DOI:10.19789/j.1004-9398.2026.04.009 **Open Access**
文献引用:李煜玮,马金铭,孙紫欣,等.四元数希尔伯特变换及其在彩色图像加密中的应用[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(4):85-94. Li Yuwei, Ma Jinming, Sun Zixin, et al. Quaternion Hilbert transform and its applications in color image encryption[J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2026,47(4):85-94.

四元数希尔伯特变换及其在彩色图像加密中的应用*

李煜玮，马金铭**，孙紫欣，张守岐

（首都师范大学信息工程学院，北京 100048）

摘要:本文提出四元数希尔伯特变换(QHT),并将其应用于彩色红绿蓝(RGB)图像加密。首先,通过将任意四元数信号分解为2个复信号的线性求和,并基于复信号的希尔伯特变换,构造适用于四元数信号的希尔伯特变换;其次,推导四元数希尔伯特变换所满足的多种常用性质;最后,将彩色RGB图像表征为四元数信号,并提出基于四元数希尔伯特变换的彩色RGB图像加密方法。实验表明所提方法具有良好的视觉效果和指标性能,对噪声、剪切等攻击具有鲁棒性,并对密钥具有高敏感度,验证了其有效性。

关键词:四元数;希尔伯特变换;图像加密;图像解密
中图分类号:TP309.7 **文献标志码**:A

Quaternion Hilbert transform and its applications in color image encryption*

Li Yuwei, Ma Jinming**, Sun Zixin, Zhang Shouqi

(Information Engineering College, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract: This paper proposes the Quaternion Hilbert Transform (QHT) and applies it to the encryption of color red, green and blue(RGB) images. Firstly, by decomposing an arbitrary quaternion signal into the linear sum of two complex signals and based on the Hilbert transform of complex signals, a Hilbert transform suitable for quaternion signals is constructed. Secondly, various commonly used properties satisfied by the Quaternion Hilbert Transform are derived. Finally, color RGB images are represented as quaternion signals, and a color RGB image encryption method based on the Quaternion Hilbert Transform is proposed. Experiments show that the proposed method has excellent visual effects and index performance, exhibits robustness against attacks such as noise and cropping, and has high sensitivity to keys, which verifies its effectiveness.

Keywords: Quaternion; Hilbert Transform; image encryption; image decryption
CLC: TP309.7 **DC**: A

收稿日期:2025-08-06
*国家自然科学基金青年科学基金项目(62201318);北京市教育委员会科研计划一般项目(KM202410028012)
**通信作者:jinming_ma@cnu.edu.cn

0 引 言

彩色图像作为重要的多维信息媒介,其安全保护问题备受关注。设计安全而高效的彩色图像加密算法,对推动图像安全领域发展具有重要意义。传统彩色图像加密方法通常将其分解为红色(red,R)、绿色(green,G)和蓝色(blue,B)共3个通道,并将各通道分量作为灰度图进行处理,最后对处理结果进行整合。然而,上述方法无法充分利用彩色图像各通道之间的光谱关联性,可能影响图像加密和解密质量。因此,将彩色图像的3个通道进行一体化表征,并发展出相应的图像加密方法,成为彩色图像处理领域的重要研究课题。

为解决上述问题,近年来基于四元数理论的彩色图像加密方法逐渐兴起[1]。四元数作为超复数,可将传统复数拓展为1个实部和2个虚部[2]。通过将彩色图像的R、G、B通道作为四元数的3个虚部,或者1个实部和2个虚部,可充分利用彩色图像各通道之间的关联性,为多维图像信号的整体化表征与处理提供了理想的数学模型。

基于四元数理论的空域图像加密方法[3]通过对图像进行可逆的数学变换或置乱操作,将其转化为视觉上不可识别的密文,从而实现对图像内容的保护,具有实现简单、运算效率高的特点。但此类方法在抗攻击能力上存在局限,由于加密操作主要集中于像素级的位置置换或灰度值扩散,容易被差分攻击、选择明文攻击通过像素相关性分析破解,且对彩色图像R、G、B通道关联性利用不足,难以隐藏图像的局部纹理特征。相比之下,四元数频域变换可实现彩色图像的一体化加密,例如基于四元数傅里叶变换[4]的加密方法,可将彩色图像的R、G、B通道及相位信息整合为四元数矩阵,从而统一转换至频域,并通过混沌系统生成与密钥相关的相位掩膜或幅度扰动因子,对频域系数的实部、虚部及相位分量进行协同调制,这种多维度加密机制能分离密文与明文之间的像素关联,有效隐藏图像的全局轮廓、亮度分布等宏观特征。此外,基于四元数小波变换[5]的加密方法则具有“多尺度分解+相位保持”特性,例如文献[5]表明该变换能精准捕捉图像在频域的细节特征,从而可将图像分解得到的高、低频信息进行差异化密钥控制,同时兼顾加密强度和运算效率。基于四元数正/余弦变换[6]的加密方法可利用四元数离散余弦变换的正交性与低冗余度,有效整合R、G、B通道的信息,并达到隐藏图像局部特征的效果,同时该方法不仅抗剪裁、噪声能力突出,还能够兼容主流图像压缩标准。上述频域加密方法通过深挖彩色图像的频域关联性,有效规避空域加密的抗攻击短板,且在鲁棒性、兼容性与安全性的平衡上表现优异,逐渐成为彩色图像加密领域的重要研究方向。

希尔伯特变换作为一种经典的信号分析工具,能够用于构造解析信号,消除负频率分量,从而提升频谱利用率。将四元数理论与希尔伯特变换[7]相结合,构造四元数希尔伯特变换,不仅能够实现彩色图像各通道信息的协同处理,还能有效保留希尔伯特变换在频谱表征方面的优势[8],可有效提高图像加密效率,优化频谱资源利用率。

为此,本文研究四元数希尔伯特变换(quaternion Hilbert transform,QHT)以及相应的彩色红绿蓝(red,green and blue,RGB)图像加密方法。通过将任意四元数表征为2个复信号的线性求和,并基于复信号的希尔伯特变换,构造出QHT,并推导变换所满足的性质。所提QHT可用于构造四元数解析信号[9-10],提高频谱利用率。基于此,提出适用于彩色RGB图像的加密和解密方法,并利用仿真实验验证所提方法的有效性。

