2}^{h/2}z\sigma_x\,\mathrm{d}z=-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{10}$$

$$\left\{A_{11},\ D_{11}\right\}=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{11}(1,z^2)\,\mathrm{d}z, \tag{11}$$

式中A_{11}和D_{11}为梁的拉压刚度和弯曲刚度。

由于FG-GPLRC梁的边界为两端简支,其所对应的边界条件为$u\big|_{x=0,L}=0$,则式(7)采用位移形式可表示为:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{A_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-N_T\right\}=0, \tag{12}$$

$$-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left\{A_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-N_T\right\}-I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\Delta q_{\mathrm{a}}=0。 \tag{13}$$

对式(12)积分二次得

$$A_{11}\left[u+\frac{1}{2}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]-\int_L N_T\mathrm{d}x=B_1x+B_2, \tag{14}$$

代入边界条件得

$$B_1=\frac{A_{11}}{2L}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x-N_T,\ B_2=0, \tag{15}$$

将其代入式(13)得

$$-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left\{\frac{A_{11}}{2L}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x-N_T\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\Delta q_{\mathrm{a}}=0, \tag{16}$$

式中:$q_\infty=\rho_\infty U_\infty^2/2$为来流动压;$\beta_0=\sqrt{M_\infty^2-1}$为Prandtl-Glauert因子。

将式(16)进行无量纲化处理,引入无量纲参数$\bar{w}=\dfrac{w}{h}$、$\bar{x}=\dfrac{x}{L}$、$\tau=\dfrac{t}{T}$,其中,$\bar{w}'$、$\bar{w}''$和$\bar{w}^{(4)}$分别表示对x的1阶、2阶和4阶导数,$\dot{\bar{w}}$、$\ddot{\bar{w}}$表示对时间t的1阶和2阶导数,无量纲化结果为

$$\bar{w}^{(4)}-\left[e_1\int_0^1(\overline{w'})^2\,\mathrm{d}\bar{x}-R_T\right]\overline{w''}+e_2\ddot{\bar{w}}+p_1\bar{w}'+p_2\dot{\bar{w}}=0, \tag{17}$$

式中:$e_1=\dfrac{A_{11}}{2D_{11}}$;$R_T=\dfrac{N_TL^2}{D_{11}h^2}$;$e_2=\dfrac{I_1L^4}{D_{11}T^2}$;$T=L^2\sqrt{\dfrac{\rho h}{D_0}}$。

令$e_2=1$,得到气动刚度系数和气动阻尼系数分别为p_1和p_2,表达式为

$$p_1=\frac{L^3\rho_\infty U_\infty^2}{D_{11}\sqrt{M_\infty^2-1}},\ p_2=\frac{L^2\rho_\infty U_\infty(M_\infty^2-2)}{\sqrt{D_{11}I_1}\,(M_\infty^2-1)^{\frac{3}{2}}}。 \tag{18}$$

由FG-CNTRC梁两端简支的条件可知,在$x=1$,$x=0$处有

$$\bar{w}(0,\tau)=\bar{w}(1,\tau)=0,\ \frac{\partial^2\bar{w}(0,\tau)}{\partial\bar{x}^2}=\frac{\partial^2\bar{w}(1,\tau)}{\partial\bar{x}^2}=0。 \tag{19}$$

3 静态分岔和屈曲问题的求解

超音速气流中FG-CNTRC梁会受到气动热影响,导致FG-CNTRC梁产生静气动弹性变形。为研究FG-CNTRC梁变形,除去无量纲化控制方程(17)中的强迫项、阻尼项和时间相关项,用$\phi(\bar{x})$表示$\bar{w}(\bar{x},\tau)$,得到控制方程表达式为

$$\phi^{(4)}-\left[\frac{A_{11}h^2}{2D_{11}}\int_0^1(\phi')^2\,\mathrm{d}\bar{x}-\frac{N_TL^2}{D_{11}}\right]\phi''=0。 \tag{20}$$

此时FG-CNTRC梁边界条件可表示为

$$\phi\big|_{x=0,1}=0,\ \phi''\big|_{x=0,1}=0。 \tag{21}$$

令 $Q=\dfrac{N_TL^2}{D_{11}}$,$\Gamma=\dfrac{A_{11}h^2}{2D_{11}}\int_0^1(\Phi')^2\,\mathrm{d}\bar{x}$,$\lambda^2=Q-\Gamma=\dfrac{N_TL^2}{D_{11}}-\dfrac{A_{11}h^2}{2D_{11}}\int_0^1(\phi')^2\,\mathrm{d}\bar{x}$,$\lambda$为无量纲临界屈曲载荷的特征值,代入式(21)得

$$\phi^{(4)}+\lambda^2\phi''=0, \tag{22}$$

得到方程通解为

$$\phi(\bar{x})=c_1\sin(\lambda\bar{x})+c_2\cos(\lambda\bar{x})+c_3\bar{x}+c_4, \tag{23}$$

将式(23)代入FG-CNTRC梁边界条件式(21)得

$$\begin{cases}c_2+c_4=0, & (24\text{-}1)\\ c_1\sin\lambda+c_2\cos\lambda+c_3+c_4=0, & (24\text{-}2)\\ \lambda^2c_2=0, & (24\text{-}3)\\ \lambda^2c_2\cos\lambda+\lambda^2c_1\sin\lambda=0。 & (24\text{-}4)\end{cases}$$

式(23)中$\phi(\bar{x})$具有非零解的充要条件是方程(24)的系数行列式为0,得到方程解为

$$c\sin\lambda=0\text{或}\lambda=m\pi(m=1,2,3,\cdots), \tag{25}$$

取$\lambda = m\pi(m = 1, 2, 3, \cdots)$作为特征值,得到屈曲构型为$\phi(x) = c\sin(m\pi\bar{x})$,将其代入表达式$\lambda^2 = Q - \Gamma = \frac{N_T L^2}{D_{11}} - \frac{A_{11}h^2}{2D_{11}}\int_0^1(\phi')^2\,\mathrm{d}\bar{x}$得

$$\phi = \pm\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{4D_{11}(Q-\lambda^2)}{A_{11}h^2}}\sin(\lambda\bar{x})。\tag{26}$$

