DOI:10.19789/j.1004-9398.2026.02.006 **Open Access**
文献引用:高丽,李欣欣.数论函数方程$\varphi_e(n)=Z(SL(n))$ $(e=12)$的可解性[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(2):38-45. GAO L,LI X X. The solvability of arithmetic function equation$\varphi_e(n)=Z(SL(n))$ $(e=12)$ [J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2026,47(2):38-45.

数论函数方程$\varphi_e(n)=Z(SL(n))(e=12)$的可解性*

高 丽[1,2],李欣欣[2**]

(1. 西安翻译学院信息工程学院,陕西 西安 710105;
2. 延安大学数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘要:利用推广的广义Euler函数和Smarandache LCM函数的定义与性质,讨论包含广义Euler函数方程$\varphi_e(n)=Z(SL(n))$在$e=12$时整数解问题。

关键词:可解性;广义Euler函数;Smarandache LCM函数;正整数解
中图分类号:O156 **文献标志码**:A

The solvability of arithmetic function equation $\varphi_e(n)=Z(SL(n))(e=12)$*

GAO Li[1,2], LI Xinxin[2**]

(1. College of Information Engineering, Xi'an Fanyi University, Xi'an Shaanxi 710105;
2. College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi 716000)

Abstract: Using definition and properties of the generalized Euler function and Smarandache LCM function, this paper discusses the integer solutions problems of equations involving generalized Euler functions $\varphi_e(n)=Z(SL(n))(e=12)$.

Keywords: solvability; generalized Euler function; Smarandache LCM function; positive integer solution
CLC:O156 **DC**:A

0 引 言

数论函数方程求解问题一直是数论的重要研究领域。广义Euler函数$\varphi_e(n)$定义为序列$1,2,\cdots,\left[\frac{n}{e}\right]$中与$n$互素的数的个数,其中$\left[\frac{n}{e}\right]$表示对$\frac{n}{e}$进行取整,是Euler函数$\varphi(n)$的推广[1]。Smarandache LCM函数$SL(n)$的定义为最小正整数$m$,使得$1,2,\cdots,m$的最小公倍数能被$n$整除[2],即$SL(n)=\min\{m:m\in Z^+,n|[1,2,\cdots,m]\}$,其中$[1,2,\cdots,m]$表示$1,2,\cdots,m$的最小公倍数。伪Smarandache函数$Z(n)$定义为$Z(n)=\min\left\{m:m\in Z^+,n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.\right\}$,其中$Z^+$是正整数集合[3]。文献[4-8]讨论了包含广义Euler函数方程$SL(n)=\varphi_e(n)$、$\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$、$S(SL(n))=\varphi_e(n)$、$S(SL(n^2))=\varphi_e(n)$以及$S(n)=\varphi_e(SL(n))$的可解性;文献[9-11]讨论了数论函数方程$Z(n^k)=\varphi(n^2)$、$Z(n^k)=\varphi(n^k)$、$k\varphi_2(n(n+$

收稿日期:2024-11-20
*国家自然科学基金项目(11471007)
**通信作者:1148133417@qq.com

1))+$\varphi(n)=2S(SL(n^{11}))$和$Z(n)=\varphi_2(n)$的可解性;文献[12-15]讨论了包含广义Euler复合函数方程$Z(n^2)=\varphi_e(SL(n))$、$Z(n^2)=\varphi_e(SL(n^2))$、$Z(SL(n))=\varphi_e^2(n)$以及$Z(n)=\varphi_e(SL(n))$的可解性;文献[16]讨论了数论函数方程

$$Z(SL(n))=\varphi_e(n)(e=8) \tag{1}$$

的可解性。在现有文献研究基础上,本文做了更进一步的改进,考虑当$e=12$时的情况,得出如下结论。

定理　数论函数方程

$$\varphi_{12}(n)=Z(SL(n)) \tag{2}$$

的所有正整数解为$n=360,3^{\beta}\times 19,3^{\beta_1}\times 38,13p_1,21p_2,26p_3,28p_4,36p_5,42p_6$,其中$\beta\geqslant 3$且为奇数,$\beta_1\geqslant 4$且为偶数,$p_1\geqslant 17,p_2\geqslant 11,p_3\geqslant 17,p_4\geqslant 11,p_5\geqslant 11,p_6\geqslant 11$,且所有$p_i(1\leqslant i\leqslant 6)$均为奇素数。

1　预备知识

本文记$\Omega(n)$为n的素因子个数且可重复计数;$\omega(n)$为n的不同的素因子个数,$\Omega(1)=\omega(1)=0$。

引理1[17]　当$n\geqslant 3$时,$\varphi(n)$为偶数。

引理2[18]　若$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$是$n$的标准分解式,则$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$,其中$\alpha_i\geqslant 1$。

引理3[18]　对任意素数$p\geqslant 3,k\in\mathbf{N},Z(p^k)=p^k-1$。当$p=2$时,有$Z(2^k)=2^{k+1}-1$。

引理4[19]　若$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中$p_1,p_2,\cdots,p_k$为互异的素数,则$SL(n)=\max\{p_i^{\alpha_i}|i=1,2,\cdots,k\}$,$\alpha_i\geqslant 1$。当$p$为素数且$k\geqslant 1$时,$SL(p^k)=p^k$。

引理5[20]　若$n=2^{\alpha},\alpha>0$,则

$$\varphi_8(n)=\begin{cases}0, & \alpha=1,2;\\ 1, & \alpha=3;\\ 2^{\alpha-4}, & \alpha\geqslant 4。\end{cases}$$

引理6[20]　若$n=2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>8$,其中$p_i(1\leqslant i\leqslant k)$是不同的奇素数。记$P_k=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$,$R_{P_k}=\{r_i|p_i\equiv r_i(\mathrm{mod}8),0\leqslant r_i\leqslant 7,p_i\in P_k,1\leqslant i\leqslant k\}$,则

$$\varphi_8(n)=\begin{cases}\frac{1}{8}\varphi(n)+\frac{1}{4}(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha}, \alpha\in\{0,1\},R_{P_k}=\{5,7\},\{5\};\\ \frac{1}{8}\varphi(n)+\frac{1}{8}(-1)^{\Omega(n)-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}2^{\omega(n)-\frac{1}{2}(1-(-1)^{\alpha})}, \alpha\in\{0,1,2\},R_{P_k}=\{3,7\},\{3\};\\ \frac{1}{8}\varphi(n)+\frac{1}{8}(-1)^{\Omega(n)-\left[\frac{\alpha}{2}\right]}2^{\omega(n)-\frac{1}{2}(1-(-1)^{\alpha})}+\frac{1-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}{4}(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)}, \alpha\in\{0,1,2\},R_{P_k}=\{7\};\\ \frac{1}{8}\varphi(n),\text{其他}。\end{cases}$$