1 预备知识

1.1 实信号的希尔伯特变换

实信号$f(t)$的希尔伯特变换定义为[1]

$$H[f(t)]=f(t)*\frac{1}{\pi t}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau, \quad (1)$$

式中:$*$为卷积算子;$H[\cdot]$为希尔伯特算子。由式(1)可知,$f(t)$的希尔伯特变换为$f(t)$与$\frac{1}{\pi t}$的卷积,即$f(t)$通过传递函数为$\frac{1}{\pi t}$的系统。因此根据卷积定理可知,$H[f(t)]$的傅里叶变换为

$$F[H[f(t)]](\omega)=-\imath\,\mathrm{sgn}(\omega)\cdot F[f(t)](\omega), \quad (2)$$

式中:$F[\cdot]$为傅里叶变换算子;$\imath$为虚数单位,满足$\imath^2=-1$;$\cdot$为乘积算子;$\mathrm{sgn}(\omega)$为符号函数,是$\frac{1}{\pi t}$的傅里叶变换,其定义为

$$\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega>0,\\ 0, & \omega=0,\\ -1, & \omega<0。\end{cases} \quad (3)$$

利用希尔伯特变换可将具有双边(对称)频谱的实信号转化为具有单边频谱的解析信号$f_a(t)=$

$f(t)+\mathrm{i}H[f(t)]$。由式(2)易得$f_a(t)$具有单边频谱[2],其负频率分量为0,正频率分量为实信号频谱正频率分量的2倍,因此可达到节约频谱资源的目的[11-12]。

1.2 四元数理论

四元数是四维超复数,具有如下形式[2]

$$q=a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c+\mathrm{k}d, \tag{4}$$

其中a、b、c、d均为实数,i、j、k为3个虚数单位,即$\mathrm{i}b+\mathrm{j}c+\mathrm{k}d$为四元数的虚部,满足以下关系:

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1, \tag{5-1}$$

$$\mathrm{ij}=\mathrm{k},\ \mathrm{jk}=\mathrm{i},\ \mathrm{ki}=\mathrm{j}, \tag{5-2}$$

$$\mathrm{ji}=-\mathrm{k},\ \mathrm{kj}=-\mathrm{i},\ \mathrm{ik}=-\mathrm{j}。 \tag{5-3}$$

在图像处理中,可利用四元数表征彩色RGB图像$I(x,y)$,通常将3个颜色通道分别作为四元数的3个虚单位对应的实系数[9]

$$I(x,y)=0+\mathrm{i}R(x,y)+\mathrm{j}G(x,y)+\mathrm{k}B(x,y), \tag{6}$$

式中$R(x,y)$,$G(x,y)$,$B(x,y)$均为实信号,分别对应R、G、B这3个通道。

1.3 复信号的希尔伯特变换

借助四元数理论可将希尔伯特变换拓展至复数域[14]。假定复信号$z(t)=z_r(t)+\mathrm{i}z_{\mathrm{i}}(t)$沿j轴的四元数傅里叶变换为

$$QF_{\mathrm{j}}[z(t)](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}z(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\omega t}\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

式中:$z_r(t)$和$z_{\mathrm{i}}(t)$分别为复信号的实部和虚部;QF_{j}为沿j轴的四元数傅里叶变换算子。根据式(7)易得,传递函数$\frac{1}{\pi t}$的四元数傅里叶变换为$-\mathrm{j}\mathrm{sgn}(\omega)$。利用式(2)和卷积定理,对$-\mathrm{j}\mathrm{sgn}(u)$与$QF_{\mathrm{j}}[z(t)]$的乘积做逆四元数傅里叶变换[16-17],结果即为复信号$z(t)$的希尔伯特变换

$$H[z(t)]=QF_{\mathrm{j}}^{-1}[-\mathrm{j}\mathrm{sgn}(\omega)\cdot QF_{\mathrm{j}}[z(t)](\omega)], \tag{8}$$

式中QF_{j}^{-1}为逆四元数傅里叶变换算子。

2 相关工作

现有基于四元数变换的彩色图像加密研究多以“四元数频域变换+混沌密钥调制”为核心框架,例如利用四元数旋转域的等模分解实现多图像加密[18]、通过分数阶切比雪夫矩变换的交叉耦合增强密钥关联性[19]、基于分数阶Krawtchouk变换[20]实现加密与水印融合。此类方案虽能整合图像的多通道信息,但计算复杂度过高等问题仍有待解决。

2.1 QHT在加密中的应用

基于QHT的图像加密算法通常遵循“特征增强-频域调制-密钥嵌入”框架[23],能达到多通道相位协同加密、细节特征隐藏强化等效果。其中,QHT可同时对四元数矩阵的实部和虚部执行相位偏移,生成包含原始图像全部通道信息的解析信号$Q_a(x,y)=Q(x,y)+\mathrm{j}H_{q,2D}[Q(x,y)]$。不同于文献[18]中等模分解仅调制幅度,解析信号的相位项可作为独立加密维度,通过混沌系统生成的相位密钥进行调制,从而使密钥空间维度得到大幅提升。同时,QHT对于高频细节的增强,能够弥补切比雪夫矩变换和Krawtchouk变换对局部特征表征不足的问题。基于QHT的加密方法可将图像细节映射至高频解析分量,再结合小波阈值分割对高频分量进行密钥控制的置乱,使密文既隐藏全局轮廓,又消解局部纹理相关性,抗差分攻击性更优。

2.2 现有研究的局限性

当前基于QHT的图像加密相关研究仍然处于起步阶段:部分方案直接沿用实数域希尔伯特变换的加密逻辑,并未将四元数多维度表征的优势纳入考虑;少数结合QHT的方案为解决变换域系数关联性过高的问题,安全性依赖单一混沌密钥[15]。相较于参考文献的旋转域方案、矩变换方案及多项式变换方案,本文聚焦于优化QHT的相位调制机制,进一步提升变换基的非线性与密钥复杂度。

3 四元数希尔伯特变换

针对上述复信号希尔伯特变换无法处理四元数表征图像的问题,本节提出适用于处理彩色图像的QHT,并给出该变换的定义,基于其构造四元数解析信号[21],并推导其具备的一些常用性质。