为探究气动热对FG-CNTRC梁的影响,本文采用数值算例对其进行分析,取参数E_m = 2.5 GPa, E_{CN} = 600.0 GPa, ρ_{CN} = 1 400.000 kg/m^3, ρ_m = 1 190.000 kg/m^3, v_m = 0.34, v_{CN} = 0.19, G_{12} = 17.2 GPa, $\alpha_m = 45.0\times10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$, h = 0.005 m, L = 0.300 m。取CNT体积分数V_{CN}分别为0.12、0.17和0.28,与之对应的尺寸有关的材料性能参数为:V_{CN} = 0.12时,η_1 = 1.283 3,η_2 = 1.055 6,η_3 = 1.055 6;V_{CN} = 0.17时,η_1 = 1.341 4,η_2 = 1.710 1,η_3 = 1.710 1;V_{CN} = 0.28时,η_1 = 1.323 8,η_2 = 1.738 0,η_3 = 1.738 0[14]。

系统不同分布模式及不同体积分数下屈曲构型分岔值如表1所示。在相同温度下,3种CNT分布模式均会增加材料的临界屈曲载荷值,且CNT的体积分数越大,对材料的增强效果越明显;在相同体积分数下,FGX分布模式为最优模式,其次为FGO分布模式,UD分布模式为3种分布模式里最差的分布模式。

V_{CN} = 0.12时,不同CNT分布模式下的屈曲构型分岔如图3所示。图中Q_1、Q_2与Q_3分别表示梁的1阶、2阶和3阶临界屈曲载荷,即:$Q = Q_1$时,到达1阶屈曲的临界点,发生1阶屈曲;$Q = Q_2$时,到达2阶屈曲临界点,发生2阶屈曲;$Q = Q_3$时,到达3阶屈曲临界点,发生3阶屈曲。

表1　不同分布模式及不同体积分数下屈曲构型分岔值

Table 1　bifurcation values of buckling configurations under different distribution patterns and volume fractions

V_{CN}	分布模式	1阶临界屈曲载荷	2阶临界屈曲载荷	3阶临界屈曲载荷
V_{CN} = 0	—	30.130 9	129.132 2	288.395 3
V_{CN} = 0.12	UD	33.638 7	134.554 7	302.748 1
	FGX	38.867 8	155.471 1	349.810 0
	FGO	38.860 9	155.443 9	349.748 7
V_{CN} = 0.17	UD	36.154 4	144.614 8	325.390 0
	FGX	43.897 2	175.588 7	395.074 6
	FGO	43.887 0	175.547 8	394.982 6
V_{CN} = 0.28	UD	40.996 9	163.987 6	368.972 1
	FGX	53.578 6	214.314 2	482.206 9
	FGO	53.562 6	214.250 6	482.063 8

注:—表示未加碳纳米管。

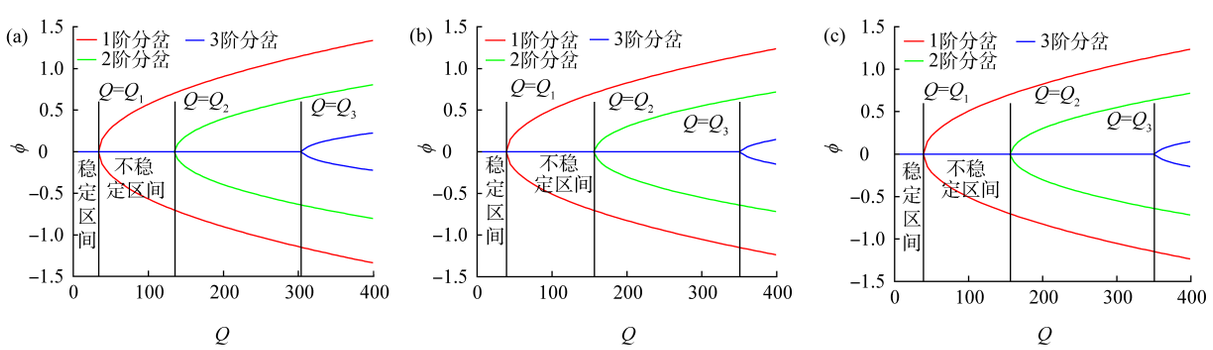
FGX分布模式下,不同体积分数的屈曲构型分岔如图4所示。图4(a~d)分别表示CNT体积分数V_{CN}为0、0.12、0.17和0.28时的屈曲构型分岔,图中Q_1、Q_2与Q_3分别表示梁的1阶、2阶和3阶临界屈曲载荷。

由图3和4可知:在热应力$Q < Q_1$时,材料处于稳定状态,当$Q = Q_1$时,材料开始发生1阶屈曲;当$Q = Q_2$时,材料开始发生2阶屈曲,即当$Q < Q_2$时,材料处于1阶屈曲状态,此时材料存在静平衡构型、1阶屈曲构型2种构型;$Q = Q_3$时,材料发生3阶屈曲,此时存在3种构型,当$Q > Q_3$时,材料存在静平衡构型、1阶屈曲构型、2阶屈曲构型与3阶屈曲构型4种构型。

4　Galerkin法求解振动问题

4.1　非线性常微分方程组的处理

简支边界位移函数表示为正弦函数的线性组合



注:Q为壁板屈曲载荷;Φ为壁板屈曲构型。

图3　不同分布模式下的屈曲构型分岔

(a)UD分布;(b)FGX分布;(c)FGO分布

Figure 3　buckling configuration bifurcations under different distribution patterns