引理7[20]　若$n=2^{\alpha}3^{\beta}\geqslant 12$,则

$$\varphi_{12}(n)=\begin{cases}\frac{1}{12}\varphi(n)-\frac{1}{2}(-1)^{\Omega(n)}, \alpha\in\{0,1\};\\ \frac{1}{12}\varphi(n)+\frac{1}{3}(-1)^{\Omega(n)}, \beta\in\{0,1\};\\ \frac{1}{12}\varphi(n),\text{其他}。\end{cases}$$

引理8[20]　若$n=2^{\alpha}3^{\beta}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>12$,其中$p_i(1\leqslant i\leqslant k)$是不同的奇素数且$\gcd(p_i,6)=1,1\leqslant i\leqslant k$。记$P_k=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$,$R'_{P_k}=\{r_i|p_i\equiv r_i(\mathrm{mod}12),0\leqslant r_i\leqslant 11,p_i\in P_k,1\leqslant i\leqslant k\}$,则

$$\varphi_{12}(n)=\begin{cases}\frac{1}{12}\varphi(n)+\frac{1}{4}(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha}, \alpha\in\{0,1\},\beta=0,R'_{P_k}=\{7,11\},\{7\};\\ \frac{1}{12}\varphi(n)+\frac{1}{4}(-1)^{\Omega(n)+1}2^{\omega(n)-\alpha}, \alpha\in\{0,1\},\beta\geqslant 2,R'_{P_k}=\{7,11\},\{7\},\{11\};\\ \frac{1}{12}\varphi(n)+\frac{1}{6}(-1)^{\Omega(n)+\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}2^{\omega(n)-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]-\beta}, \alpha\in\{0,1,2\},\beta\in\{0,1\},R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\},\\ \qquad \text{或}\alpha\in\{0,1\},\beta=1,R'_{P_k}=\{11\},\text{或}\alpha=2,\beta\in\{0,1\},R'_{P_k}=\{11\};\\ \frac{1}{12}\varphi(n)+\frac{1}{6}(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\beta}, \alpha\geqslant 3,\beta\in\{0,1\},R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\},\{11\};\\ \frac{1}{12}\varphi(n)+\frac{5}{12}(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)}, \alpha=0,\beta=0,R'_{P_k}=\{11\};\\ \frac{1}{12}\varphi(n)+\frac{1}{12}(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}, \alpha=1,\beta=0,R'_{P_k}=\{11\};\\ \frac{1}{12}\varphi(n),\text{其他}。\end{cases}$$

2 定理的证明

$n \leqslant 12$时,方程(2)无解,以下讨论$n > 12$时解的情况。

情况1 设$n = 2^{\alpha}3^{\beta} > 12, \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$。由引理4知$SL(n) = \max\{2^{\alpha}, 3^{\beta}\}$。

情况1.1 若$\alpha \in \{0, 1\}$,则$\beta \geqslant 2, \varphi(2^{\alpha}) = 1$。设$SL(n) = 3^{\beta}$,由引理3有$Z(SL(n)) = Z(3^{\beta}) = 3^{\beta} - 1$,从而由引理2和7可得式(2)为

$$3^{\beta-2} - (-1)^{\Omega(n)} = 2(3^{\beta} - 1),$$

此时$3^{\beta-2} - (-1)^{\Omega(n)} < 2(3^{\beta} - 1)$,矛盾,此时方程无解。

情况1.2 若$\beta \in \{0, 1\}$,则$\alpha \geqslant 3, \varphi(3^{\beta}) \leqslant 2$。设$SL(n) = 2^{\alpha}$,由引理3有$Z(SL(n)) = Z(2^{\alpha}) = 2^{\alpha+1} - 1$,从而由引理2和7可得式(2)为

$$2^{\alpha-3}\varphi(3^{\beta}) + (-1)^{\Omega(n)} = 3(2^{\alpha+1} - 1) \leqslant 2^{\alpha-2} + (-1)^{\Omega(n)},$$

此时$3(2^{\alpha+1} - 1) > 2^{\alpha-2} + (-1)^{\Omega(n)}$矛盾,方程无解。

情况1.3 若$\alpha \geqslant 2$且$\beta \geqslant 2$。

情况1.3.1 设$SL(n) = 2^{\alpha}$,则$\alpha \geqslant 4$。由引理3有$Z(SL(n)) = Z(2^{\alpha}) = 2^{\alpha+1} - 1$,从而由引理2和7可得式(2)为

$$2^{\alpha-2} \cdot 3^{\beta-2} = 2^{\alpha+1} - 1,$$

等式两边的奇偶性不同,矛盾,此时方程(2)无解。

情况1.3.2 设$SL(n) = 3^{\beta}$,则$\beta \geqslant 2$。由引理3有$Z(SL(n)) = Z(3^{\beta}) = 3^{\beta} - 1$,从而由引理2和7可得式(2)为

$$2^{\alpha-2} \cdot 3^{\beta-2} = 3^{\beta} - 1,$$

根据等式两边的3的个数可知$\beta = 2$,则$\alpha = 5$,此时$SL(n) = 2^5 \neq 3^2$,矛盾,此时方程(2)无解。

情况2 设$n = 2^{\alpha}3^{\beta}\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} > 12$,其中$\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, k \geqslant 1, \alpha_i \geqslant 1, p_i$是不同的奇素数,$1 \leqslant i \leqslant k$,并且$\gcd(p_i, 6) = 1$, 记 $P_k = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$, $R'_{P_k} = \{r_i \mid p_i \equiv r_i \pmod{12}, 0 \leqslant r_i \leqslant 11, p_i \in P_k, 1 \leqslant i \leqslant k\}$。令 $n = p_k^{\alpha_k}m_k$, 且 $\gcd(p_k, m_k) = 1$。由引理4知$SL(n) = \max\{2^{\alpha}, 3^{\beta}, p_i^{\alpha_i} \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$。