3.1 QHT定义

对于任意四元数信号$q(t)=a(t)+\mathrm{i}b(t)+\mathrm{j}c(t)+\mathrm{k}d(t)$,可利用式(5)中3个虚数单位之间的关系,基于四元数虚单位的分层特性与复信号结构的适配性,将其改写为2个复信号$q_1(t)=a(t)+b(t)$和$q_2(t)=c(t)+\mathrm{i}d(t)$的线性求和。

$$q(t)=q_1(t)+\mathrm{j}q_2(t)=a(t)+\mathrm{i}b(t)+\mathrm{j}(c(t)+\mathrm{i}d(t)), \tag{9}$$

式中$a(t)$、$b(t)$、$c(t)$、$d(t)$均为实信号。由于复信号的希尔伯特变换已由式(8)给出,因此可进一步得到QHT的定义。

定义1 四元数信号$q(t)=a(t)+\mathrm{i}b(t)+\mathrm{j}c(t)+\mathrm{k}d(t)$的希尔伯特变换定义为

$$QH[q(t)]=H[q_1(t)]+\mathrm{j}H[q_2(t)], \quad (10)$$

式中:$QH[\cdot]$为QHT算子;$H[q_1(t)]$和$H[q_2(t)]$为公式(8)所示的复信号的希尔伯特变换。

由定义1可知,QHT可通过如下步骤得到:(1)将四元数分解为2个子复信号的线性求和;(2)求取2个子复信号各自的希尔伯特变换;(3)对2个希尔伯特变换进行线性求和。既利用了复信号希尔伯特变换的成熟理论,又保留了2个子复信号之间的关联性,确保四元数希尔伯特变换的结果仍符合四元数的代数结构。

定义2 逆四元数希尔伯特变换$QH^{-1}[\cdot]$定义为

$$QH^{-1}[q(t)]=-QH[q(t)]。 \quad (11)$$

证明 利用式(7和10),易得QHT满足

$$QF_{\mathrm{j}}[QH[q(t)]]=-\mathrm{j}\mathrm{sgn}(\omega)\cdot QF_{\mathrm{j}}[q(t)](\omega), \quad (12)$$

同时,逆四元数则逆变换应满足$QH^{-1}[QH[q(t)]]=q(t)$,故有

$$QF_{\mathrm{j}}[QH^{-1}[QH[q(t)]]](\omega)=QF_{\mathrm{j}}[q(t)](\omega), \quad (13)$$

对比式(12和13)可得逆四元数希尔伯特变换的频域表达式为

$$QF_{\mathrm{j}}[QH^{-1}[q(t)]](\omega)=\frac{1}{-\mathrm{j}\mathrm{sgn}(\omega)}\cdot QF_{\mathrm{j}}[q(t)](\omega)=\mathrm{j}\mathrm{sgn}(\omega)\cdot QF_{\mathrm{j}}[q(t)](\omega), \quad (14)$$

再次利用式(12)可得

$$QF_{\mathrm{j}}[QH^{-1}[q(t)]](\omega)=-QF_{\mathrm{j}}[QH[q(t)]](\omega)。 \quad (15)$$

等效地,在时域上有式(11)。证毕。

类似于希尔伯特变换可用于构造解析信号,从而达到节约频谱资源的目的,QHT也可用于构造四元数解析信号。

定理1 利用QHT可构造如下四元数解析信号

$$q_a(t)=q(t)+\mathrm{j}QH[q(t)]。 \quad (16)$$

证明 信号$q_a(t)$的频谱为

$$QF_{\mathrm{j}}[q_a(t)](\omega)=QF_{\mathrm{j}}[q(t)](\omega)+\mathrm{j}QF_{\mathrm{j}}[QH[q(t)]](\omega), \quad (17)$$

将式(12)代入(17),可得

$$QF_{\mathrm{j}}[q_a(t)](\omega)=QF_{\mathrm{j}}[q(t)](\omega)+\mathrm{j}\{-\mathrm{j}\mathrm{sgn}(\omega)\cdot QF_{\mathrm{j}}[q(t)](\omega)\}=(1+\mathrm{sgn}(\omega))\cdot QF_{\mathrm{j}}[q(t)](\omega)。 \quad (18)$$

由于符号函数满足

$$1+\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases}2, & \omega>0,\\ 1, & \omega=0,\\ 0, & \omega<0。\end{cases} \quad (19)$$

因此$q_a(t)$的频谱的负频率分量为零,正频率分量是$q(t)$频谱正频率分量的2倍,符合解析信号特性。证毕。

3.2 QHT相关性质

由于QHT是从复信号的希尔伯特变换推广而来,因此可以很好地继承复信号希尔伯特变换的各种性质。

性质1[22](线性性质):对于任意四元数h_1、h_2和四元数信号$q(t)$、$p(t)$,有

$$QH[h_1q(t)+h_2p(t)]=h_1QH[q(t)]+h_2QH[p(t)]。 \quad (20)$$

性质2(时移特性):若$QH[q(t)]=\hat{q}(t)$,则时延信号$q(t-t_0)$的QHT为

$$QH[q(t-t_0)]=\hat{q}(t-t_0)。 \quad (21)$$

性质3(频移特性):$q(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$的QHT为

$$QF[QH[q(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}]](\omega)=-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)\cdot QF[q(t)](\omega-\omega_0)。 \quad (22)$$

性质4(正交性):四元数信号$q(t)$与其希尔伯特变换$QH[q(t)]$在时域上正交,即

$$\int_{-\infty}^{\infty}q(t)\cdot\overline{QH[q(t)]}\,\mathrm{d}t=0, \quad (23)$$

式中$\overline{QH[q(t)]}$为$QH[q(t)]$的共轭。

性质5(能量守恒):四元数信号$q(t)$与其QHT的能量相等

$$\int_{-\infty}^{\infty}|q(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|QH[q(t)]|^2\mathrm{d}t。 \quad (24)$$