(a) UD distribution;(b) FGX distribution;(c) FGO distribution

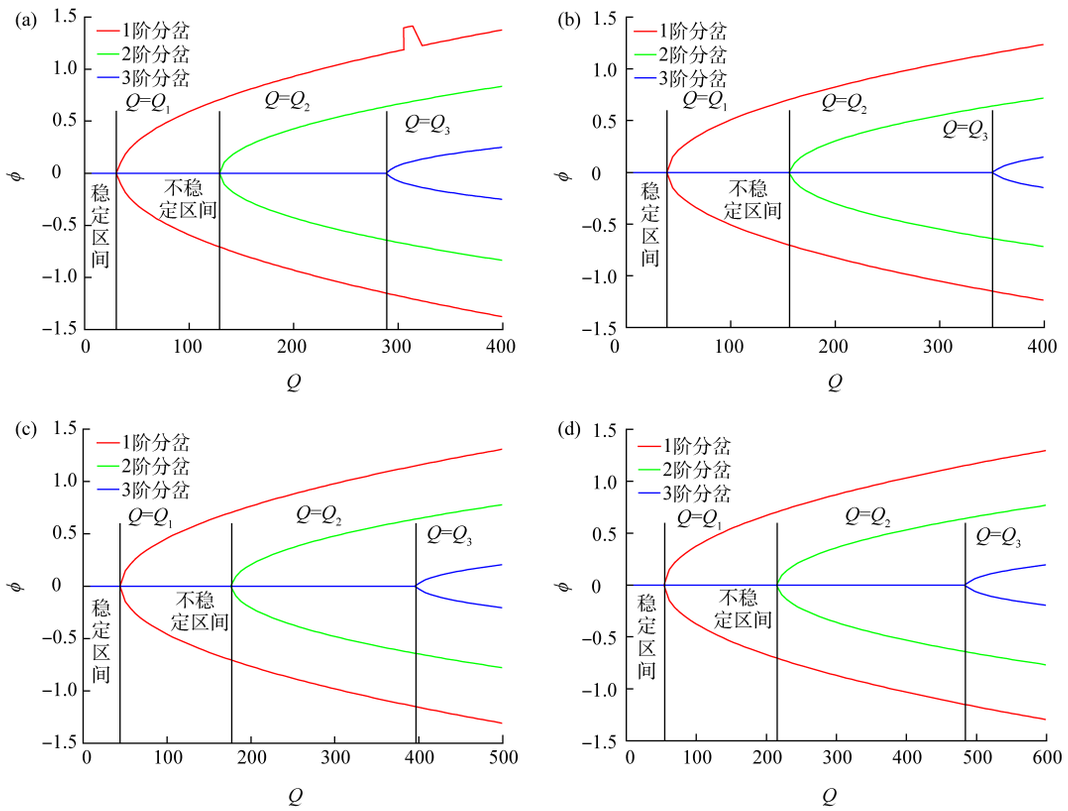


图4　不同体积分数的屈曲构型分岔

(a)$V_{CN}=0$;(b)$V_{CN}=0.12$;(c)$V_{CN}=0.17$;(d)$V_{CN}=0.28$

Figure 4　buckling configuration bifurcations under different volume fractions

(a)$V_{CN}=0$;(b)$V_{CN}=0.12$;(c)$V_{CN}=0.17$;(d)$V_{CN}=0.28$

$$\bar{w}(\bar{x},t)=\sum_{i}^{n}q_i(\tau)\sin(i\pi\bar{x}),\tag{27}$$

取2阶Galerkin截断方程，则 $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}q_1(\tau)\\q_2(\tau)\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1(\bar{x})\\\varphi_2(\bar{x})\end{pmatrix}$，$\bar{w}(\bar{x},\tau)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}$，代入式(17)得

$$[\boldsymbol{\varphi}^4]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}-[e_1\int_0^1([\boldsymbol{\varphi}']^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q})^2\mathrm{d}\bar{x}-R_T][\boldsymbol{\varphi}'']^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+e_2\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{q}}+p_1[\boldsymbol{\varphi}']^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+p_2\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}=0。\tag{28}$$

式(28)等号左右两端各项左乘 $\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1(\bar{x})\\\varphi_2(\bar{x})\end{pmatrix}$，且在气动弦长[0,1]上积分得：

$$e_2\begin{pmatrix}\ddot{q}_1\\\ddot{q}_2\end{pmatrix}+p_2\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\pi^4-R_T\pi^2 & -\frac{8}{3}p_1\\ \frac{8}{3}p_1 & 16\pi^4-4R_T\pi^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}+e_1\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=0,\tag{29}$$

$$\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\pi^4q_1^3+2\pi^4q_1q_2^2\\2\pi^4q_1^2q_2+8\pi^4q_2^3\end{pmatrix}。\tag{30}$$

令 $\dot{q}_1=q_3$，$\dot{q}_2=q_4$，则 $\ddot{q}_1=\dot{q}_3$，$\ddot{q}_2=\dot{q}_4$。控制方程化为四维1阶非线性常微分方程组

$$\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\dot{q}_3\\\dot{q}_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}_A\times\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{e_1}{e_2}(1/2\pi^4q_1^3+2\pi^4q_1q_2^2)\\\frac{e_1}{e_2}(2\pi^4q_1^2q_2+8\pi^4q_2^3)\end{pmatrix},\tag{31}$$

式中

$$\boldsymbol{J}_A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\-\frac{\pi^4-R_T\pi^2}{e_2} & \frac{8}{3e_2}p_1 & -\frac{1}{e_2}p_2 & 0\\-\frac{8}{3e_2}p_1 & -\frac{16\pi^4-4R_T\pi^2}{e_2} & 0 & -\frac{1}{e_2}p_2\end{pmatrix}。\tag{32}$$

将Hopf分岔化为非线性方程求根问题[15-16]。令式(31)的一个平衡点为 $X_0(0,0,0,0)$，平衡点处Jacobi矩阵为 $\boldsymbol{J}_A$，对应特征方程为 $\det(\boldsymbol{J}_A-\chi\boldsymbol{I})=0$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，展开得

$$\begin{vmatrix} -\chi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\chi & 0 & 1 \\ -\dfrac{\pi^4 - R_T\pi^2}{e_2} & \dfrac{8}{3e_2}P_1 & -\dfrac{1}{e_2}P_2 - \chi & 0 \\ -\dfrac{8}{3e_2}P_1 & -\dfrac{16\pi^4 - 4R_T\pi^2}{e_2} & 0 & -\dfrac{1}{e_2}P_2 - \chi \end{vmatrix} = 0, \tag{33}$$

将式(33)展开得

$$a_0\chi^4 + a_1\chi^3 + a_2\chi^2 + a_3\chi + a_4 = 0, \tag{34}$$

式(34)中各个对应系数为:

$$a_0 = 1, \tag{35-1}$$

$$a_1 = \frac{2p_2}{e_2}, \tag{35-2}$$

$$a_2 = \frac{17\pi^4 e_2 - 5\pi^2 e_2 R_T + p_2^2}{e_2^2}, \tag{35-3}$$

$$a_3 = \frac{(17\pi^4 - 5\pi^2 R_T)p_2}{e_2^2}, \tag{35-4}$$

$$a_4 = \frac{16\pi^8 - 20\pi^6 R_T + 4\pi^4 R_T^2}{e_2^2} + \frac{64p_1^2}{9e_2^2}。 \tag{35-5}$$

