**DOI**:10.19789/j.1004-9398.2026.02.012　　**Open Access**
**文献引用**:刘继涛,王兢.求解常系数偏微分方程的亥维赛算子法[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(2):82-85+93. LIU J T, WANG J. Heaviside operator method for solving partial differential equations with constant coefficients[J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2026,47(2):82-85+93.

# 求解常系数偏微分方程的亥维赛算子法*

刘继涛[1]，王　兢[2**]

(1. 北京工业大学数学统计学与力学学院，北京　100124；
2. 中央民族大学理学院，北京　100081)

**摘要**:给出了求解非齐次常系数偏微分方程特解的亥维赛算子法。当非齐次项是多项式时,解法简洁明了。当非齐次项是拟多项式时,通过指数变换可以转化为多项式,得到特解。

**关键词**:常系数偏微分方程;算子法;特解
**中图分类号**:O17　　**文献标志码**:A

# Heaviside operator method for solving partial differential equations with constant coefficients*

LIU Jitao[1], WANG Jing[2**]

(1. School of Mathematics, Statistics and Mechanics, Beijing University of Technology, Beijing 100124; 2. College of Science, Minzu University of China, Beijing　100081)

**Abstract**: In this paper, a Heaviside operator method for solving the special solution of partial differential equations with nonhomogeneous constant coefficients is given. When the nonhomogeneous term is a polynomial, the solution is concise and straightforward. When the nonhomogeneous term is a quasi-polynomial, it can be transformed into a polynomial case by exponential transformation, so as to obtain a special solution.

**Keywords**: partial differential equations with constant coefficients; operator method; special solution
**CLC**: O17　　**DC**: A

## 0　引　言

常系数常微分方程的特解对于求其通解是基本的。常微分方程教材中[1-4]也会介绍特定类型方程的特解求法。尽管这个问题很早就受到关注,但对于常系数偏微分方程[5-10],结论则并不丰富,Parsons[11]处理了常数项非零的多项式偏微分算子的多项式特解。

近几十年此问题一直受到关注,Janssen 和 Lambert[12]给出了一种求解线性椭圆型方程特解的递归算法;Matthys 等[13]将上述算法推广到了方程组的情形。对更特殊的偏微分算子,如多项式调和与亥姆霍兹算子;Tsai 等[14]给出了特解的求法,并基于此做了数值算法;Goldberg 等[15]用偏微分算子的幂级数展开,结合切比雪夫多项式给出了计算特解的算法。

由偏微分方程的特解,可以简化方程的求解。Chen 等[16]用基本解方法给出了求调和方程和双调

收稿日期:2024-12-05
*国家自然科学基金项目(12471218);北京工业大学研究生教育教学优秀成果培育项目(057000514125566);中央民族大学研究生教育教学改革项目(GRSCP202339)
**通信作者:wjing@muc.edu.cn

和方程特解的算法;Poullikkas等[17]则对更广泛的一类偏微分算子,结合多项式特解给出求方程解的算法;Dangal等[18]针对多项式基函数,推导出了更一般的常系数偏微分算子的显式特解;近期,Xie等[19]借助经典的勒让德多项式,提出了一种特解方法来求解单位区间上一类变系数的二阶微分方程;Anderson等[20]给出了二维和三维空间中,右侧项为多项式的线性常系数偏微分方程构建解析解的通用方法。其解法涵盖的方程包括各向同性和各向异性的泊松方程、亥姆霍兹方程、斯托克斯方程和麦克斯韦方程等。