情况2.1 若$\alpha \in \{0, 1\}, \beta = 0, R'_{P_k} = \{7, 11\}, \{7\}$。

设 $SL(n) = {p_k}^{\alpha_k}$, 由引理3有 $Z(SL(n)) = Z(p_k^{\alpha_k}) = p_k^{\alpha_k} - 1$,从而由引理2和8可得式(2)为

$$p_k^{\alpha_k-1}(p_k - 1)\varphi(m_k) + 3 \times (-1)^{\Omega(n)}2^k = 12(p_k^{\alpha_k} - 1), \quad (3)$$

从而有

$$(p_k - 1)\left(p_k^{\alpha_k-1}\varphi(m_k) - \frac{12(p_k^{\alpha_k} - 1)}{p_k - 1}\right) = 3 \times (-1)^{\Omega(n)+1}2^k,$$

则有$p_k - 1 \mid 3 \times 2^k$。又因为$R'_{P_k} = \{7, 11\}, \{7\}$,所以$p_k = 7$。

若$k = 1$,则$\alpha_1 \geqslant 1$,从而$\varphi(m_k) = \varphi(2^{\alpha}) = 1$。故由式(3)有

$$(-1)^{\Omega(n)+1} \times 6 - 12 = 6p_1^{\alpha_1-1} - 12p_1^{\alpha_1} \leqslant -78,$$

矛盾,方程(2)无解。

若$k = 2$,则$\alpha_k \geqslant 2, p_1 \geqslant 11, \varphi(m_k) = \varphi(2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}) \geqslant 10$。由式(3)有

$$(-1)^{\Omega(n)+1} \times 12 - 12 = 6\varphi(m_k)p_k^{\alpha_k-1} - 12p_k^{\alpha_k} = (6\varphi(m_k) - 84)p_k^{\alpha_k-1} \geqslant -24p_k^{\alpha_k-1}。$$

当$\varphi(m_k) > 14$时,$(-1)^{\Omega(n)+1} \times 12 - 12 = (6\varphi(m_k) - 84)p_k^{\alpha_k-1} > 0$,矛盾,所以$10 \leqslant \varphi(m_k) \leqslant 14$。当$\Omega(n)$为偶数时有$-24 = (6\varphi(m_k) - 84)p_k^{\alpha_k-1}$,因为$7 \nmid 24$,方程无解。当$\Omega(n)$为奇数时有$0 = (6\varphi(m_k) - 84)p_k^{\alpha_k-1}$,可得$\varphi(m_k) = 14$,不是Euler商数,方程(2)无解。

若$k \geqslant 3$,则$\alpha_k \geqslant 2$,至少存在$k - 2$个$p_i \geqslant 19, 1 \leqslant i \leqslant k - 1$,且所有$p_i - 1 > 2^3$。设$p_{k-1} \geqslant 19$,则有

$$(p_{k-1} - 1)(p_k - 1) \geqslant 18(p_k - 1) > 12p_k,$$

且有

$$\prod_{i=1}^{k-2}(p_i - 1) - 1 > 2^{3(k-2)} - 1 > 2^{3(k-2)-1},$$

故由式(3)有

$$3 \times (-1)^{\Omega(n)+1}2^k - 12 = p_k^{\alpha_k-1}((p_k - 1)\varphi(m_k) - 12p_k) > p_k^{\alpha_k-1}\left(12p_k\prod_{i=1}^{k-2}(p_i - 1) - 12p_k\right) = 12p_k^{\alpha_k}\left(\prod_{i=1}^{k-2}(p_i - 1) - 1\right) > 2^3 \times 2^2 \times 2^{3(k-2)-1} > 3 \times 2^k。$$

矛盾,此时方程无解。

情况2.2 若$\alpha \in \{0, 1\}, \beta \geqslant 2, R'_{P_k} = \{7, 11\}, \{7\}, \{11\}$。

情况2.2.1 设$SL(n) = 3^{\beta}$,令$n = 3^{\beta}m_0$,则$\gcd(3, m_0) = 1$。由引理3有$Z(SL(n)) = Z(3^{\beta}) = 3^{\beta} - 1$,从而由引理2和8可得式(2)为

$$2 \times 3^{\beta-1}\varphi(m_0) + 3 \times (-1)^{\Omega(n)+1}2^{k+1} = 12(3^{\beta} - 1), \quad (4)$$

从而有

$$2(3^{\beta-1}\varphi(m_0) - 6(3^{\beta} - 1)) = 3 \times (-1)^{\Omega(n)+2}2^{k+1}。$$

若$k = 1$,则$p_1 \geqslant 7, \varphi(m_0) = \varphi(2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}) \geqslant 6$。故由式(4)有

$$(-1)^{\Omega(n)+2} \times 12 - 12 = 2 \times 3^{\beta-1}\varphi(m_0) - 12 \times 3^{\beta} = (2\varphi(m_0) - 36) \cdot 3^{\beta-1} \geqslant -8 \times 3^{\beta},$$

当$\varphi(m_0)>18$时,$(-1)^{\Omega(n)+2}\times 12-12=(2\varphi(m_0)-36)\cdot 3^{\beta-1}>0$,矛盾,所以$6\leqslant\varphi(m_0)\leqslant 18$。当$\Omega(n)$为偶数时有$0=(2\varphi(m_0)-36)\cdot 3^{\beta-1}$,可得$\varphi(m_0)=18$,从而$m_0=19,27,38,54$。又因为$\gcd(3,m_0)=1$,故$m_0=19,38$,所以$n=19\times 3^{\beta}$($\beta\geqslant 3$且为奇数),$3^{\beta_1}\times 38$($\beta_1\geqslant 4$且为偶数),经检验均为方程(2)的解。当$\Omega(n)$为奇数时有$-24=(2\varphi(m_0)-36)\cdot 3^{\beta-1}$,由等式两边3的个数可知$\beta=2$,则$\varphi(m_0)=14$,不是Euler商数,方程(2)无解。