各阶Hurwitz行列式为:

$$\Delta_1 = a_1, \tag{36-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3, \tag{36-2}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2。 \tag{36-3}$$

当$M_\infty >> 0$,$\sqrt{M_\infty^2 - 1} = M_\infty$,代入式(18),则

$$p_1^2 = \frac{L^6\rho_\infty^2 U_\infty^4}{D_{11}^2 M_\infty^{\ 2}}, p_2^2 = \frac{L^4\rho_\infty^2 U_\infty^2}{I_1 D_{11} M_\infty^2}。 \tag{37}$$

由$\Delta_3 = 0$,可知无量纲临界流速为

$$U_{\mathrm{cr}}^2 = \frac{9}{256}\frac{D_{11}}{I_1 L^2}\left(\frac{17\pi^4 - 5\pi^2 R_T}{e_2}\right) + \frac{9}{256}\frac{\pi^2 D_{11} M_\infty}{\rho_\infty L^3}N, \tag{38}$$

式(38)中$N = \sqrt{\dfrac{\rho_\infty^2 L^2}{\left(I_1 M_\infty\right)^2}\left(\dfrac{17\pi^2 - 5R_T}{e_2}\right)^2 + (80\pi^2 - 16R_T)^2}$。

当$p_1 = p_{1\mathrm{cr}}$时,式(23)有1对纯虚根$\pm\mathrm{i}\omega$,得到无量纲临界频率为

$$\omega^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}a_4。 \tag{39}$$

令$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,$\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^{\mathrm{T}}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征根$\mathrm{i}\omega$的左特征向量和右特征向量。由$\boldsymbol{XA} = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AY} = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{XA} = 1$得:

$$\boldsymbol{X} = e_3\begin{pmatrix} \dfrac{3e_2}{8p_1}\left[\left(\dfrac{16\pi^4 - 4R_T\pi^2}{e_2}\right)\left(\mathrm{i}\omega + \dfrac{p_2}{e_2}\right) + \mathrm{i}\omega\left(\mathrm{i}\omega + \dfrac{p_2}{e_2}\right)^2\right] \\ \mathrm{i}\omega + \dfrac{p_2}{e_2} \\ \dfrac{3e_2}{8p_1}\left[\left(\dfrac{16\pi^4 - 4R_T\pi^2}{e_2}\right) + \mathrm{i}\omega\left(\mathrm{i}\omega + \dfrac{p_2}{e_2}\right)\right] \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3e_2}{8p_1}\left[\left(\dfrac{\pi^4 - R_T\pi^2}{e_2}\right) - \left(\omega^2 + \dfrac{\mathrm{i}\omega p_2}{e_2}\right)\right] \\ i\omega \\ \dfrac{3e_2}{8p_1}\left[\mathrm{i}\omega\left(\dfrac{\pi^4 - R_T\pi^2}{e_2}\right) - \left(\mathrm{i}\omega^3 + \omega^2\dfrac{p_2}{e_2}\right)\right] \end{pmatrix}, \tag{41}$$

式中

$$e_3 = \frac{8p_1e_2}{3\mathrm{i}\omega(33\pi^4e_2 + \pi^4 - 9\pi^2e_2R_T - \pi^2R_T - 3\omega^2e_2^2 - \omega^2e_2)} + \frac{8p_1e_2}{3p_2\left(17\pi^4 - 5\pi^2R_T - \left(5e_2 + 1\right)\omega^2\right) + 6\mathrm{i}\omega p_2^2}。$$

由$B = \left.\dfrac{\mathrm{d}A(p_1)}{\mathrm{d}p_1}\right|_{p_1 = p_{1\mathrm{cr}}}$可知,在$p_1 = p_{1\mathrm{cr}}$处发生Hopf分岔。

在参数$p_1 = p_{1\mathrm{cr}} = \dfrac{L^3\rho_\infty}{D_{11}M_\infty}U_{\mathrm{cr}}^2$附近,纯虚根$\mathrm{i}\omega$可写为

$$\zeta_{1,2}(p_1) = \alpha(p_1) \pm \mathrm{i}\omega(p_1), \tag{42}$$

式中$\alpha(p_1) = 0$, $\omega(p_1) > 0$,则$X(p_1)A(p_1)Y(p_1) = \alpha(p_1) \pm \mathrm{i}\omega(p_1)$,得到

$$\alpha'(p_1) = \mathrm{Re}\left(X(p_{1\mathrm{cr}})A(p_{1\mathrm{cr}})Y(p_{1\mathrm{cr}})\right)。$$

计算得到,$\alpha'(p_1)$在$p_1 = p_{1\mathrm{cr}} = \dfrac{L^3\rho_\infty}{D_{11}M_\infty}U_{\mathrm{cr}}^2 \neq 0$发生Hopf分岔,且满足:

$$\begin{aligned} &a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0, \\ &\Delta_{n-1} = 0, \Delta_i > 0, (i = n - 3, n - 5, \cdots), \end{aligned} \tag{43}$$