以上文章大都注意到了常系数偏微分方程的代数性质。本文的研究也基于求解常微分方程的亥维赛(Heaviside)算子法之代数基础,归结为下述同余方程之求解。

**定理1** 设 $P(x)$ 是一个多项式,常数项 $P(0)=1$,则多项式同余方程

$$P(x)U(x)\equiv 1\left(\bmod x^{m+1}\right) \tag{1}$$

有特解

$$U(x)=1-R(x)+R^2(x)-R^3(x)+\cdots+(-1)^m R^m(x),$$

其中

$$R(x)=P(x)-1。$$

**证明** 由 $P(x)=1+R(x)$ 有

$$P(x)U(x)=$$

$$\left[1+R(x)\right]\left[1-R(x)+\cdots+\cdots+(-1)^m R^m(x)\right]=$$

$$1-(-1)^{m+1}R^{m+1}(x)。$$

由于 $R(x)=P(x)-1=P(x)-P(0)$,所以 $R(x)$ 中每一个单项的次数都≥1,从而 $R^{m+1}(x)$ 中的每个单项的次数都≥ $m+1$。这表明 $x^{m+1}$ 整除 $R^{m+1}(x)$ 中的每个单项,从而 $x^{m+1}\left|R^{m+1}(x)\right.$,这意味着 $x^{m+1}\left|\left[P(x)U(x)-1\right]\right.$,即式(1)成立。

定理1很好地解释了亥维赛算子法的有效性,此观点容易推广到求解常系数偏微分方程的特解。本文将集中讨论这个推广。

## 1 常系数偏微分方程

给定偏微分方程

$$P(\partial)u=f, \tag{2}$$

式中 $f$ 与 $u$ 分别是 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 的已知函数和未知函数,而 $P$ 是各个偏微分 $\partial=(\partial_1,\cdots,\partial_n)$ 的多项式。典型地,$P$ 可以是Laplace算子 $\triangle=\partial_1^2+\cdots+\partial_n^2$,D'Alembert算子(或称波动算子)$\square=\partial_1^2-\partial_2^2-\cdots-\partial_n^2$ 或热算子 $H=\partial_1-\partial_2^2-\cdots-\partial_n^2$。与常微分方程的情况一样,本文的目标是求出式(2)的一个特解 $u$。与文献[21]类似,这里只关注 $f$ 为多项式函数和 $f$ 为拟多项式函数2种情形。所谓拟多项式函数,即形如 $f=\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}g$ 的函数,其中 $g$ 为多项式,

$$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n,\ \lambda\cdot x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$$

是由 $\lambda$ 确定的 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数。经过一个变换后,拟多项式情形可以归结为多项式情形。因此,以下重点讨论 $f$ 为多项式的情形,对于 $f$ 为拟多项式的情形给出简要讨论。

### 1.1 常数项不为零的情形

对于 $P(0)\neq 0$ 的情形,结论显然。不失一般性,设 $P(0)=1$,类似于定理1的推导可得到以下结果。

**定理2** 设 $P(x)$ 是一个多项式,$P(0)=1$,$f$ 为 $m$ 次多项式。则偏微分方程(2)有特解

$$u=\left[1-R(\partial)+R^2(\partial)-R^3(\partial)+\cdots+(-1)^m R^m(\partial)\right]f,$$

其中 $R(\partial)=P(\partial)-1$。

### 1.2 常数项为零的情形

当 $P(0)=0$ 时,取 $P(\partial)$ 中次数最低的某一项。不妨取作

$$\partial^\mu=\partial_1^{\mu_1}\cdots\partial_n^{\mu_n}, \tag{3}$$

则 $P(\partial)$ 可写成

$$P(\partial)=\partial^\mu+R,$$

方程(2)即为

$$(\partial^\mu+R)u=f。 \tag{4}$$

为求解方程(4),一个关键的观察是 $\partial^\mu=\partial_1^{\mu_1}\cdots\partial_n^{\mu_n}$ 有右逆。

记 $I_j$ 表示对 $x_j$ 取变上限的定积分(下限这里取作0,换成其他固定的常数亦可)的积分算子

$$I_jf(x_1,\cdots,x_{j-1},x,x_{j+1},\cdots,x_n)=$$

$$\int_0^x f(x_1,\cdots,x_{j-1},t,x_{j+1},\cdots,x_n)\,\mathrm{d}t。$$

根据一元微积分的基本定理可得 $\partial_iI_if=f$。进一步可得,对任意的正整数 $\mu$ 有 $\partial_i^\mu I_i^\mu f=f$。于是,对 $n$ 元自然数组 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$,有