若$k=2$,则必有$\beta\geqslant 3$,$p_i\geqslant 7$,那么至少存在1个$p_i\geqslant 11$,$1\leqslant i\leqslant 2$,从而$\varphi(m_0)=\varphi(2^{\alpha}\cdot p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2})\geqslant 60$。故由式(4)有

$$(-1)^{\Omega(n)+2}\times 24-12=2\times 3^{\beta-1}\varphi(m_0)-12\times 3^{\beta}=(2\varphi(m_0)-36)\cdot 3^{\beta-1}\geqslant 28\times 3^{\beta}。$$

矛盾,方程(2)无解。

若$k\geqslant 3$,则$\beta\geqslant 3$,那么至少存在$k-2$个$p_i\geqslant 19$,$1\leqslant i\leqslant k$,同时所有$p_i-1>2^2$。不妨设$p_k\geqslant 19$,则有

$$2(p_k-1)\geqslant 36,$$

且有

$$\prod_{i=1}^{k-1}(p_i-1)-1>2^{2(k-1)}-1>2^{2(k-1)-1},$$

故由式(4)有

$$3\times(-1)^{\Omega(n)+2}2^{k+1}-12=3^{\beta-1}(2\varphi(m_0)-36)\geqslant 3^{\beta-1}(36\prod_{i=1}^{k-1}(p_i-1)-36)=4\times 3^{\beta+1}(\prod_{i=1}^{k-1}(p_i-1)-1)>2^2\times 2^4\times 2^{2(k-1)-1}>3\times 2^{k+1}。$$

矛盾,此时方程(2)无解。

情况2.2.2　若$SL(n)=p_k{}^{\alpha_k}$,利用引理3可得$Z(SL(n))=Z(p_k^{\alpha_k})=p_k^{\alpha_k}-1$,从而由引理2和8可得式(2)为

$$p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\varphi(m_k)+3\times(-1)^{\Omega(n)+1}2^{k+1}=12(p_k^{\alpha_k}-1),\tag{5}$$

从而有

$$(p_k-1)(p_k^{\alpha_k-1}\varphi(m_k)-\frac{12(p_k^{\alpha_k}-1)}{p_k-1})=3\times(-1)^{\Omega(n)+2}2^{k+1},$$

则有$p_k-1\mid 3\times 2^{k+1}$,又因为$R'_{P_k}=\{7,11\},\{7\},\{11\}$,所以$p_k=7$。

若$k=1$,则$\alpha_1\geqslant 2$,从而$\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta})\geqslant 6$。故由式(5)有

$$(-1)^{\Omega(n)+2}\times 12-12=6\varphi(m_k)p_1^{\alpha_1-1}-12p_1^{\alpha_1}=(6\varphi(m_k)-84)p_1^{\alpha_1-1}\geqslant -48p_1^{\alpha_1-1},$$

当$\varphi(m_k)>14$时,$(-1)^{\Omega(n)+2}\times 12-12=(6\varphi(m_k)-84)p_1^{\alpha_1-1}>0$,显然矛盾,所以$6\leqslant\varphi(m_k)\leqslant 14$。当$\Omega(n)$为偶数时有$0=(6\varphi(m_k)-84)p_1^{\alpha_1-1}$,可得$\varphi(m_k)=14$,不是Euler商数,此时方程(2)无解。若$\Omega(n)$为奇数,则$-24=(6\varphi(m_k)-84)p_1^{\alpha_1-1}$,因为$7\nmid 24$,方程(2)无解。

若$k=2$,必有$\alpha_k\geqslant 2$,$p_1\geqslant 11$,可得$\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta}p_1^{\alpha_1})\geqslant 60$。由式(5)有

$$(-1)^{\Omega(n)+2}\times 24-12=6\varphi(m_k)p_k^{\alpha_k-1}-12p_k^{\alpha_k}=(6\varphi(m_k)-84)p_k^{\alpha_k-1}\geqslant 276p_k^{\alpha_k-1}。$$

矛盾,方程(2)无解。

若$k\geqslant 3$,则$\alpha_k\geqslant 2$,至少存在$k-2$个$p_i\geqslant 19$,$1\leqslant i\leqslant k-1$,且所有$p_i-1>2^3$。设$p_{k-1}\geqslant 19$,则有

$$(p_{k-1}-1)(p_k-1)\geqslant 18(p_k-1)>12p_k,$$

且有

$$\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1>2^{3(k-2)}-1>2^{3(k-2)-1},$$

故由式(5)有

$$3\times(-1)^{\Omega(n)+2}2^{k+1}-12=p_k^{\alpha_k-1}((p_k-1)\varphi(m_k)-12p_k)>p_k^{\alpha_k-1}(12p_k\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-12p_k)=12p_k^{\alpha_k}(\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1)>2^3\times 2^2\times 2^{3(k-2)-1}>3\times 2^{k+1}。$$

矛盾,此时方程无解。

情况2.3　若$\alpha\in\{0,1,2\}$,$\beta\in\{0,1\}$,$R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\}$,或$\alpha\in\{0,1\}$,$\beta=1$,$R'_{P_k}=\{11\}$,或$\alpha=2$,$\beta\in\{0,1\}$,$R'_{P_k}=\{11\}$。

情况2.3.1　根据定理2中情况2.3的题设可得

$$\begin{cases}\alpha=0,\beta=0,R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\};\\ \alpha=0,\beta=1,R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\},\{11\}。\end{cases}\tag{6}$$

设$SL(n)=p_k{}^{\alpha_k}$,由引理3有$Z(SL(n))=Z(p_k^{\alpha_k})=p_k^{\alpha_k}-1$,由引理2和8可得式(2)为

$$p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\varphi(m_k)+(-1)^{\Omega(n)}2^{k+1}=12(p_k^{\alpha_k}-1),\tag{7}$$

从而有

$$(p_k-1)(p_k^{\alpha_k-1}\varphi(m_k)-\frac{12(p_k^{\alpha_k}-1)}{p_k-1})=(-1)^{\Omega(n)+1}2^{k+1},$$

则有$p_k-1\mid 2^{k+1}$,又因为R'_{P_k}的值满足式(6),所以$p_k=5$。

若$k=1$,则$\alpha_1\geqslant 1$,从而$\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta})\leqslant 2$。故由式(7)有