即FG-CNTRC梁满足式(43)条件时,发生Hopf分岔,即FG-CNTRC梁在$U = U_{\mathrm{cr}}$时发生颤振。

4.2　数值算例

引用参考文献[17]中参数,假设飞行器的飞行高度为11 km,此时空气密度为0.364 kg/m^3,马赫数为5。采用数值算例计算,参数$E_{\mathrm{m}} = 2.5$ GPa,$E_{\mathrm{CN}} = 600.0$ GPa,$\rho_{\mathrm{CN}} = 1\,400.000$ kg/m^3,$\rho_{\mathrm{m}} = 1\,190.000$ kg/m^3,$v_{\mathrm{m}} = 0.34$,$v_{\mathrm{CN}} = 0.19$,$G_{12} = 17.2$ GPa,$\alpha_{\mathrm{m}} = 45.0 \times 10^{-6}$ K^{-1},

h = 0.005 m,L = 0.300 m。

将FG-CNTRC梁退化为未被CNT增强的材料,得到如表2所示数据。

表2　数据退化对照

Table 2　comparison of data degradation

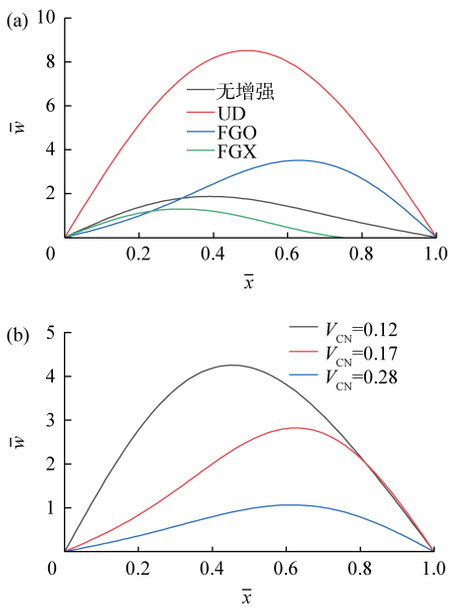
数据验证	Δ_1	Δ_2	D_{11}	U_{cr}	p_{1cr}	ω
文献数据[17]	2.51	1 645.57	57.55	1 219.02	234.99	25.56
本文数据	2.50	1 622.47	57.55	1 216.24	233.03	24.66

注:Δ_1和Δ_2为Hurwitz行列式;D_{11}为弯曲刚度;U_{cr}、p_{1cr}、ω分别为无量纲临界流速、动压、频率。

热载荷与静气动载荷耦合会使FG-CNTRC梁产生与时间无关的静气动弹性变形。为分析该变形沿气动弦长的分布特征,令$\left(\dot{q}_1\ \dot{q}_2\ \dot{q}_3\ \dot{q}_4\right)^{\mathrm{T}}=0$,构建非线性方程组;对方程组求解得到系统模态幅值$q_1$和$q_2$,将幅值结果代入式(27),即可计算出对应的静气动弹性变形。

作用下发生静气动弹性变形,且该变形和时间无关。为研究静气动弹性变形沿气动弦长的变化规律,令,得到一个非线性方程组,求解方程组得到系统的模态幅值q_1和q_2,将模态幅值代入式(27),可以求得系统的静气动弹性变形。

FG-CNTRC梁的静气动弹性变形如图5所示。不同的CNT分布模式和质量分数对FG-CNTRC梁在静气动载荷与热载荷耦合作用下产生的静气动变形影响不同。图5(a)为V_{CN} = 0.28时CNT分布模式对静气动弹性变形的影响,对于FG-CNTRC梁的静气动变形,FGX分布模式依旧为最优分布;由于UD分布为均匀分布,在相同的CNT体积分数下,静气动弹性变形曲线的对称轴最靠近$\bar{x}$ = 0.5处。在受到相同压力时,梁的前端FGO分布模式下产生的位移最小,其次为FGX分布,最后为UD分布模式,这是由于3种分布模式下CNT的分布不同导致体积分数上的差异。图5(b)为UD分布模式下CNT体积分数对静气动弹性变形的影响,CNT的体积分数对梁的静气动弹性变形影响较大,在相同的CNT分布模式下,体积分数越大,梁的静气动弹性变形越小,这是因为在相同分布模式下,增加CNT的体积分数会改变梁的弹性模量和弯曲刚度,在二者共同增大下,梁的静气动弹性变形减小。随着CNT体积分数的增加,静气动弹性变形曲线的对称轴逐渐右移,这是由于热载荷会随着CNT体积分数的增加而增大,导致FG-CNTRC梁前端受到的压力增大,引起静气动弹性变形曲线的拱高减小。



注:$\bar{x}$为梁的x轴坐标;$\bar{w}$为梁的静气动弹性变形;V_{CN}表示碳钠米管的体积分数。

图5　CNT分布模式与体积分数对静气动弹性变形的影响(a)CNT分布模式对变形的影响;(b)CNT体积分数对变形的影响

Figure 5　effects of CNT distribution patterns and volume fractions on static aeroelastic deformation (a) effect of CNT distribution patterns on deformation; (b) effect of CNT volume fractions on deformation

$R_T = 3\pi^2/4$,V_{CN} = 0.28时,不同CNT分布模式下,FG-CNTRC梁的长高比对无量纲临界流速(U_{cr})和无量纲临界频率(ω)的影响如图6所示。在相同的分布模式下,随着梁长高比的增加,梁的U_{cr}与ω呈非线性减少趋势,且随着长高比增加,U_{cr}与ω均无限趋近于0;在相同的长高比下,FGX分布模式下U_{cr}与ω均为三者中的最大值,其次为FGO,最后为UD分布,这说明FGX分布为3种分布模式中的最优分布,且FGX分布优于FGO分布,优于UD分布。

当$R_T = 3\pi^2/4$,UD分布时,不同CNT体积分数下FG-CNTRC梁的长高比对U_{cr}和ω的影响如图7所示。相同分布模式下,当梁的长高比固定时,CNT体积分数越大,对应U_{cr}和ω越大;当CNT体积分数不变时,U_{cr}与ω随梁的长高比增大而非线性减少。对比图6和7可知,CNT分布模式对U_{cr}和ω影响较大,这是因为分布模式对材料的D_{11}影响较大。

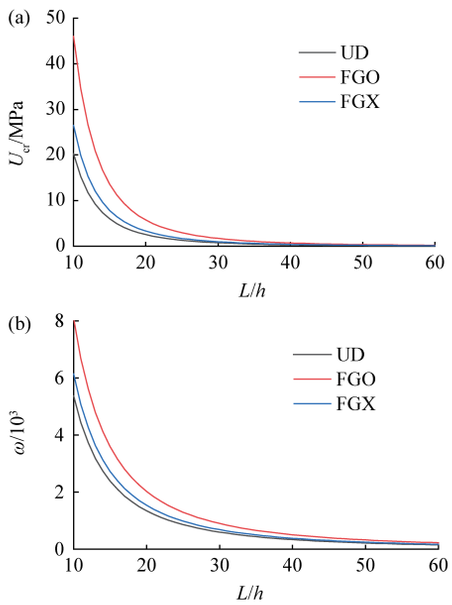


图6　不同分布模式下无量纲临界参数变化趋势

(a)流速;(b)频率

Figure 6　trend of critical parameter variation under different distribution patterns