$$\partial^\mu I^\mu f=f, \tag{5}$$

式中 $I^\mu=I_n^{\mu_n}\cdots I_1^{\mu_1}$。对照式(3),注意因子的次序与 $\partial^\mu$ 相反。式(5)表明,$I^\mu$ 是 $\partial^\mu$ 的右逆。注意到

$$\partial^\mu+R=\partial^\mu+\partial^\mu I^\mu R=\partial^\mu(1+I^\mu R),$$

$$f=1*f=(\partial^\mu I^\mu)f=\partial^\mu(I^\mu f)。$$

将以上2式一并代入式(4),就得到

$$\partial^{\mu}\left[\left(1+I^{\mu}R\right)u\right]=\partial^{\mu}\left(I^{\mu}f\right)。$$

为求出式(4)的特解,只需求方程

$$\left(1+I^{\mu}R\right)u=I^{\mu}f \tag{6}$$

的特解。这个方程与定理1中所考虑的方程很接近,最主要的差别在于,$R$的左边多了一个积分因子$I^{\mu}$。此时,可以得到定理2的推广。

**定理3**　设$P(x)$是一个多项式,$f$为$m$次多项式。$\partial^{\mu}=\partial_1^{\mu_1}\cdots\partial_n^{\mu_n}$是$P(\partial)$中的某个最低次项,其系数为1,次数为$\ell=|\mu|=\mu_1+\cdots+\mu_n$,则微分方程(6)有特解

$$u=\sum_{k=0}^{m+l}(-1)^k(I^{\mu}R)^kI^{\mu}f, \tag{7}$$

式中$R=P(\partial)-\partial^{\mu}$。

以下述例子说明具体解法。注意$I^{\mu}$与$R$中的各项不一定可交换。此外,实际可能用不到$m+\ell+1$项,因为当$f$给定时,$I^{\mu}f$可能被$I^{\mu}R$的更低次数零化了。

**例1**　求偏微分方程

$$\left(\partial_1-\partial_2^2\right)u=3x_1^2x_2^2-2x_1^3 \tag{8}$$

的一个特解。

如前所述,可以取$\partial^{\mu}=\partial_1$,$R=-\partial_2^2$。于是$\ell=1$,现在$f=3x_1^2x_2^2-2x_1^3$的次数$m=4$,从而根据式(7),方程(8)有特解

$$u=\sum_{k=0}^{m+l}(-1)^k(I^{\mu}R)^kI^{\mu}f=$$

$$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k(I_1(-\partial_2^2))^kI_1(3x_1^2x_2^2-2x_1^3)=$$

$$\sum_{k=0}^{5}(I_1\partial_2^2)^kI_1(3x_1^2x_2^2-2x_1^2)=$$

$$\sum_{k=0}^{5}I_1^k\partial_2^{2k}I_1(3x_1^2x_2^2-2x_1^3)=$$

$$\sum_{k=0}^{5}I_1^{k+1}\partial_2^{2k}\left(3x_1^2x_2^2-2x_1^3\right)=$$

$$\sum_{k=0}^{1}I_1^{k+1}\partial_2^{2k}\left(3x_1^2x_2^2-2x_1^3\right)=$$

$$I_1^1(3x_1^2x_2^2-2x_1^3)+I_1^2\partial_2^2(3x_1^2x_2^2-2x_1^3)=$$

$$(x_1^3x_2^2-\frac{1}{2}x_1^4)+I_1^26x_1^2=x_1^3x_2^2。$$

推导中注意到$\partial_2^{2k}I_1=I_1\partial_2^{2k}$且当$k\geqslant 2$时有$\partial_2^{2k}(3x_1^2x_2^2-2x_1^3)=0$。