3.3 彩色RGB图像的四元数希尔伯特变换

利用定义1可得式(8)中彩色图像$I(x,y)$的QHT为

$$QH[I(x,y)]=H[I_1(x,y)]+\mathrm{j}H[I_2(x,y)], \quad (25)$$

式中:$I_1(x,y)=0+\mathrm{i}R(x,y)$包含R通道信息;$I_2(x,y)=G(x,y)+\mathrm{i}B(x,y)$中包含G、B通道信息。这里$I_1(x,y)$和$I_2(x,y)$均为二维复信号[24],其希尔伯特变换可通过如下定理计算。

定理2 二维复信号$g(x,y)=g_r(x,y)+\mathrm{i}g_{\mathrm{i}}(x,y)$的希尔伯特变换计算式为

$$\mathrm{H}[g(x,y)]=QF_{\mathrm{j}}^{-1}[-\mathrm{sgn}(u)\cdot\mathrm{sgn}(v)\cdot QF_{\mathrm{j}}[g(x,y)](u,v)]。 \quad (26)$$

证明 二维信号的希尔伯特变换等效于信号

通过传递函数为$\frac{1}{\pi^2 xy}$的系统。根据卷积定理和式(7),二维复信号$g(x,y)$的希尔伯特变换应为传递函数$\frac{1}{\pi^2 xy}$的四元数傅里叶变换与$g(x,y)$的四元数傅里叶变换做乘积,再对乘积做逆四元数傅里叶变换的结果。其中二维信号的四元数傅里叶变换可通过2个维度的可分离型一维变换实现[17]。

$$QF_{\mathrm{j}}[g(x,y)](u,v)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi vy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。 \tag{27}$$

同时易得$\frac{1}{\pi^2 xy}$的四元数傅里叶变换为$-\mathrm{jsgn}(u)\cdot(-\mathrm{jsgn}(v))=-\mathrm{sgn}(u)\cdot\mathrm{sgn}(v)$。证毕。

进一步,结合定理1给出的方法构造解析信号

$$I_a(x,y)=I(x,y)+\mathrm{j}QH[I(x,y)], \tag{28}$$

使得信号频谱的负频率分量为0,从而达到节约频谱资源、降低存储空间的目的。

4　基于QHT的图像加密和解密系统

4.1　图像加密

本文所提的基于QHT的彩色RGB图像加密系统流程如图1所示,具体步骤如下:

(1)图像预处理,将彩色RGB图像$I(x,y)$表征为公式(6)所示的四元数信号;

(2)希尔伯特变换,利用式(25)对$I(x,y)$进行四元数希尔伯特变换,得到$QH[I(x,y)]$,并利用式(28)构造四元数解析信号$I_a(x,y)$;

(3)四元数傅里叶变换,对解析信号$I_a(x,y)$做四元数傅里叶变换[13],得到单边频谱$QF_{\mathrm{j}}[I_a(x,y)](u,v)$;

(4)引入混沌密钥,生成二维混沌矩阵$\boldsymbol{K}(x,y)$,此处采用二维logistic混沌映射[14]

$$x_{n+1}=\mu_1 x_n(1-x_n)+\rho_1 y_n, \tag{29-1}$$

$$y_{n+1}=\mu_2 y_n(1-y_n)+\rho_2 x_n。 \tag{29-2}$$

式中μ_1、μ_2、ρ_1、ρ_2为混沌参数,构成密钥的一部分[25]。参考文献[26]中利用混沌系统生成加密相关混沌序列以实现图像置乱与加密的思路,在图像加密流程中,当生成二维混沌矩阵后,为了充分利用四元数在多维数据表示与处理上的优势,对混沌矩阵进行四元数形式的转换,得到$\boldsymbol{K}_I(x,y)=0+\mathrm{i}\boldsymbol{K}_{\mathrm{R}}(x,y)+\mathrm{j}\boldsymbol{K}_{\mathrm{G}}(x,y)+\mathrm{k}\boldsymbol{K}_{\mathrm{B}}(x,y)$,并进行四元数傅里叶变换得到$\overline{\boldsymbol{K}}_I(u,v)$。对步骤(3)所得频域矩阵$QF_{\mathrm{j}}[I_a(x,y)](u,v)$进行混沌调制,得到频域加密矩阵$\overline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{enc}}(u,v)$

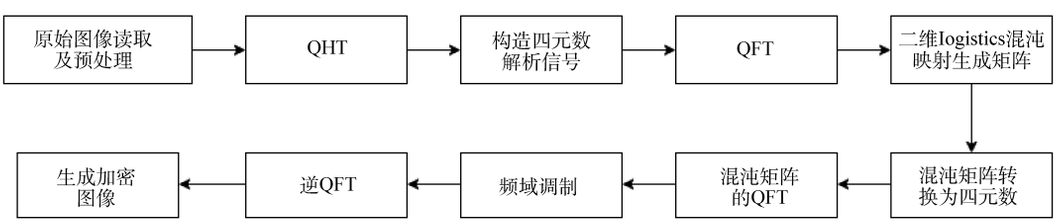
$$\overline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{enc}}(u,v)=QF_{\mathrm{j}}[I_a(x,y)](u,v)\cdot\overline{\boldsymbol{K}}_I(u,v)。 \tag{30}$$

(5)逆四元数傅里叶变换,对加密后的频谱进行逆四元数傅里叶变换,分离3个虚部,得到加密后的R、G、B通道矩阵,将三通道合并后得到加密彩色图像$I_{\mathrm{enc}}(x,y)$。

4.2　图像解密

图像解密系统流程图如图2所示,具体步骤如下:

(1)图像预处理,对加密图像$I_{\mathrm{enc}}(x,y)$进行通道拆分,构建四元数矩阵;



注:QHT为四元数希尔伯特变换;QFT为四元数傅里叶变换。

图1　基于QHT的彩色红绿蓝图像加密系统

Figure 1　color red, green and blue image encryption system based on QHT

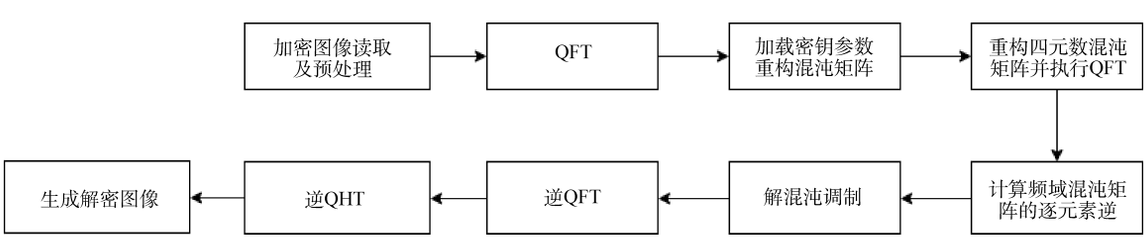


图2　基于QHT的彩色红绿蓝图像解密系统

Figure 2　color red, green and blue image decryption system based on QHT

(2)四元数傅里叶变换,对四元数矩阵进行四元数傅里叶变换,得到频域加密矩阵$\overline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{enc}}(u,v)$;