(a) flow velocity;(b) frequency

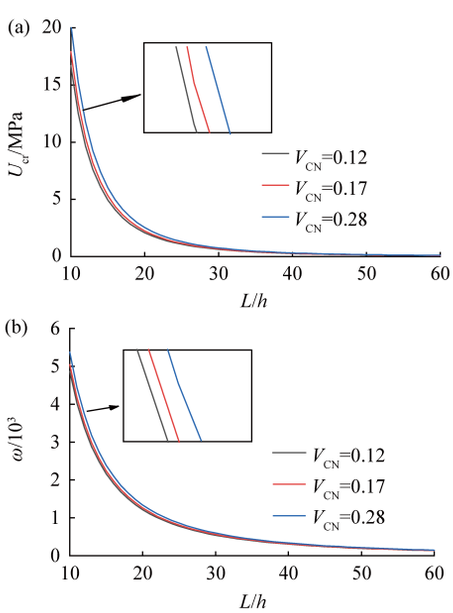


图7　不同体积分数下无量纲临界参数变化趋势

(a)流速;(b)频率

Figure 7　trend of critical parameter variation under different volume fractions

(a) flow velocity;(b) frequency

4.3　稳定性验证

取FGX分布,$V_{CN}=0.28$时,计算得出不同R_T对应下的p_{1cr},当$R_T=3\pi^2/4$、$R_T=\pi^2$、$R_T=3\pi^2/2$时对应的p_{1cr}分别为233.03、219.32和191.89。令$X_0(0,0,0,0)$作为式(31)的一个平衡点,即:$p_1<p_{1cr}$时,系统在该平衡点处于稳定状态;$p_1=p_{1cr}$时,系统在该平衡点发生颤振;$p_1>p_{1cr}$时,系统在该平衡点处于不稳定状态。

$V_{CN}=0.28$时,不同R_T下平衡点$X_0(0,0,0,0)$对应FGX分布的Jacobi矩阵特征值如表3所示。$p_1<p_{1cr}$时,得到的Jacobi矩阵特征值都含有负实部,这说明梁在此时处于平衡状态,在遭受微小扰动后也能够恢复平衡状态;当$p_1>p_{1cr}$时,Jacobi矩阵特征值既含有正实部,又含有负实部,即梁在此刻处于不平衡状态,在受到扰动后会做稳定的极限环振荡运动,且保持该稳定状态。

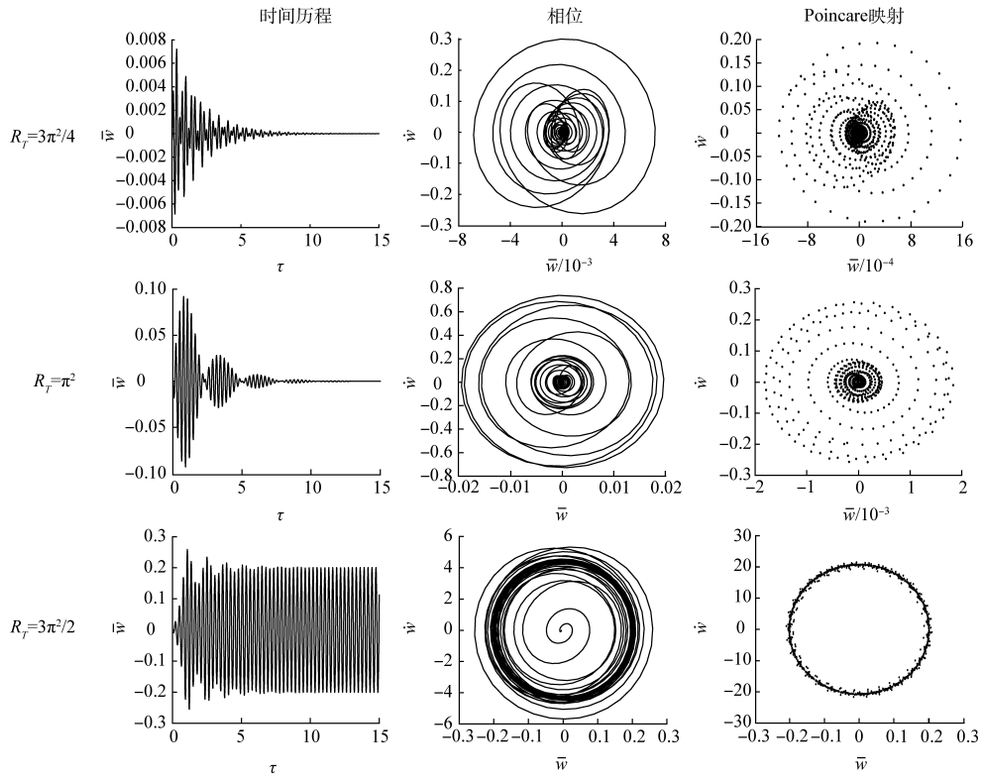
表3　FGX分布的Jacobi矩阵特征值

Table 3　eigenvalues of the Jacobi matrix for FGX distribution

p_{1cr}	$R_T=3\pi^2/4$	$R_T=\pi^2$	$R_T=3\pi^2/2$
233.03	0±25.40i	3.85±24.55i	7.30±22.85i
	−0.92±25.40i	−4.74±24.55i	−8.14±22.85i
219.32	−0.46±20.89i	0±24.18i	5.91±22.42i
	−0.46±29.22i	−0.89±24.18i	−6.75±22.42i
191.89	−0.46±17.12i	−0.45±17.37i	0±21.51i
	−0.46±31.57i	−0.45±29.44i	−0.832±21.51i

当梁中CNT为FGX分布、$V_{CN}=0.28$,$p_1=219.32$时,取初值为(0.005,0.005,0.01,0.01),得到梁在不同R_T下对应的时间历程、相位和Poincare映射如图8所示。在$R_T=3\pi^2/4$时,由于$p_1<p_{1cr}$,系统在受到扰动后会恢复到平衡状态;在$R_T=\pi^2$时,系统开始发生颤振;在$R_T=3\pi^2/2$时,系统在受扰动后做极限环振荡运动,这也印证了表3内容。