$(-1)^{\Omega(n)+1}\times 4-12=4\varphi(m_k)p_1^{\alpha_1-1}-12p_1^{\alpha_1}\leqslant -52$,矛盾,此时方程无解。

若 $k=2$,则 $\alpha_k\geqslant 2$,$p_1\geqslant 11$,从而 $\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta}p_1^{\alpha_1})\geqslant 10$。故由式(7)有

$$(-1)^{\Omega(n)+1}\times 8-12=4\varphi(m_k)p_k^{\alpha_k-1}-12p_k^{\alpha_k}=(4\varphi(m_k)-60)p_k^{\alpha_k-1}\geqslant -20p_k^{\alpha_k-1}。$$

当 $\varphi(m_k)\geqslant 15$ 时,$(-1)^{\Omega(n)+1}\times 8-12=(4\varphi(m_k)-60)p_k^{\alpha_k-1}\geqslant 0$,矛盾,则有 $10\leqslant\varphi(m_k)\leqslant 14$。若 $\Omega(n)$ 为偶数则 $-20=(4\varphi(m_k)-60)p_k^{\alpha_k-1}$,比较等式两边5的幂次可知 $\alpha_k=2$,则 $\varphi(m_k)=14$,不是Euler商数,方程(2)无解。若 $\Omega(n)$ 为奇数则有 $-4=(4\varphi(m_k)-60)p_k^{\alpha_k-1}$,因为 $5\nmid 4$,此时方程(2)无解。

若 $k\geqslant 3$,则有 $\alpha_k\geqslant 2$,至少存在 $k-2$ 个 $p_i\geqslant 17$,其中 $1\leqslant i\leqslant k-1$,且 $p_i-1>2^3$。设 $p_{k-1}\geqslant 17$,则有

$$(p_{k-1}-1)(p_k-1)\geqslant 16(p_k-1)>12p_k,$$

$$\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1>2^{3(k-2)}-1>2^{3(k-2)-1},$$

故由式(7)有

$$(-1)^{\Omega(n)+1}2^{k+1}-12=p_k^{\alpha_k-1}((p_k-1)\varphi(m_k)-12p_k)>p_k^{\alpha_k-1}(12p_k\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-12p_k)=12p_k^{\alpha_k}(\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1)>2^3\times 2^2\times 2^{3(k-2)-1}>2^{k+1}。$$

矛盾,此时方程无解。

情况2.3.2 根据定理2中情况2.3的题设可得

$$\begin{cases}\alpha=1,\beta=0,R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\};\\ \alpha=2,\beta=0,R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\},\{11\};\\ \alpha\in\{1,2\},\beta=1,R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\},\{11\}。\end{cases}\tag{8}$$

设 $SL(n)=p_k{}^{\alpha_k}$,由引理3有 $Z(SL(n))=Z(p_k^{\alpha_k})=p_k^{\alpha_k}-1$,由引理2和8可得式(2)为

$$p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\varphi(m_k)+(-1)^{\Omega(n)+1}2^{k+1}=12(p_k^{\alpha_k}-1),\tag{9}$$

从而有

$$(p_k-1)(p_k^{\alpha_k-1}\varphi(m_k)-\frac{12(p_k^{\alpha_k}-1)}{p_k-1})=(-1)^{\Omega(n)+2}2^{k+1},$$

则有 $p_k-1\mid 2^{k+1}$,又因为 R'_{P_k} 的值满足式(8),所以 $p_k=5$。

若 $k=1$,则 $\alpha_1\geqslant 1$,从而 $\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta})\leqslant 4$。故由式(9)有

$(-1)^{\Omega(n)+2}\times 4-12=4\varphi(m_k)p_1^{\alpha_1-1}-12p_1^{\alpha_1}\leqslant -44$,矛盾,此时方程(2)无解。

若 $k=2$,则 $\alpha_k\geqslant 2$,$p_1\geqslant 11$,从而有 $\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta}p_1^{\alpha_1})\geqslant 10$。利用式(9)有

$$(-1)^{\Omega(n)+2}\times 8-12=4\varphi(m_k)p_k^{\alpha_k-1}-12p_k^{\alpha_k}=(4\varphi(m_k)-60)p_k^{\alpha_k-1}\geqslant -20p_k^{\alpha_k-1}。$$

当 $\varphi(m_k)\geqslant 15$ 时,$(-1)^{\Omega(n)+2}\times 8-12=(4\varphi(m_k)-60)p_k^{\alpha_k-1}\geqslant 0$,矛盾,则 $10\leqslant\varphi(m_k)\leqslant 14$。当 $\Omega(n)$ 为偶数,有 $-4=(4\varphi(m_k)-60)p_k^{\alpha_k-1}$,因为 $5\nmid 4$,此时方程(2)无解。若 $\Omega(n)$ 为奇数,则 $-20=(4\varphi(m_k)-60)p_k^{\alpha_k-1}$,比较等式两边5的幂次可知 $\alpha_k=2$,则 $\varphi(m_k)=14$,不是Euler商数,此时方程(2)无解。

若 $k\geqslant 3$,则 $\alpha_k\geqslant 2$,至少存在 $k-2$ 个 $p_i\geqslant 17$,其中 $1\leqslant i\leqslant k-1$ 且 $p_i-1>2^3$。设 $p_{k-1}\geqslant 17$,则有

$$(p_{k-1}-1)(p_k-1)\geqslant 16(p_k-1)>12p_k,$$

$$\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1>2^{3(k-2)}-1>2^{3(k-2)-1},$$

故由式(9)有

$$(-1)^{\Omega(n)+2}\cdot 2^{k+1}-12=p_k^{\alpha_k-1}((p_k-1)\varphi(m_k)-12p_k)>p_k^{\alpha_k-1}(12p_k\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-12p_k)=12p_k^{\alpha_k}(\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1)>2^3\times 2^2\times 2^{3(k-2)-1}>2^{k+1}。$$

矛盾,此时方程无解。

情况2.4 若 $\alpha\geqslant 3,\beta\in\{0,1\},R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\},\{11\}$。

