DOI:10.19789/j.1004-9398.2026.02.004　　**Open Access**
文献引用:刘睿,耿俊.基于Psoset结构的Galois伴随[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(2):28-31. LIU R,GENG J. Galois adjunction based on psoset[J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2026,47(2):28-31.

基于Psoset结构的Galois伴随*

刘　睿,耿　俊**

(内蒙古师范大学数学科学学院,内蒙古 呼和浩特　010022)

摘要:本文引入了Psoset上Galois伴随的概念,通过讨论其相关性质给出Psoset上内部算子、闭包算子与Galois伴随之间的关系。

关键词:Psoset;Galois伴随;内部算子;闭包算子
中图分类号:O153;O159　　**文献标志码**:A

Galois adjunction based on Psoset*

LIU Rui, GENG Jun**

(College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia　010022)

Abstract: This paper introduces the concept of Galois adjunction on Psoset, studies its related properties, and further discusses the relationship between the internal operator, closure operator and Galois adjunction on Psoset.

Keywords: Psoset; Galois adjunction; internal operator; closure operator
CLC: O153; O159　　**DC**: A

0　引　言

布尔巴基学派(school of Bourbaki)将数学分为代数、拓扑和序3种结构。偏序集作为序的一类结构,在理论研究和实际应用方面均具有重要作用。传递性是偏序关系的重要特征之一,但在数学和其他领域中非传递关系是普遍存在的,而且具有不可替代的作用,比如相邻关系、正交关系、生物多样性[1]等均不具有传递性。非传递关系具有2个特征:一是循环(A优于B,B优于C,C优于A);二是不可比(A优于B,B优于C,但A和C不可比较)。1970年,Fried[2]引入了Psoset的概念,其是一类具有自反性和反对称性的集合,可视作偏序集的一般化;1971年,Skala[3]在Psoset的基础上定义了Trellis的概念,并研究了Trellis的一些相关性质。随后,众多学者对Psoset与Trellis展开了系统讨论[4-11],其中Trellis上的聚合算子理论逐渐成为当前研究的前沿热点。2023年,Zedam和Baets[12]率先提出Trellis上三角模的定义;随后,Kong和Zhao[13]则对Trellis上的一致模进行了分析,并给出了相应的构造方法。

Galois伴随由Schmidt在1953年提出[14],后被Kan推广到了范畴论的框架下[15],其在格序理论中起着重要作用,是构造序结构上聚合算子的有力工具。2005年,Zhang[16]首次利用Galois伴随在偏序集上构造了一类三角模,引起了学者们的广泛关注。自然地,研究更一般的序结构Psoset上的Galois伴随及其相关性质显得尤为重要,可为进一步研究Psoset上的聚合算子奠定基础。

收稿日期:2024-06-18
*国家自然科学基金项目(12461093);内蒙古自然科学基金项目(2023MS01009);内蒙古师范大学科研专项项目(2023JBQN044)
**通信作者:gengjun@imnu.edu.cn

本文将阐述Psoset上Galois伴随的定义,系统分析其基本性质,并揭示其与偏序集上Galois伴随的相同及不同处。在此基础上讨论了Psoset上闭包算子、内部算子与Galois伴随之间的内在联系。

1　相关定义

定义 1.1[8]　设X是一个非空集合,$\trianglelefteq$是X上的二元关系,若它满足自反性和反对称性,则称是X上的一个Pseudo序。具有Pseudo序关系的集合X称为Psoset,记作$P=(X,\trianglelefteq)$。$\forall a,b\in X$,若$a\trianglelefteq b$且$a\neq b$,记为$a\triangleleft b$,若$a\trianglelefteq b$不成立,记为$a\not\trianglelefteq b$。

注 1.1　若$\trianglelefteq$满足自反性,反对称性和传递性,则称其是X上的一个偏序关系。

定义 1.2[12]　设$P=(X,\trianglelefteq)$是Psoset,$C\subseteq X$。对$x,y\in C$,称$x\precsim_C y$,若存在C中有限个元素$x_1,x_2,\cdots,x_n$使得$x\trianglelefteq x_1\trianglelefteq x_2\trianglelefteq\cdots\trianglelefteq x_n\trianglelefteq y$。若$\forall x,y\in C$,有$x\precsim_C y$和$y\precsim_C x$同时成立,则称$C$为循环。

定义 1.3　设$P=(P,\trianglelefteq)$,$Q=(Q,\trianglelefteq)$是Psoset,$f\colon P\to Q$,称f是保序映射,若$\forall a\trianglelefteq b$,有$f(a)\trianglelefteq f(b)$。