(3)解混沌映射,利用频域加密矩阵和$\overline{\boldsymbol{K}}_I(u,v)$计算解密后的频域矩阵$\boldsymbol{QF}_{\mathrm{j}}[I_a(x,y)](u,v)=\overline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{enc}}(u,v)\cdot\overline{\boldsymbol{K}}_I^{-1}(u,v)$;

(4)逆四元数傅里叶变换,利用$QF_{\mathrm{j}}[I_a(x,y)](u,v)$和式(18)恢复原始图像频谱,进行逆四元数逆傅里叶变换得到原始图像的四元数矩阵,并利用四元数的多维度信息结构化整合,分离虚部恢复R、G、B通道,具体按照下式依次提取:

$$I_{\mathrm{R}}(x,y)=\mathrm{Im}_{\mathrm{i}}\{I(x,y)\},\tag{31-1}$$

$$I_{\mathrm{G}}(x,y)=\mathrm{Im}_{\mathrm{j}}\{I(x,y)\},\tag{31-2}$$

$$I_{\mathrm{B}}(x,y)=\mathrm{Im}_{\mathrm{k}}\{I(x,y)\}。\tag{31-3}$$

式中$\mathrm{Im}_{\mathrm{i}}\{\cdot\}$、$\mathrm{Im}_{\mathrm{j}}\{\cdot\}$及$\mathrm{Im}_{\mathrm{k}}\{\cdot\}$分别表示提取四元数虚部的3个虚部系数,合并得到原始彩色图像$\mathrm{Im}_{\mathrm{RGB}}(x,y)=[I_{\mathrm{R}}(x,y),I_{\mathrm{G}}(x,y),I_{\mathrm{B}}(x,y)]$[26]。

5　实验结果

本节选用标准测试图像库中的彩色叶片、花朵、辣椒、猩猩作为测试图像(图像尺寸256×256像素),验证所提方法的图像加密和解密效果。具体测试内容包括加密图像视觉效果、指标特性、噪声攻击[27]、剪裁攻击以及密钥敏感性。

5.1　视觉效果

测试图像原图以及加密、解密后的结果如图3所示。从视觉层面分析,加密图像呈现出显著的随机化特征,整体表现为噪声状,原始图像的结构、边缘和纹理等关键视觉信息均被彻底消除,仅留存均匀分布、无序排列的像素块,充分体现了加密算法对原始视觉信息的有效破坏。

5.2　指标特性

解密图像R、G、B通道的峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio, PSNR)和结构相似性指数(structural similarity index, SSIM)及其平均值结果列于表1。从实验结果可以看出,加密和解密过程没有引入额外的失真,PSNR均在20 dB以上,图像品质处于可接受范围。此外,SSIM值均>0.9,说明解密图像与原始图像在结构上具有高度相似性。实验验证了所提方法的视觉效果优良、指标性能优异。

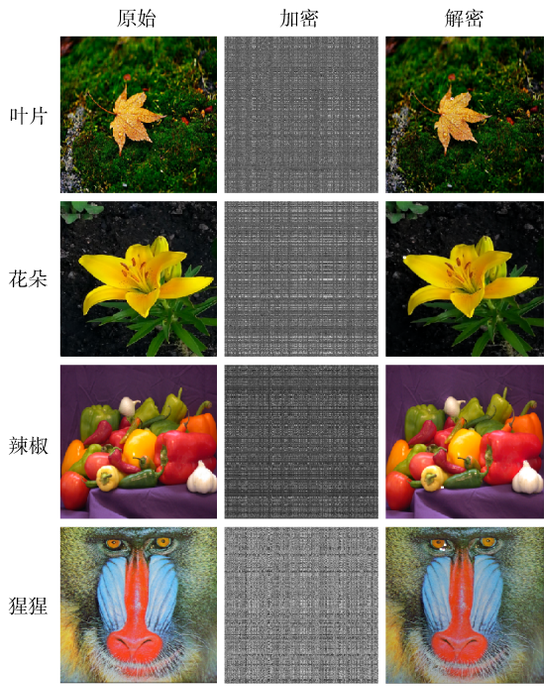


图3　不同图像加密、解密效果展示

Figure 3　display of encryption and decryption effects for different images

5.3　噪声攻击

加密图像被方差为0.05的高斯噪声攻击后所得到的解密图像如图4所示。从视觉上看,解密图像的像素值受到随机干扰,但仍保留了原始图像的结构、边缘和纹理等关键视觉信息。加密图像被方差为0.05的高斯噪声攻击后,PSNR和SSIM的指标变化结果列于表2。表明解密图像的PSNR均≥20.54 dB,居于“可接受视觉质量”,4组图像的平均SSIM仍居于“弱相似性阈值”,说明解密图像仍保留了原图的核心结构,未因噪声丢失可辨识特征。

表1　不同图像指标

Table 1　different feature indicators

指标	叶片				花朵				辣椒				猩猩			
	R	G	B	平均	R	G	B	平均	R	G	B	平均	R	G	B	平均
PSNR	40.89	42.10	37.91	40.30	39.80	45.66	46.60	44.02	31.95	33.72	32.10	32.60	32.30	29.80	32.70	31.62
SSIM	0.97	0.99	0.98	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99	0.97	0.98	0.98	0.98	0.95	0.97	0.93	0.95