情况2.4.1 若 $SL(n)=2^{\alpha}$,不妨设 $n=2^{\alpha}m$,则有 $\gcd(2,m)=1$。利用引理3得 $Z(SL(n))=Z(2^{\alpha})=2^{\alpha+1}-1$,由引理2和8可得式(2)为

$$2^{\alpha-3}\varphi(m)+(-1)^{\Omega(n)}2^k=3(2^{\alpha+1}-1),$$

因为 $R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\},\{11\}$,故利用引理1可得 $\varphi(m)$ 为 $\geqslant 4$ 的偶数。等式两边奇偶性不同,矛盾,此时方程(2)无解。

情况2.4.2 设 $SL(n)=p_k^{\alpha_k}$,由引理3知 $Z(SL(n))=Z(p_k^{\alpha_k})=p_k^{\alpha_k}-1$,从而由引理2和8可得式(2)为

$$p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\varphi(m_k)+(-1)^{\Omega(n)}2^{k+2}=12(p_k^{\alpha_k}-1),\tag{10}$$

从而有

$$(p_k-1)(p_k^{\alpha_k-1}\varphi(m_k)-\frac{12(p_k^{\alpha_k}-1)}{p_k-1})=(-1)^{\Omega(n)+1}2^{k+2},$$

则有 $p_k-1\mid 2^{k+2}$,又因为 $R'_{P_k}=\{5,11\},\{5\},\{11\}$,所以 $p_k=5$。

若 $k=1$,则 $\alpha_1\geqslant 2$,从而 $\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta})\geqslant 4$。故由式(10)有

$$(-1)^{\Omega(n)+1}\times 8-12=4\varphi(m_k)p_1^{\alpha_1-1}-12p_1^{\alpha_1}=(4\varphi(m_k)-60)p_1^{\alpha_1-1}\geqslant -44p_1^{\alpha_1-1},$$

当$\varphi(m_k)\geqslant 15$时,$(-1)^{\Omega(n)+1}\times 8-12=(4\varphi(m_k)-60)p_1^{\alpha_1-1}\geqslant 0$,矛盾,则$4\leqslant\varphi(m_k)\leqslant 14$。若$\Omega(n)$为偶数,$-20=(4\varphi(m_k)-60)p_1^{\alpha_1-1}$,比较等式两边5的幂次可知$\alpha_1=2$,则有$\varphi(m_k)=14$,不是Euler商数,此时方程(2)无解。若$\Omega(n)$为奇数,$-4=(4\varphi(m_k)-60)p_1^{\alpha_1-1}$,因为$5\nmid 4$,此时方程(2)无解。

若$k=2$,则$\alpha_k\geqslant 2$,$p_1\geqslant 11$,可得$\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta}p_1^{\alpha_1})\geqslant 40$。利用式(10)有

$$(-1)^{\Omega(n)+1}\times 16-12=4\varphi(m_k)p_k^{\alpha_k-1}-12p_k^{\alpha_k}=(4\varphi(m_k)-60)p_k^{\alpha_k-1}\geqslant 100p_k^{\alpha_k-1}。$$

矛盾,方程(2)无解。

若$k\geqslant 3$,必有$\alpha_k\geqslant 2$,则至少存在$k-2$个$p_i\geqslant 17$,$1\leqslant i\leqslant k-1$,且所有$p_i-1>2^3$。设$p_{k-1}\geqslant 17$,则有

$$(p_{k-1}-1)(p_k-1)\geqslant 16(p_k-1)>12p_k,$$

且有

$$\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1>2^{3(k-2)}-1>2^{3(k-2)-1},$$

故由式(10)有

$$(-1)^{\Omega(n)+1}\cdot 2^{k+2}-12=p_k^{\alpha_k-1}((p_k-1)\varphi(m_k)-12p_k)>p_k^{\alpha_k-1}(12p_k\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-12p_k)=12p_k^{\alpha_k}(\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1)>2^3\times 2^2\times 2^{3(k-2)-1}>2^{k+2}。$$

矛盾,此时方程无解。

情况2.5　若$\alpha=0,\beta=0,R'_{P_k}=\{11\}$。

设$SL(n)=p_k{}^{\alpha_k}$,由引理3有$Z(SL(n))=Z(p_k^{\alpha_k})=p_k^{\alpha_k}-1$,从而由引理2和8可得式(2)为

$$p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\varphi(m_k)+5\times(-1)^{\Omega(n)}2^k=12(p_k^{\alpha_k}-1),\tag{11}$$

从而有

$$(p_k-1)(p_k^{\alpha_k-1}\varphi(m_k)-\frac{12(p_k^{\alpha_k}-1)}{p_k-1})=5\times(-1)^{\Omega(n)+1}2^k,$$

则有$p_k-1\mid 5\times 2^k$,又因为$R'_{P_k}=\{11\}$,所以$p_k=11$。

若$k=1$,则$\alpha_1\geqslant 2$,从而$\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta})=1$。故由式(11)有

$$(-1)^{\Omega(n)+1}\times 10-12=10p_1^{\alpha_1-1}-12p_1^{\alpha_1}<-122,$$

矛盾,方程(2)无解。

若$k=2$,必有$\alpha_k\geqslant 2$,$p_1\geqslant 23$,则$\varphi(m_k)=\varphi(2^{\alpha}3^{\beta}p_1^{\alpha_1})\geqslant 22$。利用式(11)有

$$(-1)^{\Omega(n)+1}\times 20-12=10\varphi(m_k)p_k^{\alpha_k-1}-12p_k^{\alpha_k}=(10\varphi(m_k)-132)p_k^{\alpha_k-1}\geqslant 88p_k^{\alpha_k-1},$$

矛盾,方程(2)无解。

若$k\geqslant 3$,必有$\alpha_k\geqslant 2$,$p_i\geqslant 23$,$1\leqslant i\leqslant k-1$,且$p_i-1>2^4$,可得

$$(p_{k-1}-1)(p_k-1)\geqslant 22(p_k-1)>12p_k,$$

且有

$$\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1>2^{4(k-2)}-1>2^{4(k-2)-1},$$

故由式(11)有

$$5\times(-1)^{\Omega(n)+1}2^k-12=p_k^{\alpha_k-1}((p_k-1)\varphi(m_k)-12p_k)>p_k^{\alpha_k-1}(12p_k\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-12p_k)=12p_k^{\alpha_k}(\prod_{i=1}^{k-2}(p_i-1)-1)>2^3\times 2^3\times 2^{4(k-2)-1}>5\times 2^k。$$