定义 1.4　设$P=(P,\trianglelefteq)$,$Q=(Q,\trianglelefteq)$是Psoset,$f\colon P\to Q$和$g\colon Q\to P$是保序映射,若$\forall a\in P$,$b\in Q$都有

$$f(a)\trianglelefteq b\Leftrightarrow a\trianglelefteq g(b),$$

则称(f,g)是P与Q之间的Galois伴随,记作

$$f\dashv g\colon P\rightharpoonup Q。$$

若$P=Q$,则称(f,g)是P上的Galois伴随。不失一般性,f称为(g的)左伴,g称为(f的)右伴。

定义 1.5　设$P=(P,\trianglelefteq)$是Psoset,$f\colon P\to P$,若:

(1) $x\trianglelefteq y\Rightarrow f(x)\trianglelefteq f(y)$,　$\forall x,y\in P$;

(2) $x\trianglelefteq f(x)$,　$\forall x\in P$;

(3) $f(f(x))=f(x)$,　$\forall x\in P$;

则称f为P上的闭包算子。

定义 1.6　设$P=(P,\trianglelefteq)$是Psoset,$f\colon P\to P$,若:

(1) $x\trianglelefteq y\Rightarrow f(x)\trianglelefteq f(y)$,　$\forall x,y\in P$;

(2) $f(x)\trianglelefteq x$,　$\forall x\in P$;

(3) $f(f(x))=f(x)$,　$\forall x\in P$;

则称f为P上的内部算子。

设$P=(X,\trianglelefteq)$是Psoset,$\forall x\in X$,记

$$\uparrow x=\{y\in X\mid x\trianglelefteq y\},\quad \downarrow x=\{y\in X\mid y\trianglelefteq x\}。$$

定义 1.7　设$P=(P,\trianglelefteq)$,$Q=(Q,\trianglelefteq)$是Psoset,$h\colon P\to Q$是一个映射,

(1)若$\forall a\in Q,\exists b\in P$使得$h^{-1}(\downarrow a)=\downarrow b$,则称$h$是剩余映射;

(2)若$\forall a\in Q,\exists b\in P$使得$h^{-1}(\uparrow a)=\uparrow b$,则称$h$是残余映射。

定义 1.8　设$P=(P,\trianglelefteq)$,$Q=(Q,\trianglelefteq)$是Psoset,$h\colon P\to Q$是一个映射,$h^{\circ}\colon P\to h(P)(a\mapsto h(a))$是$h$的余限制,$h_{\circ}\colon h(P)\to Q(b\mapsto b)$是$h$的嵌入映射,则$h=h_{\circ}\circ h^{\circ}$。

2　主要结果

定理 2.1　设$P=(P,\trianglelefteq)$,$Q=(Q,\trianglelefteq)$是Psoset,$f\colon P\to Q$和$g\colon Q\to P$是保序映射,若$f\dashv g\colon P\rightharpoonup Q$,则:

(1) $\mathrm{id}_P\trianglelefteq g\circ f$,$f\circ g\trianglelefteq\mathrm{id}_Q$;

(2) $f=f\circ g\circ f$,$g=g\circ f\circ g$;

(3) $g\circ f\colon P\to P$是闭包算子,$f\circ g\colon Q\to Q$是内部算子。

证明　(1)$\forall a\in P$,由$f(a)\trianglelefteq f(a)$知$a\trianglelefteq g\circ f(a)$。因此$\mathrm{id}_P\trianglelefteq g\circ f$。同理可证$f\circ g\trianglelefteq\mathrm{id}_Q$。

(2)由定理2.1(1),因为$\mathrm{id}_P\trianglelefteq g\circ f$,所以$f\trianglelefteq f\circ g\circ f$,又因为$f\circ g\trianglelefteq\mathrm{id}_Q$,所以$f\circ g\circ f\trianglelefteq f$,所以$f=f\circ g\circ f$。同理可证$g=g\circ f\circ g$。

(3)$g\circ f$保序显然。由定理2.1(1)可知$\forall x\in P,x\trianglelefteq g\circ f(x)$。下证幂等性,因为$f=f\circ g\circ f$,所以$g\circ f=g\circ f\circ g\circ f$。因此,$g\circ f\colon P\to P$是闭包算子。同理可证$f\circ g\colon Q\to Q$是内部算子。

值得注意的是,与偏序集情况不同,定理2.1中条件(1)成立并不能保证(f,g)构成Galois伴随,反例如下。

例 2.1　设$P=(P,\trianglelefteq)$是图1(a)所示的Psoset,f,g是保序映射,定义为

$$f(x)=\begin{cases}a, & x\in\{a,b\},\\ b, & x=c,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}b, & x=a,\\ c, & x\in\{b,c\},\end{cases}$$