注:PSNR为峰值信噪比;SSIM为结构相似性指数;R、G、B分别为红色、绿色、蓝色通道。

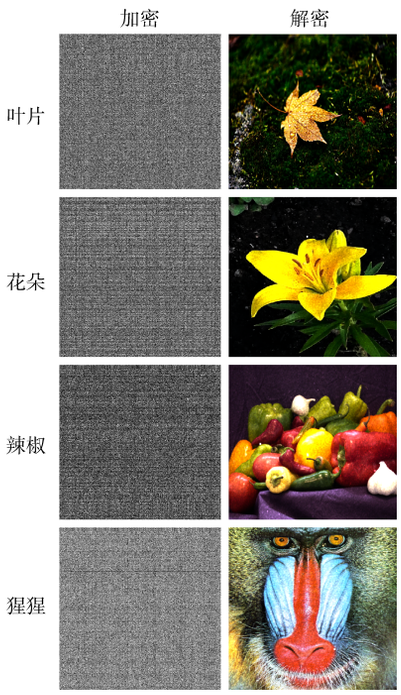


图4　受方差为0.05高斯噪声攻击后的解密图像

Figure 4　decrypted image after being attacked by Gaussian noise with a variance of 0.05

表2　方差为0.05高斯噪声攻击后解密指标

Table 2　decryption indicators after Gaussian noise attack with variance of 0.05

指标	叶片	花朵	辣椒	猩猩
PSNR	21.67	21.83	23.27	20.54
SSIM	0.38	0.27	0.25	0.51

图5展示了随着高斯噪声方差从0.01逐渐增大至0.1,解密图像的PSNR值和SSIM值的变化趋势。可以看出随着噪声方差增大,PSNR值逐渐降低,但趋势较缓,且数值仍然在可接受范围内;此外,由于高斯噪声会破坏图像的结构信息,因此SSIM值也会随噪声方差的增大逐渐降低。整体而言,QHT的多通道协同机制为抗噪性提供了有效支撑,在中等强度噪声环境下能满足“解密图像可辨识”的核心需求,实验PSNR和SSIM指标结果体现了所提方法对高斯噪声的鲁棒性。

5.4　剪裁攻击

加密图像遭受比例为40%的中心剪裁攻击和边缘剪裁攻击后的解密图像如图6和7所示。实验表明,当加密图像遭受严重的局部信息缺失时,尽管解密图像的纹理和色彩受到一定影响,但从解密图像中仍可辨识原始图像的关键内容。解密图像

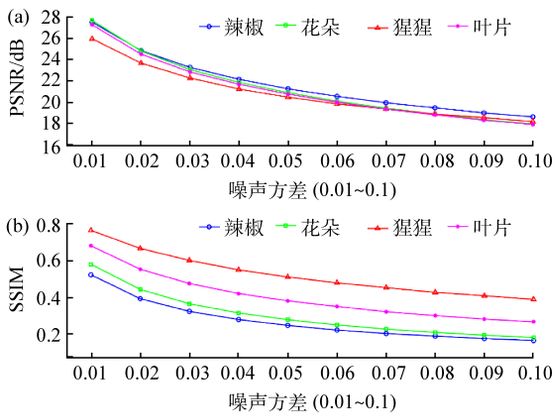


图5　解密图像随噪声方差的变化

(a)PSNR;(b)SSIM

Figure 5　PSNR and SSIM of the decrypted image with respect to noise variance

(a) PSNR;(b) SSIM

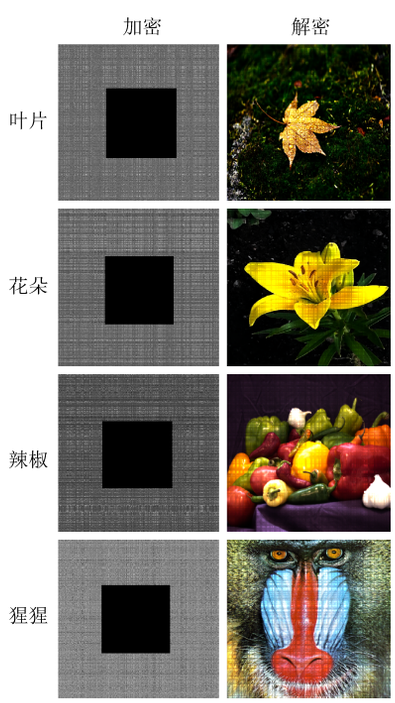


图6　比例为40%的中心剪裁攻击效果

Figure 6　effect diagram of a 40% center cropping attack

的指标表明(表3),四组图像平均PSNR>20 dB,平均SSIM为0.53,处于“中等结构相似性”阈值,验证了QHT多通道协同频域调制的有效性,同时,算法对结构冗余高、关键信息分布式的图像(叶片、花朵)保护效果更优,QHT可满足对“局部信息易丢失场景”的加密需求。随着局部信息缺失程度逐渐增大(图8),解密图像的PSNR值和SSIM值的变化趋势。可以看出,随着剪裁攻击的比例增大,PSNR值逐渐降低,同时SSIM值也会随剪裁比例的增大逐