从上面的计算已经可以看出计算的关键在于$\partial_i$与$I_j$之间的交换性为:若$i\neq j$,则$\partial_iI_j=I_j\partial_i$且若$k\geqslant 2$,则

$$\partial_2^{2k}\left(3x_1^2x_2^2-2x_1^3\right)=0。 \tag{9}$$

由此可见,证明定理3的关键在于如何在一般情形下建立形如式(9)的零化等式。这个从特殊情况的例1到一般情况的定理3推广并不困难,就得到了定理3的下述证明。

注意到$\partial_jI_j=I_j\partial_j$不成立。根据Newton-Leibniz公式,$(I_{\mathrm{D}}f)(x)=f(x)-f(0)$,从而$I_{\mathrm{D}}f=f\Leftrightarrow f(0)=0$。这意味着相同指标之间的微分、积分算子不可交换次序。同时也说明,前面形式计算中采用的$\partial_1^{-1}$的记号其实仅仅是单侧的逆。

**定理3的证明**　对单项多项式$x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$而言,积分1次将使其次数升高1次,微分1次将使其次数降低1次。因此式(6)右边的多项式$I^{\mu}f$的次数为$m+\ell$次。为证明其有特解(7)只要证明,对任意的正整数$m$,在$V_m=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$(即次数不超过$m$的$n$元复系数多项式空间)上,恒有$\left(I^{\mu}R\right)^{m+1}=0$。

注意到单项式$x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$构成$V_m$的一组基,只要证明,当$k_1+\cdots+k_n\leqslant m$时,恒有

$$\left(I^{\mu}R\right)^{m+1}\left(x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\right)=0。 \tag{10}$$

先考虑一个简单的情形:$R=P(\partial)-\partial^{\mu}$中每一项的次数均$>l$。为证明式(10),只要证明$I^{\mu}R$使得每个单项式$x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$的次数至少降1次。微分算子$R=P(\partial)-\partial^{\mu}$中的每一项使得单项式$x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$的次数至少降$l+1$次,而积分算子$I^{\mu}$升高的次数为$|\mu|=l$,因此总的效果$I^{\mu}R$将使得每个单项式$x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$的次数至少降1次。从而经过$m+1$次$I^{\mu}R$的作用以后,一个不超过$m$次的单项式$x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$必定变成零,即得到式(10)。

对于一般情形,令

$$R=P(\partial)-\partial^{\mu}=\sum_{v}c_v\partial^{v}。$$

由$v\neq\mu$且$|v|\geqslant|\mu|$知,对每个$v$,一定存在$i$使得$v_i>\mu_i$,这就意味着$I^{\mu}\partial^{v}$使得$x_i$的次数至少降1次。因此在$\left(I^{\mu}R\right)^{m+1}=\left(\sum_{v}c_v\partial^{v}\right)^{m+1}$的展开式中,每一项都会使得单项式$x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$的总次数至少降低$m+1$次,当$k_1+\cdots+k_n=m$时,就得到零多项式,即有式(10)成立。

### 1.3　拟多项式的情形

如前所述,拟多项式指的是形如$\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}g$的函数,其中$g$为多项式,则有如下的指数平移定理。

**定理4**　(指数平移定理)设 $P$ 是 $n$ 元复系数多项式,$\lambda \in \mathbb{C}^n$,则对 $\mathbb{R}^n$ 中任意可作用的 $g$ 有

$$P(\partial)\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}g = \mathrm{e}^{\lambda\cdot x}P(\partial+\lambda)g。$$

可以利用多项式的定义代入展开验证,也可以先对单个多项式进行验证,再论证一般情形。具体证明细节可以参考文献[21]。

若式(2)中 $f=\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}g$ 为拟多项式,则换元 $u=\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}v$ 后,式(2)变成关于 $v$ 的方程

$$P(\partial+\lambda)v = g,$$

式中 $g$ 为多项式。即化为已经解决的情形。

## 2　结束语

本文给出了求解非齐次常系数偏微分方程特解的亥维赛算子法,从数学角度上讲,该算法具有直观和简洁的特点。本文详细讨论了常数项为零时的算法,并给出了具体算例。当非齐次项是拟多项式时,利用一个变换可以将问题转化为多项式情形,从而得到特解。从应用角度上讲,作为在科学和工程领域中有广泛应用的非齐次常系数偏微分方程,本文提供了一种新的求解该方程特解的思路和方法,未来在数值计算、机器学习、深度学习等领域具有广阔的应用前景。

**志谢**　感谢天津大学刘云朋教授、西北农林科技大学林开亮教授的讨论交流。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2024. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

### 参 考 文 献

[1] 王高雄,周之铭,朱思铭,等.常微分方程[M].3版.北京:高等教育出版社,2013.
WANG G X, ZHOU Z M, ZHU S M, et al. Ordinary differential equations[M].3rd. Beijing: Higher Education Press, 2013.