矛盾,此时方程无解。

情况2.6　若$\alpha=1,\beta=0,R'_{P_k}=\{11\}$。

设$SL(n)=p_k{}^{\alpha_k}$,由引理3有$Z(SL(n))=Z(p_k^{\alpha_k})=p_k^{\alpha_k}-1$,从而由引理2和8可得式(2)为

$$p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\varphi(m_k)+(-1)^{\Omega(n)}2^k=12(p_k^{\alpha_k}-1),$$

从而有

$$(p_k-1)(p_k^{\alpha_k-1}\varphi(m_k)-\frac{12(p_k^{\alpha_k}-1)}{p_k-1})=(-1)^{\Omega(n)+1}2^k,$$

于是就有$p_k-1\mid 2^k$,又由$R'_{P_k}=\{11\}$,这样的奇素数p_k不存在,方程(2)无解。

情况2.7　若

$$\begin{cases}\alpha\in\{0,1\},\beta=0,\text{且}R'_{P_k}\text{中存在}r_i=1\text{或}r_i=5\text{且}r_j=7;\\ \alpha\in\{0,1\},\beta=1,\text{且}R'_{P_k}\text{中存在}r_i=1\text{或}r_i=7;\\ \alpha\geqslant 2,\beta\in\{0,1\},\text{且}R'_{P_k}\text{中存在}r_i=1\text{或}r_i=7;\\ \alpha\in\{0,1\},\beta\geqslant 2,\text{且}R'_{P_k}\text{中存在}r_i=1\text{或}r_i=5;\\ \alpha\geqslant 2\text{且}\beta\geqslant 2。\end{cases}$$

其中$0\leqslant r_i\leqslant 11$,$0\leqslant r_j\leqslant 11$,$1\leqslant i\leqslant k$,$1\leqslant j\leqslant k$。

情况2.7.1　假设$SL(n)=2^{\alpha}$,必有$\alpha\geqslant 3$,记$n=2^{\alpha}m$,显然有$\gcd(2,m)=1$。利用引理3可得$Z(SL(n))=Z(2^{\alpha})=2^{\alpha+1}-1$,再由引理2和8可得式(2)为

$$2^{\alpha-3}\varphi(m)=3(2^{\alpha+1}-1),$$

因为$\varphi(m)$为偶数,等式两边奇偶性不同,矛盾,方程(2)无解。

情况2.7.2　设$SL(n)=3^{\beta}$,则$\beta\geqslant 2$,令$n=3^{\beta}m_0$,则$\gcd(3,m_0)=1$。由引理3有$Z(SL(n))=Z(3^{\beta})=3^{\beta}-1$,从而由引理2和8可得式(2)为

$$3^{\beta-2}\varphi(m_0)=2(3^{\beta}-1),$$

比较等式两边的3的幂次可知$\beta = 2$,则$\varphi(m_0) = 16$,于是有$m_0 = 17,32,34,40,48,60$。又$\gcd(3, m_0) = 1$,$SL(n) = 3^2$,所以$m_0 = 40$,则$n = 3^2 \times 40 = 360$,经检验是方程(2)的解。

情况2.7.3 设$SL(n)=p_k^{\alpha_k}$,由引理3有$Z(SL(n)) = Z(p_k^{\alpha_k}) = p_k^{\alpha_k} - 1$,从而由引理2和8可得式(2)为

$$p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)\varphi(m_k) = 12(p_k^{\alpha_k} - 1),$$

根据等式两边的p_k的个数可知$\alpha_k = 1$,则$\varphi(m_k) = 12$,从而$m_k = 13,21,26,28,36,42$,所以$n = 13p_1(p_1 \geqslant 17)$, $21p_2(p_2 \geqslant 11)$, $26p_3(p_3 \geqslant 17)$, $28p_4(p_4 \geqslant 11)$, $36p_5(p_5 \geqslant 11)$, $42p_6(p_6 \geqslant 11)$,其中所有$p_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$均为奇素数,经检验均是方程(2)的解。定理证毕。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2024. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

参 考 文 献

[1] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring verlag, 1976: 156-162.

[2] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 179-186.

[3] 周建华,瞿云云,朱山山,等.数论函数方程$t\varphi_2(n(n+1)) = S(SL(n^{17}))$的可解性[J].贵州师范大学学报(自然科学版),2022,40(6):33-37. DOI:10.16614/j.gznuj.zrb.2022.06.004.
ZHOU J H, QU Y Y, ZHU S S, et al. The solvability of the arithmetic function equation $t\varphi_2(n(n+1)) = S(SL(n^{17}))$[J]. Journal of Guizhou Normal University (Natural Sciences), 2022, 40(6): 33-37.

[4] 杜珊,廖群英,王慧莉.方程$SL(n) = \varphi_e(n)$的正整数解[J].四川师范大学学报(自然科学版),2023,46(1):29-36. DOI:10.3969/j.issn.1001-8395.2023.01.003.
DU S, LIAO Q Y, WANG H L. The positive integral solutions for the equation $SL(n) = \varphi_e(n)$[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2023, 46(1): 29-36.

[5] 张四保.数论函数方程$\varphi_2(n) = S(SL(n^k))$的可解性[J].西南大学学报(自然科学版),2020,42(4):65-69. DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2020.04.008.
ZHANG S B. The solvability of arithmetic function equation $\varphi_2(n) = S(SL(n^k))$[J]. Journal of Southwest University(Natural Science Edition), 2020, 42(4): 65-69.

[6] 王慧莉,廖群英,杜珊.方程$S(SL(n)) = \varphi_e(n)(e = 3,4,6)$的可解性[J].四川师范大学学报(自然科学版),2021,44(6):752-761. DOI:10.3969/j.issn.1001-8395.2021.06.005.
WANG H L, LIAO Q Y, DU S. The solvability for the equations $S(SL(n)) = \varphi_e(n)(e = 3,4,6)$ [J]. Journal of Sichuan Normal University(Natural Science), 2021, 44(6): 752-761.