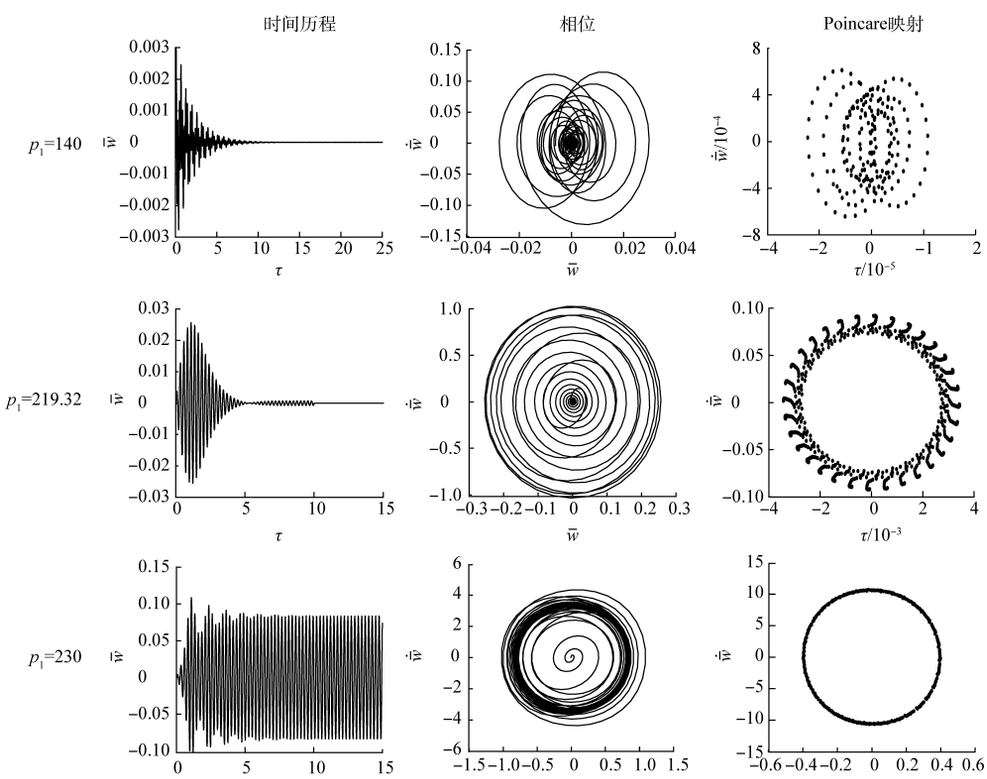
为进一步验证无量纲动压对梁颤振特性的影响,$R_T=\pi^2$时不同无量纲动压下系统的时间历程、相位及Poincare映射如图9所示。在$R_T=\pi^2$,系统的$p_{1cr}=219.32$,$p_1=p_{1cr}$时(图9(a)),系统受扰动后能够迅速恢复至平衡状态;当$p_1=p_{1cr}$时(图9(b)),系统受扰动后恢复平衡的时间显著延长;当$p_1>p_{1cr}$时((图9(c)),系统进入极限环振荡状态。进一步验证了无量纲动压对梁颤振特性的影响规律。



注:$\dot{w}$和τ分别是无量纲化后的速度和时间。

图8　不同R_T系统的时间历程、相位及Poincare映射

Figure 8　time history, phase, and Poincare map of the system under different values of R_T



注:$\dot{\bar{w}}$为梁的静气动弹性变形对时间的求导。

图9　$R_T=\pi^2$不同无量纲动压下的时间历程、相位及Poincare映射

Figure 9　time histories, phase portraits, and Poincare maps under different dimensionless dynamic pressures when $R_T=\pi^2$

5 结 论

基于Von-Karman变形理论,利用哈密顿原理得出FG-CNTRC梁的控制方程,基于活塞理论建立模型,使用Galerkin法对方程进行离散,进而对FG-CNTRC梁的颤振特性进行研究分析。取3种CNT的分布模式和不同体积分数,分别研究对梁的静态分岔和屈曲问题、无量纲临界流速与无量纲临界频率及梁的静气动弹性变形的影响,通过数值计算,得到不同参数下的时间历程、相位及Poincare映射图对上述问题进行验证。得到结论:FGX分布是3种分布模式中的最优分布,具体为FGX分布优于FGO分布,优于UD分布;FG-CNTRC梁的U_{cr}与ω随长宽比的增大而非线性减小,且分布模式对U_{cr}和ω的影响比体积分数影响较大。$p_1 < p_{1cr}$时,系统处于稳定状态;$p_1 = p_{1cr}$时系统开始发生颤振;$p_1 > p_{1cr}$时,系统发生极限环振荡运动。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2024. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

参 考 文 献

[1] 谢丹.基于降价模型的超音速气流中壁板非线性颤振研究[D].西安:西北工业大学,2015.
XIE D. Research on nonlinear flutter of panels in supersonic flow based on the reduced-order model[D]. Xi'an:Northwestern Polytechnical University,2015.

[2] SUMIO I. Helical microtubules of graphitic carbon[J]. Nature,1991,354:56-58. DOI:10.1038/354056a0.

[3] SUMIO I,TOSHINARI I. Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter[J]. Nature,1993,363:603-605. DOI:10.1038/363603a0.

[4] 孙晓刚,曾效舒,程国安.碳纳米管的特性及应用[J].中国粉体技术,2001,7(6):29-33. DOI:10.3969/j.issn.1008-5548.2001.06.009.
SUN X G,ZENG X S,CHENG G A. Properties and applications of carbon nanotubes[J]. China Powder Science and Technology,2001,7(6):29-33.

[5] WUITE J,ADALI S. Deflection and stress behaviour of nanocomposite reinforced beams using a multiscale analysis[J]. Composite Structures,2005,71(4):388-396. DOI:10.1016/j.compstruct.2005.09.011.

[6] YAS M H,SAMADI N. Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite timoshenko beams on elastic foundation[J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping,2012,98:119-128. DOI:10.1016/j.ijpvp.2012.07.012.

[7] SHEN H S,XIANG Y. Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments[J]. Engineering Structures,2013,56(11):698-708. DOI:10.1016/j.engstruct.2013.06.002.