[2] 丁同仁,李承治.常微分方程教程[M].2版.北京:高等教育出版社,2004.
DING T R, LI C Z. Tutorial on ordinary differential equations[M].2nd. Beijing: Higher Education Press, 2004.

[3] 袁荣.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,2012.
YUAN R. Ordinary differential equations[M]. Beijing: Higher Education Press, 2012.

[4] 张伟年,杜正东,徐冰.常微分方程[M].3版.北京:高等教育出版社,2024.
ZHANG W N, DU Z D, XU B. Ordinary differential equations (the third edition)[M]. 3rd. Beijing: Higher Education Press, 2024.

[5] EVANS L C. Partial differential equations[M]. Providence: American Mathematics Society, 1998.

[6] 姜礼尚,陈亚浙,刘西垣,等.数学物理方程讲义[M].2版.北京:高等教育出版社,1996.
JIANG L S, CHEN Y Z, LIU X Y, et al. Lecture notes on equations of mathematical physics[M].2nd. Beijing: Higher Education Press, 1996.

[7] 谷超豪,李大潜,陈恕行,等.数学物理方程[M].3版.北京:高等教育出版社,2012.
GU C H, LI D Q, CHEN S X, et al. Equations of mathematical physics[M].3rd. Beijing: Higher Education Press, 2012.

[8] 陈恕行.现代偏微分方程导论[M].北京:科学出版社,2005.
CHEN S X. Introduction to modern partial differential equations[M]. Beijing: Science Press, 2005.

[9] 王术.Sobolev空间与偏微分方程引论[M].北京:科学出版社,2009.
WANG S. Sobolev spaces and introduction to partial differential equations[M]. Beijing: Science Press, 2009.

[10] 王明新.现代偏微分方程基本理论[M].北京:科学出版社,2009.
WANG M X. The basic theory of modern partial differential equations[M]. Beijing: Science Press, 2009.

[11] PARSONS D H. Particular integrals of linear partial differential equations with constant coefficients[J]. The Mathematical Gazette, 1958, 42(342): 279-283. DOI: 10.2307/3610442.

[12] JANSSEN H L, LAMBERT H L. Recursive construction of particular solutions to nonhomogeneous linear partial differential equations of elliptic type[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1992, 39: 227-242. DOI: 10.1016/0377-0427(92)90132-H.

[13] MATTHYS L, LAMBERT H, MEY D, et al. A recursive construction of particular solutions to a system of coupled linear partial differential equations with polynomial source term[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1996, 69(2): 319-329. DOI: 10.1016/0377-0427(95)00038-0.

[14] TSAI C C, CHENG A H, CHEN C S. Particular solutions of splines and monomials for polyharmonic and products of Helmholtz operators[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009, 33(4): 514-521. DOI: 10.1016/j.enganabound.2008.08.007.

(下转第93页)

当代化工研究，2024（17）：146-148. DOI：10.20087/j.cnki.1672-8114.2024.17.048.
TANG Y Z，YANG Q B，WANG J，et al，Design and exploration of ionic liquid MOF composites for iodine adsorption properties in chemical experiment teaching［J］. Modern Chemical Research，2024（17）：146-148.

［14］曹璐，王心茹，李洋，等. 固载质子型离子液体催化酯化反应合成香蕉油：可回收固态催化剂的实验教学应用［J］. 云南化工，2024，51（9）：107-112. DOI：10.3969/j.issn.1004-275x.2024.09.24.
CAO L，WANG X R，LI Y，et al，Synthesis of banana oil through esterification reaction catalyzed by proton supported ionic liquids：experimental teaching application of recyclable solid catalysts［J］. Yunnan Chemical Technology，2024，51（9）：107-112.