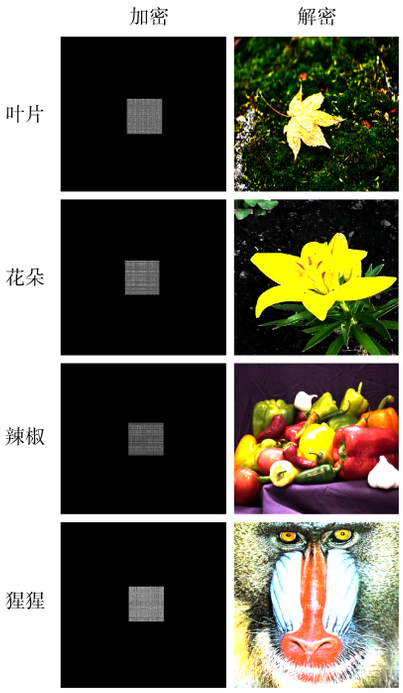


图7　比例为40%的边缘剪裁攻击效果

Figure 7　effect diagram of edge cropping attack with a proportion of 40%

表3　比例为40%边缘剪裁攻击后指标

Table 3　indicators after 40% edge cropping attack

指标	叶片	花朵	辣椒	猩猩
PSNR	23.40	21.12	21.20	16.14
SSIM	0.68	0.61	0.42	0.40

渐降低,直到剪裁比例为50%时,图像已经难以恢复,实验表明所提算法最多能抵抗50%的剪裁攻击,验证了所提方法对于局部信息缺失具有鲁棒性。

5.5　密钥敏感性分析

本节选择flower.jpg图作为测试图像,在实验过程中对正确密钥进行微小扰动,并利用扰动后的密钥进行图像解密[28-29]。实验采用密钥为四维混沌参数(对应式(29)的二维Logistic映射),对密钥的4个参数分别施加5级量化扰动。图9展示了解密图像与原始图像之间的均方误差(mean squared error, MSE)随密钥取值的变化情况。结果表明:在密钥正确的情况下,解密图像的均方误差最小;当密钥发生微小扰动时,MSE即发生大幅度增长;扰动幅度增至5级($\Delta=\pm1\times10^{-3}$)时,MSE达0.143 8(增幅799%),解密图像完全失真(视觉上呈噪声状)。说明解密图像与原始图像之间产生显著差异。实验结果验证了所提方法对密钥具有高敏感度。

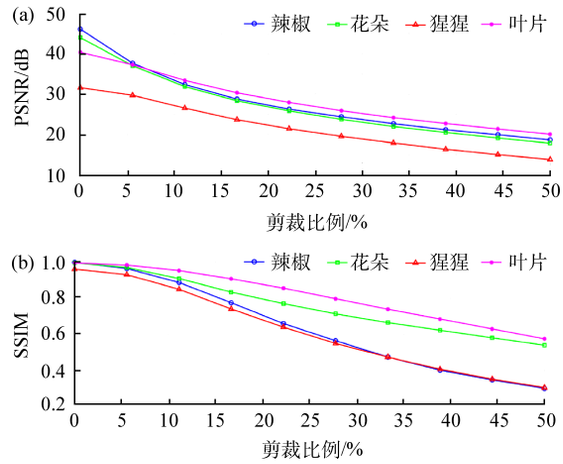


图8　解密图像随剪裁比例的变化

(a)PSNR;(b)SSIM

Figure 8　changes of the decrypted image with respect to the cropping ratio

(a) PSNR;(b) SSIM

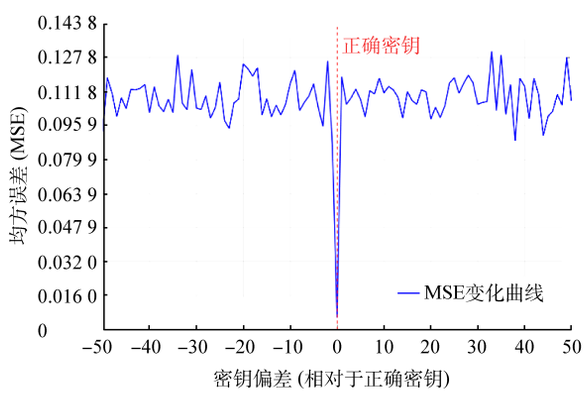


图9　MSE随密钥取值的变化

Figure 9　variation of MSE with the key value

5.6　对比算法分析

本节对所提方法与现有图像加密方法的效果进行对比,所选取的对比方法基于单通道希尔伯特变换[25]。原理上,对比方法是对R、G、B通道进行独立处理,每个通道进行希尔伯特变换,结合像素位置置乱增强加密效果。利用所提方法和对比方法对不同图像进行加密、解密后,解密图像的PSNR和SSIM值见表4,可见本文算法PSNR普遍超过30 dB,而对比算法普遍为13 dB,说明本文算法解密后像素级误差远小于对比算法;本文算法的SSIM几乎接近1,说明本文算法解密图像的纹理、边缘和整体结构与原图高度一致,而对比算法严重失真,实验说明本文算法在彩色图像多通道相关性保留上更优,验证了本文所提QHT方法相比于单通道希尔伯特方法的优越性[30]。

表4 不同图像对比算法指标分析

Table 4 analysis of different image comparison algorithm indicators

指标	叶片		花朵		辣椒		猩猩	
	本文算法	对比算法	本文算法	对比算法	本文算法	对比算法	本文算法	对比算法
PSNR	40.30	13.01	44.02	13.02	32.60	13.63	31.62	13.99
SSIM	0.98	0.66	0.99	0.56	0.98	0.68	0.95	0.54

6 结 论

本文提出了适用于处理四元数信号的希尔伯特变换,并基于该变换提出了适用于彩色RGB图像的图像加密方法。在四元数希尔伯特变换构造过程中,将任意四元数信号分解为2个复信号的线性求和,并利用适用于复信号的希尔伯特变换求取变换结果,确保变换结果始终符合四元数代数结构;此外,基于四元数希尔伯特变换给出了四元数解析信号的构造方法,并推导了四元数希尔伯特变换所满足的常用性质,包括线性、时移、频移、正交性及能量守恒等;最后,基于四元数希尔伯特变换提出了适用于彩色RGB图像的加密方法,通过将彩色图像R、G、B通道联合表征为四元数信号,实现多通道信息的协同处理,解决了单通道拆分处理导致的图像信息关联性丢失问题,提升了图像加密系统的性能。仿真实验验证了所提方法的有效性。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2025. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

参 考 文 献

[1] Liu S, Yang X, Wu J, et al. Robust color image encryption via quaternion Hilbert transform and fractional-order chaos[J]. Optik - International Journal for Light and Electron Optics, 2024, 292: 166987. DOI: 10.1016/j.ijleo.2024.166987.

[2] Díaz L, Morales Y, Torres C, et al. Radial quaternion Hilbert transform for color image encryption in fractional domain[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2023, 40(3): 456-465. DOI: 10.1364/JOSAA.473944.

[3] Rodríguez-Dagnino S, Garrido A, et al. Quaternion-based image encryption using modular arithmetic and Julia sets[J]. Multimedia Tools and Applications, 2022, 81(12): 16543-16562. DOI: 10.1007/s11042-022-12234-8.

[4] Feng X, Tian X L, Xia S W. A novel image encryption algorithm based on fractional Fourier transform and magic cube rotation[C]//2011 4th International Congress on Image and Signal Processing. Shanghai: International Conference on Image Processing, 2011: 1008-1011.