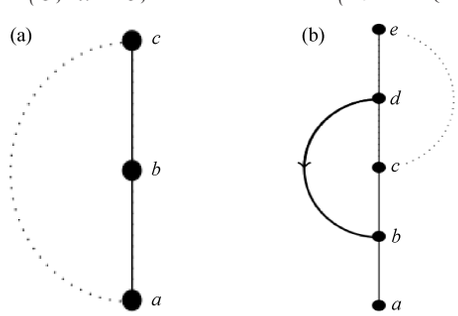


图 1　Psoset P
(a)例 2.1;(b)例 2.2
Figure 1　Psoset P
(a)example 2.1;(b)example 2.2

易证 $\mathrm{id}_P \trianglelefteq g \circ f$ 且 $f \circ g \trianglelefteq \mathrm{id}_P$ 成立，但 $b \trianglelefteq c = g(c), f(b) = a \not\trianglelefteq c$，故 (f, g) 不是Galois伴随。

定理 2.2 设 $P = (P, \trianglelefteq), Q = (Q, \trianglelefteq)$ 是Psoset，$f: P \to Q, g: Q \to P$，若 $f \dashv g: P \rightharpoonup Q$，则 $f(P) \cong g(Q)$。

证明 f, g 分别为：$f: g(Q) \to f(P), g: f(P) \to g(Q)$，由定理2.1可知，$f, g$ 互为逆映射，所以 $f(P) \cong g(Q)$。

定理 2.3 设 $P = (P, \trianglelefteq)$，$Q = (Q, \trianglelefteq)$ 是Psoset，$f: P \to Q$，$g: Q \to P$，若 $f \dashv g: P \rightharpoonup Q$，则：

(1) $\forall a \in P, f(a) = \min(g^{-1}(\uparrow a))$；

(2) $\forall b \in Q, g(b) = \max(f^{-1}(\downarrow b))$。

证明 只证明(1)，(2)的证明类似于(1)。$\forall a \in P, a \trianglelefteq gf(a)$，有 $f(a) \in g^{-1}(\uparrow a)$。取 $y \in g^{-1}(\uparrow a)$，有 $a \trianglelefteq g(y)$，从而 $f(a) \trianglelefteq y$，故 $f(a) = \min(g^{-1}(\uparrow a))$。

定理 2.4 设 $P = (P, \trianglelefteq), Q = (Q, \trianglelefteq)$ 是Psoset，h 是 $P \to Q$ 上的映射，则：

(1) h 有右伴随 $\Rightarrow$ h 是剩余映射；

(2) h 有左伴随 $\Rightarrow$ h 是残余映射。

证明 只证明(1)，(2)的证明类似于(1)。设 h 的右伴随为 g，则 $\forall b \in Q$，由定理2.3(2)知，$h^{-1}(\downarrow b)$ 有最大元 $g(b)$，下证 $h^{-1}(\downarrow b) = \downarrow g(b)$。由于 $a \in h^{-1}(\downarrow b)$ 当且仅当 $h(a) \trianglelefteq b$ 当且仅当 $a \trianglelefteq g(b)$ 当且仅当 $a \in \downarrow g(b)$，由此可得 h 是剩余映射。

与偏序集情形不同，Psoset之间的剩余映射、残余映射不一定保序，因此定理2.4不是充要条件，如下例。

例 2.2 设 $P = (P, \trianglelefteq)$ 是图1(b)所示的Psoset，定义 $h: P \to P$ 为

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in \{a, c, e\}, \\ d, & x = b, \\ b, & x = d。 \end{cases}$$

容易证明 h 是 P 上的剩余映射，但 h 不保序，因此不存在右伴。

定理 2.5 设 $P = (P, \trianglelefteq), Q = (Q, \trianglelefteq)$ 是Psoset，若 $f \dashv g: P \rightharpoonup Q$，则左伴 f 保任意存在并，右伴 g 保任意存在交。