[8] ARANI G A,MAGHAMIKIA S,MOHAMMADIMEHR M,et al. Buckling analysis of laminated composite rectangular plates reinforced by SWCNTs using analytical and finite element methods[J]. Journal of Mechanical Science and Technology,2011,25(3):809-820. DOI:10.1007/s12206-011-0127-3.

[9] DOWELL H E. Panel flutter:a review of the aeroelastic stability of plates and shells[J]. AIAA Journal,1970,8(3):385-399. DOI:10.2514/3.5680.

[10] CARL E G,CHUH M. Large-amplitude finite element flutter analysis of composite panels in hypersonic flow[J]. AIAA Journal,1993,31(6):1090-1099. DOI:10.2514/3.49051.

[11] 张桂玮,刘召庆,朱镭,等.地面颤振模拟试验技术研究进展[J].航空学报,2024,45(10):16-34. DOI:10.7527/S1000-6893.2024.29229.
ZHANG G W,LIU Z Q,ZHU L,et al. Research progress on ground flutter simulation test technology[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2024,45(10):16-34.

[12] 韩明君,李金佩,王鹏.超音速流-热载作用下梯度多孔壁板的非线性振动特性分析[J].振动与冲击,2023,42(2):225-234. DOI:10.13465/j.cnki.jvs.2023.02.027.
HAN M J,LI J P,WANG P. Analysis on nonlinear vibration characteristics of gradient porous panels under supersonic flow-thermal loads[J]. Journal of Vibration and Shock,2023,42(2):225-234.

[13] 杨智春,高扬,谷迎松.复合材料曲壁板颤振特性分析[J].机械科学与技术,2013,32(7):1069-1073. DOI:10.13433/j.cnki.1003-8728.2013.07.020.
YANG Z C,GAO Y,GU Y S. Flutter characteristic analysis of composite curved panels[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering,2013,32(7):1069-1073.

[14] ASADI H,WANG Q. An investigation on the aeroelastic

flutter characteristics of FG-CNTRC beams in the supersonic flow[J]. Composites Part B Engineering, 2016, 116 (5): 486-499. DOI: 10.1016/j.compositesb.2016.10.089.

[15] 张继业,杨翊仁,曾京.Hopf分岔的代数判据及其在车辆动力学中的应用[J].力学学报,2000,32(5):596-605. DOI:10.3321/j.issn:0459-1879.2000.05.011.
ZHANG J Y, YANG Y R, ZENG J. Algebraic criterion for Hopf bifurcation and its application in vehicle dynamics[J]. Acta Mechanica Sinica, 2000, 32(5): 596-605.

[16] 陈文成,陈国良.Hopf分枝的代数判据[J].应用数学学报,1992,15(2):251-259. DOI:10.12387/C1992030.
CHEN W C, CHEN G L. Algebraic criterion for Hopf bifurcation[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1992,15(2):251-259.

[17] 曹丽娜.超音速流中飞行器壁板的气动弹性稳定性研究[D].吉林:吉林大学,2020.
CAO L N. Research on aeroelastic stability of aircraft panels in supersonic flow[D]. Jilin:Jilin University,2020.

(责任编辑:兰丽丽)

(上接第84页)

[18] BLOCH I, DALIBARD J, NASCIMBENE S. Quantum simulations with ultracold quantum gases[J]. Nature Physics,2012,8(4):267-276. DOI:10.1038/nphys2259.

[19] GROSS C, BLOCH I. Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices[J]. Science,2017,357(6355):995-1001. DOI:10.1126/science.aal3837.

[20] YANG B, SUN H, HUANG C J, et al. Cooling and entangling ultracold atoms in optical lattices[J]. Science, 2020, 369(6503): 550-553. DOI: 10.1126/science.aaz6801.

[21] ZHANG X B, HUNG C L, TUNG S K, et al. Observation of quantum criticality with ultracold atoms in optical lattices[J]. Science, 2012, 335(6072): 1070-1072. DOI:10.1126/science.1217990.

[22] TONONI A, WANG Y M, SALASNICH L. Quantum solitons in spin-orbit-coupled Bose-Bose mixtures[J]. Physical Review A,2019,99(6):063618. DOI:10.1103/PhysRevA.99.063618.

[23] GANGWAR S,RAVISANKAR R,MURUGANANDAM P, et al. Dynamics of quantum solitons in Lee-Huang-Yang spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review A, 2022, 106(6): 063315. DOI: 10.1103/PhysRevA.106.063315.

[24] 梁庭维,王林红,孙青,等.单分量和二分量玻色-爱因斯坦凝聚体亮孤子解的李黄杨修正[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,45(2):74-83. DOI:10.19789/j.1004-9398.2024.02.008.
LIANG T W, WANG L H, SUN Q, et al. Lee-Huang-Yang correction for bright soliton solutions of single and two component Bose-Einstein condensates[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition), 2024,45(2):74-83.

[25] LIN W, YI L, JING Z, et al. Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates[J]. Acta Physica Sinica, 2019, 68(8): 080301. DOI: 10.7498/aps.68.20182013.

[26] LIU Z Y, JI A C, SUN Q. Fluctuation-driven self-trapping in Bose-Bose mixtures[J]. Physical Review Research, 2024, 6(1): 013014. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.013014.

[27] LIN Y J, JIMÉNEZ-GARCÍA K, SPIELMAN I B. Spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates[J]. Nature, 2011,471(7336):83-86. DOI:10.1038/nature09887.

[28] MALOMED B A. Soliton management in periodic systems[M]. New York:Springer US,2006.

[29] LIU X X, PU H, XIONG B, et al. Formation and transformation of vector solitons in two-species Bose-Einstein condensates with a tunable interaction[J]. Physical Review A,2009,79(1):013423. DOI:10.1103/PhysRevA.79.013423.

[30] 张天琪.双组份玻色-爱因斯坦凝聚体的混溶性[D].太原:山西大学,2023.
ZHANG T Q. Miscibility of dual-species Bose-Einstein condensates[D]. Taiyuan:Shanxi University,2023.

[31] WEN L, GUO H, WANG Y J, et al. Effects of atom numbers on the miscibility-immiscibility transition of a binary Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review A, 2020, 101(3): 033610. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.033610.

(责任编辑:兰丽丽)