[5] Zhou Y, Pei J, Si W, et al. Delving into quaternion wavelet transformer for facial expression recognition in the wild[J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2025, 27: 3895-3909. DOI: 10.1109/TMM. 2025.3535361.

[6] Feng W, Hu B. Quaternion discrete cosine transform and its application in color template matching [C]// International Conference on Image Processing. 2008 Congress on Image and Signal Processing. May 27-30, 2008. Sanya, China: IEEE, 2008: 252-256. DOI: 10.1109/cisp.2008.61.

[7] Chen Z, Huang X, Yao Q, et al. Secure color image encryption using cascaded quaternion gyrator transforms and phase retrieval[J]. Optics Express, 2021, 29(15): 23456-23472. DOI: 10.1364/OE.432157.

[8] Coxeter H S M. Quaternions and reflections[J]. The American Mathematical Monthly, 1946, 53(3): 136-146. DOI: 10.1080/00029890.1946.11991647.

[9] Zhang X, Wang Y, Liu Z, et al. Quaternion-based color image encryption with adaptive chaotic diffusion and fractional Fourier transform[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2023, 165: 107768. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2023.107768.

[10] Li Y, Chen B, Tian Y, et al. Multi-color image encryption scheme using quaternion-valued neural networks and hyperchaotic maps[J]. Multimedia Tools and Applications, 2022, 81(24): 34321-34340. DOI: 10.1007/s11042-022-13145-9.

[11] Prince A A, Verma P K, Jayakumar C, et al. Efficient architecture for real time implementation of Hilbert Transform in FPGA [C]//2015 IEEE International Conference on Electrical, Computer and Communication Technologies (ICECCT). March 5-7, 2015, Coimbatore, India: IEEE, 2015: 1-5. DOI: 10.1109/ICECCT. 2015.7226158.

[12] Choi K, Liu H P. Hilbert transform, analytic signal, and SSB modulation [PP/OL]. [2025-08-01]. https://ieeexplore.ieee.org/document/7435064.

[13] Bahri M, Ashino R. Some useful results associated with

right-sided quaternion Fourier transform [C]//2018 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR). July 15-18, 2018. Chengdu, China: IEEE, 2018: 161-167. DOI: 10.1109/icwapr. 2018.8521394.

[14] Vakhania N N. Random vectors with values in quaternion Hilbert spaces[J]. Theory of Probability & Its Applications, 1999, 43(1): 99-115. DOI: 10.1137/s0040585x97976696.

[15] Garrido R A, Lamas P, Pino F J. A stochastic programming approach for floods emergency logistics [J]. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 2015, 75: 18-31. DOI: 10.1016/j.tre.2014.12.002.

[16] Hitzer E M S. Directional uncertainty principle for quaternion Fourier transform[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2010, 20(2): 271-284. DOI: 10.1007/s00006-009-0175-2.

[17] Sangwine S J. Fourier transforms of colour images usingquaternion or hyper complex, numbers [J]. Electronics Letters, 1996, 32(21): 1979-1980. DOI: 10.1049/el: 19961331.

[18] Shao Z Q, Liu X J, Yao Z H, et al. Multiple-image encryption based on chaotic phase mask and equal modulus decomposition in quaternion gyrator domain [J]. Signal Processing: Image Communication, 2020, 80: 115662. DOI: 10.1016/j.image.2019.115662.

[19] Zhou N, Tong L, Zou W. Multi-image encryption scheme with quaternion discrete fractional Tchebyshev moment transform and cross-coupling operation [J]. Signal Processing, 2023, 211: 109107. DOI: 10.1016/j.sigpro.2023.109107.

[20] Liu X, Wu Y, Zhang H, et al. Quaternion discrete fractional Krawtchouk transform and its application in color image encryption and watermarking [J]. Signal Processing, 2021, 189: 108275. DOI: 10. 1016/j.sigpro.2021.108275.

[21] Joshi M, Shakher C, Singh K. Image encryption using radial Hilbert transform filter bank as an additional key in the modified double random fractional Fourier encoding architecture [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2010, 48(5): 605-615. DOI: 10.1016/j.optlaseng. 2009.09.014.

[22] Bedrosian E. A product theorem for Hilbert transforms [J]. Proceedings of the IEEE, 1963, 51(5): 868-869. DOI: 10.1109/PROC.1963.2308.

[23] Morales Y, Díaz L, Torres C. Radial Hilbert transform in terms of the Fourier transform applied to image encryption [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2015, 582(1): 012063. DOI: 10.1088/1742-6596/582/1/012063.

[24] Xu L X, Song G X, Liu H S, et al. New 2D hyperchaotic Cubic-Tent map and improved 3D Hilbert diffusion for image encryption[J]. Applied Intelligence, 2025, 55(7): 590. DOI: 10.1007/s10489-025-06414-4.

[25] Hitzer E, Sangwine S J. The orthogonal 2D planes split of quaternions and steerable quaternion Fourier transformations[M]//Hitzer E, Sangwine S J. Quaternion and clifford Fourier transforms and wavelets. Basel: Springer, 2013: 15-39.

[26] Belazi A, Abd El-Latif A A, Diaconu A V, et al. Chaos-based partial image encryption scheme based on linear fractional and lifting wavelet transforms[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2017, 88: 37-50. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2016.07.010.

[27] Sugitomo S, Maeta K. Quaternion valued risk diversification[J]. Entropy, 2020, 22(4): 390. DOI: 10.3390/e22040390.

[28] Jin L, Liu H, Xu X, et al. Quaternion-based impulse noise removal from color video sequences[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2013, 23(5): 741-755. DOI: 10.1109/TCSVT. 2012.2207272.

[29] Chen B, Yu M, Tian Y, et al. Multiple-parameter fractional quaternion Fourier transform and its application in colour image encryption[J]. IET Image Processing, 2018, 12(12): 2238-2249. DOI: 10.1049/iet-ipr.2018.5440.

[30] Ye H X, Zhou N R, Gong L H. Multi-image compression-encryption scheme based on quaternion discrete fractional Hartley transform and improved pixel adaptive diffusion [J]. Signal Processing, 2020, 175: 107652. DOI: 10.1016/j.sigpro.2020.107652.

(责任编辑:马田田)