[7] 王慧莉,廖群英,任磊.方程$S(SL(n^2)) = \varphi_e(n)(e = 3,4,6)$的可解性[J].四川师范大学学报(自然科学版),2022,45(5):595-604. DOI:10.3969/j.issn.1001-8395.2022.05.003.
WANG H L, LIAO Q Y, REN L. The solvability for the equation $S(SL(n^2)) = \varphi_e(n)(e = 3,4,6)$[J]. Journal of Sichuan Normal University(Natural Science), 2022, 45(5): 595-604.

[8] 姜莲霞,张四保.关于方程$S(n) = \varphi_e(SL(n))$的正整数解[J].科技通报,2022,38(11):5-8. DOI:10.13774/j.cnki.kjtb.2022.11.002.
JIANG L X, ZHANG S B. The positive integer solutions of the equation $S(n) = \varphi_e(SL(n))$ [J]. Bulletin of Science and Technology, 2022, 38(11): 5-8.

[9] 赵祈芬,高丽.包含伪Smarandache函数与欧拉函数的两个方程[J].贵州师范大学学报(自然科学版),2017,35(3):55-58. DOI:10.16614/j.cnki.issn1004-5570.2017.03.008.
ZHAO Q F, GAO L. Two equations involving the pseudo-Smarandache function and Euler function [J]. Journal of Guizhou Normal University (Natural Sciences), 2017, 35(3): 55-58.

[10] 高丽.数论函数方程$k\varphi_2(n(n+1))+\varphi(n)=2S(SL(n^{11}))$的可解性[J].贵州大学学报(自然科学版),2025,42(3):20-25. DOI:10.15958/j.cnki.gdxbzrb.2025.03.03.
GAO L. The solvability of arithmetic function equation $k\varphi_2(n(n+1))+\varphi(n)=2S(SL(n^{11}))$[J]. Journal of Guizhou University(Natural Sciences), 2025, 42(3): 20-25.

[11] 赵祈芬,高丽.数论函数方程$Z(n) = \varphi_2(n)$的解[J].云南师范大学学报(自然科学版),2018,38(2):34-37. DOI:10.7699/j.ynnu.ns-2018-020.
ZHAO Q F, GAO L. Solutions of arithmetic function equation $Z(n) = \varphi_2(n)$[J]. Journal of Yunnan Normal University(Natural Sciences Edition), 2018, 38(2): 34-37.

[12] 李改利,高丽,戴妍百,等.一类包含Smarandache LCM函数与广义欧拉函数的方程[J].湖北大学学报(自然科学版),2023,45(2):181-187. DOI:10.3969/j.issn.1000-2375.2022.00.068.
LI G L, GAO L, DAI Y B, et al. Equations involving the Smarandache LCM function and generalized Euler

function［J］. Journal of Hubei University（Natural Science）,2023,45(2):181-187.

［13］高倩,高丽,梁晓艳.包含Smarandache LCM函数的两个方程的正整数解[J].延安大学学报(自然科学版),2020,39(2):8-11+14. DOI:10.13876/J.cnki.ydnse.2020.02.008.
GAO Q,GAO L,LIANG X Y. The positive integer solutions of two equations involving the Smarandache LCM function［J］. Journal of Yan'an University(Natural Science Edition),2020,39(2):8-11+14.

［14］杨张媛,赵西卿,白继文.两个数论函数方程解的探讨[J].江西科学,2018,36(4):579-581. DOI:10.13990/j.issn1001-3679.2018.04.010.
YANG Z Y,ZHAO X Q,BAI J W. Solvability of two arithmetic function equations[J]. Jiangxi Science,2018,36(4):579-581.

［15］朱杰,廖群英.方程$Z(n)=\varphi_e(SL(n))$的可解性[J].数学进展,2019,48(5):541-554.DOI:10.11845/sxjz.2018064b.
ZHU J,LIAO Q Y. The solvability of the equation $Z(n)=\varphi_e(SL(n))$[J]. Advances in Mathematics,2019,48(5):541-554.

［16］高丽.广义Euler函数$\varphi_e(n)=Z(SL(n))$的可解性[J].沈阳大学学报(自然科学版),2025,37(5):437-444.
GAO L. Solvability of arithmetic function eqution $\varphi_e(n)=Z(SL(n))$[J].Journal of Shenyang University(Natural Science),2025,37(5):437-444.

［17］姜莲霞,张四保,傅湧.形如$k\varphi(n)=\varphi_2(n)+S(n^m)$的两个方程的可解性[J].首都师范大学学报(自然科学版),2021,42(6):8-11+70. DOI:10.19789/j.1004-9398.2021.06.002.
JIANG L X,ZHANG S B,FU Y. Solvabilities of two equations of the form $k\varphi(n)=\varphi_2(n)+S(n^m)$［J］. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2021,42(6):8-11+70.

［18］梁晓艳,高丽,高倩.数论函数方程$Z(n^2)=\varphi^2{}_e(n)(e=1,2)$解的探讨[J].云南师范大学学报(自然科学版),2020,40(6):35-38. DOI:10.7699/j.ynnu.ns-2020-078.
LIANG X Y,GAO L,GAO Q. Solvability of $Z(n^2)=\varphi_e^2(n)(e=1,2)$ function equations［J］. Journal of Yunnan Normal University(Natural Sciences Edition),2020,40(6):35-38.

［19］朱山山,瞿云云,周建华,等.数论函数方程$t\varphi(n)+\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$的正整数解[J].贵州师范大学学报(自然科学版),2023,41(2):80-85+120. DOI:10.16614/j.gznuj.zrb.2023.02.011.
ZHU S S,QU Y Y,ZHOU J H,at al. The positive integer solutions of arithmetic function equation $t\varphi(n)+\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$［J］. Journal of Guizhou Normal University(Natural Sciences),2023,41(2):80-85+120.

［20］余礼,廖群英.方程$\varphi_e(n)=2^{\omega(n)}(e=8,12)$的正整数解[J].四川师范大学学报(自然科学版),2022,45(3):330-339. DOI:10.3969/j.issn.1001-8395.2022.03.006.
YU L,LIAO Q Y. The positive integer solutions for the equation $\varphi_e(n)=2^{\omega(n)}(e=8,12)$[J]. Journal of Sichuan Normal University(Natural Science),2022,45(3):330-339.

（责任编辑:马田田）