证明 设 $A \subseteq P$，且 $\vee A$ 存在。若 $A = \varnothing$ 且 P 有最小元 0_P，则 $\forall y \in Q$，由 $0_P \trianglelefteq g(y)$ 知 $f(0_P) \trianglelefteq y$，故 $f(0_P)$ 是 Q 的最小元，即 $f(\vee\varnothing) = f(0_P) = 0_Q = \vee f(\varnothing)$。若 $A \neq \varnothing$，令 $b = \vee A$，需证 $f(b) = \vee\{f(a) | a \in A\}$。由 f 的保序性知 $f(b)$ 是 $\{f(a) | a \in A\}$ 的一个上界。设 c 也是 $\{f(a) | a \in A\}$ 的一个上界，即对任意的 $a \in A$ 都有 $f(a) \trianglelefteq c$，从而 $a \trianglelefteq g(c)$，$b = \vee A \trianglelefteq g(c)$，故 $f(b) \trianglelefteq c$。由此可知 $f(b)$ 是 $\{f(a) | a \in A\}$ 的最小上界，因此 $f(\vee A) = \vee f(A)$。

类似可证 g 保任意存在交。

定理 2.6 设 $P = (P, \trianglelefteq), Q = (Q, \trianglelefteq)$ 是Psoset，$f: P \to Q$ 和 $g: Q \to P$ 是保序映射，若 $f \dashv g: P \rightharpoonup Q$，则下列条件等价：

(1) f 是单射；

(2) $g \circ f = \mathrm{id}_P$；

(3) g 是满射。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)：由定理2.1(2)可知，$\forall x \in P$，有 $f(x) = f \circ g \circ f(x)$，又 f 是单射，所以 $x = g \circ f(x)$，因此 $g \circ f = \mathrm{id}_P$。

(2) $\Rightarrow$ (3)：$\forall x \in P$，令 $y = f(x)$，则 $x = \mathrm{id}_P(x) = g \circ f(x) = g(y)$，所以 g 是满射。

(3) $\Rightarrow$ (1)：设 $x_1, x_2 \in P$，且 $f(x_1) = f(x_2)$. 由于 g 是满射，$\exists y_1, y_2 \in Q$ 使，使 $x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2)$，则 $x_1 = g(y_1) = g \circ f \circ g(y_1) = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = g \circ f \circ g(y_2) = g(y_2) = x_2$，所以 f 是单射。

定理 2.7 设 $P = (P, \trianglelefteq), Q = (Q, \trianglelefteq)$ 是Psoset，$f: P \to Q$ 和 $g: Q \to P$ 是保序映射，若 $f \dashv g: P \rightharpoonup Q$，则下列条件等价：

(1) f 是满射；

(2) $f \circ g = \mathrm{id}_Q$；

(3) g 是单射。

证明 证明与定理2.6类似。

定理 2.8 设 $P = (P, \trianglelefteq)$ 是Psoset，$h: P \to P$ 是一个保序映射，

(1) 若 $h^\circ \dashv h_\circ: P \rightharpoonup h(P)$，则存在 $f \dashv g: P \rightharpoonup S$ 使得 $h = g \circ f$，从而 h 是闭包算子；

(2) 若 $h_\circ \dashv h^\circ: h(P) \rightharpoonup P$，则存在 $f \dashv g: S \rightharpoonup P$ 使得 $h = f \circ g$，从而 h 是内部算子。

证明 证明显然。

定理 2.9 设 $P = (P, \trianglelefteq)$ 是Psoset，f 和 g 分别是 P 上的闭包算子和内部算子，若 $f \dashv g: P \rightharpoonup P$，则 $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}g$。

证明 设 $a \in \mathrm{Im}f$，即 $f(a) = a$，则 $a \trianglelefteq g \circ f(a) = g(a)$。又由 g 是内部算子知 $g(a) \trianglelefteq a$，故 $g(a) = a$，$a \in \mathrm{Im}g$。因此 $\mathrm{Im}f \subseteq \mathrm{Im}g$。反之，设 $a \in \mathrm{Im}g$，即 $g(a) = a$，则 $f(a) = f \circ g(a) \trianglelefteq a$。又由 f 是闭包算子

知$a \trianglelefteq f(a)$，故$f(a)=a$，$a \in \mathrm{Im}f$，因此$\mathrm{Im}g \subseteq \mathrm{Im}f$。

定理2.10　设$P=(P, \trianglelefteq)$是Psoset，$f \dashv g: P \rightharpoonup P$，则如下条件等价：

（1）$f: P \to P$是内部算子；

（2）$g: P \to P$是闭包算子；

（3）$f \circ g = f$；

（4）$g \circ f = g$。

证明　(1)⇒(2)。$\forall a \in P$，由$f(a) \trianglelefteq a$，得$a \trianglelefteq g(a)$，因此，$g(a) \trianglelefteq g \circ g(a)$。由$g \circ g(a) \trianglelefteq g \circ g(a)$，知$f \circ g \circ g(a) = f \circ f \circ g \circ g(a) \trianglelefteq a$，故$g \circ g(a) \trianglelefteq g(a)$，故$g$是幂等的。因此$g$是闭包算子。