［15］SEDDON K R. Ionic liquids for clean technology［J］. Journal of Chemical Technology & Biotechnology，1997，68（4）：351-356. DOI：10.1002/（SICI）1097-4660（199704）68：4<351：：AID-JCTB613>3.0. CO；2-4.

［16］SUAREZ P A Z，DSULLIUS J E L，EINLOFT S，et al. The use of new ionic liquids in two-phase catalytic hydrogenation reaction by rhodium complexes［J］. Polyhedron，1996，15（7）：1217-1219. DOI：10.1016/0277-5387（95）00365-7.

［17］SMIGLAK M，METLEN A，ROGERS R D. The second evolution of ionic liquids：from solvents and separations to advanced materials-energetic examples from the ionic liquid cookbook［J］. Accounts of Chemical Research，2007，40：1182-1192. DOI：10.1021/ar7001304.

［18］ZHAI Z W，BARRETO J，KOLLER T M，et al. Correlation of macroscopic surface tension and microscopic surface composition of binary ionic liquid mixtures with common cations and anions of different size［J］. The Journal of Physical Chemistry B，2025，129：2789-2800. DOI：10.1021/acs.jpcb.4c08785.

［19］张普玉，娄帅，金邻豫. 离子液体应用研究进展［J］. 精细化工，2005，22（5）：5324-5327. DOI：10.3321/j.issn：1003-5214.2005.05.002.
ZHANG P Y，LOU S，JIN L Y，et al. Research progress on applications of ionic liquids［J］. Fine Chemicals，2005，22（5）：5324-5327.

［20］赵中华，伍举培. 硝酸不稳定性的探究实验［J］. 化学教学，2009，31（10）：19-20.
ZHAO Z H，WU J P. Exploratory experiment on the instability of nitric acid［J］. Chemistry Teaching，2009，31（10）：19-20.

（责任编辑：王　媛）

（上接第85页）

［15］GOLDBERG M A，MULESHKOV A S，CHEN C S，et al. Polynomial particular solutions for certain partial differential operators［J］. Numerical Methods for Partial Differential Equations，2003，19：112-133. DOI：10.1002/num.10033.

［16］CHEN C S，LEE S，HUANG C S. Derivation of particular solutions using Chebyshev polynomial based functions［J］. International Journal of Computational Methods，2007，4（1）：15-32. DOI：10.1142/S0219876207001096.

［17］POULLIKKAS A，KARAGEORGHIS A，GEORGIOU G. The method of fundamental solutions for inhomogeneous elliptic problems［J］. Computational Mechanics，1998，22：100-107. DOI：10.1007/s004660050344.

［18］DANGAL T，CHEN C S，LIN J. Polynomial particular solutions for solving elliptic partial differential equations［J］. Computers & Mathematics with Applications，2017，73（1）：60-70. DOI：10.1016/j.camwa.2016.10.024.

［19］XIE H T，ZHANG Z Z，JIANG Z W，et al. Method of particular solutions for second - order differential equation with variable coefficients via orthogonal polynomials［EB/OL］.［2024-11-28］. https：//doi. org/10.1155/2023/9748605.

［20］ANDERSON T G，BONNET M，FARIA L M，et al. Construction of polynomial particular solutions of linear constant-coefficient partial differential equations［J］. Computers & Mathematics with Applications，2024，162：94-103. DOI：10.1016/j.camwa.2024.02.045.

［21］林开亮，王兢. 求解常系数线性微分方程的代数解法［J］. 内蒙古师大学学报（自然科学汉文版），2019，48（6）：577-582. DOI：10.3969/j.issn.1001-8735.2019.06.016.
LIN K L，WANG J. An algebraic approach to solve linear differential equation with constant coefficients［J］. Journal of Inner Mongolia Normal University（Natural Science Edition），2019，48（6）：577-582.

（责任编辑：马田田）