(2)⇒(3)。$\forall a \in P$，由$a \trianglelefteq g(a)$，知$f(a) \trianglelefteq f \circ g(a)$。另一方面，由$a \trianglelefteq g \circ f(a)$得$g(a) \trianglelefteq g \circ g \circ f(a) = g \circ f(a)$，从而$f \circ g(a) \trianglelefteq f(a)$。因此$f \circ g = f$。

(3)⇒(4)。$g \circ f = g(f \circ g) = g \circ f \circ g = g$。

(4)⇒(1)。$\forall a \in P$，由$a \trianglelefteq g \circ f(a) = g(a)$知$f(a) \trianglelefteq a$，于是，$f \circ f(a) \trianglelefteq f(a)$。由$a \trianglelefteq g \circ f(a) = g \circ f \circ f(a)$得$f(a) \trianglelefteq f \circ f(a)$。因此$f$是内部算子。

3　结束语

本文基于Psoset结构引入了Galois伴随的概念，并深入探讨了闭包算子、内部算子、剩余映射、残余映射等相关性质，同时指出了Psoset上Galois伴随与偏序集上Galois伴随的本质区别。所得主要结论将为后续研究Psoset结构上的三角模、三角余模、一致模、重叠函数、分组函数等聚合算子提供坚实的理论基础。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition）2024. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license（https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/）.

参 考 文 献

[1] REICHENBACH T, MOBILIA M, FREY E. Mobility promotes and jeopardizes biodiversity in rock -paper-scissors game[J]. Nature, 2007, 448(30): 1046-1049. DOI:10.1038/nature0609.

[2] FRIED E. Tournaments and non - associative lattices[J]. Annual University Science Budapest, 1970, 13: 151-164. DOI:10.1016/J. FSS.2023.01.003.

[3] SKALA H. Trellis theory[J]. Algebra University, 1971(1): 218-233. DOI:10.1007/bf02944982.

[4] SHASHIREKHA B. R, PRASHANTHA R. Modular, weakly distributive and normal trellises [J]. Journal of Physics(Conference Series), 2021, 1850(1): 012090. DOI:10.1088/1742-6596/1850/1/012090.

[5] RAI B S, BHATTA P S. Some characterizations of pseudo-chains in pseudo-ordered sets [J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2020, 14(5): 2150074. DOI:10.1142/s1793557121500741.

[6] ABUEIDA A A, DIESTELKAMP S W, EDWARDS P S, et al. Determining properties of a multipartite tournament from its lattice of convex subsets[J]. The Australasian Journal of Combinatorics, 2005, 31: 217-230.

[7] GÁCS A, SZIKLAI P. On the structure of a generalization of weakly associative lattices[J]. Ars Combinatoria, 2002, 62: 221-226.

[8] DAMIAN S, ADAM G. On weakly associative lattices and near lattices[J]. Formalized Mathematics, 2021, 29(2): 77-85. DOI:10.2478/forma-2021-0008.

[9] MOURAD Y, ABDELAZIZ A, LEMNAOUAR Z. A binary operation-based representation of a lattice[J]. Kybernetika, 2019, 55(2): 252-272. DOI:10.14736/kyb-2019-2-0252.

[10] FRIED E, GRÄTZER G. Some examples of weakly associative lattices[J]. In Collobquium Mathematicae, 1973, 27(2): 215-221. DOI:10.4064/cm-27-2-215-221.

[11] CRUZ-QUINONES D M, HARDING J. Completions of pseudo ordered sets[J]. Order, 2021, 39(1): 1-17. DOI:10.1007/s11083-025-09712-1.

[12] ZEDAM L, BAETS B D. Triangular norms on bounded trellises [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 462: 108468. DOI:10.1016/J. FSS.2023.01.003.

[13] KONG Y, ZHAO B. Uninorms on bounded trellises[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2024(481): 108898. DOI:10.1016/J. FSS.2024.108898.

[14] SCHMIDT J. Beiträge zur filtertheorie II [J]. Mathematische Nachrichten, 1953, 10(3/4): 197-232. DOI:10.1002/mana.19530100309.

[15] KAN D M. Adjoint functors[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1958, 87(2): 294-329. DOI:10.1007/978-3-642-65364-3_16.

[16] ZHANG D X. Triangular norms on partially ordered sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 153(2): 195-209. DOI:10.1016/j.fss.2005.02.001.

（责任编辑：马田田）