DOI:10.19789/j.1004-9398.2026.01.004　　**Open Access**
文献引用:郑智通,耿俊.有界Trellis上的零模[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(1):28-32. ZHENG Z T,GENG J. Nullnorms on bounded Trellis[J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2026,47(1):28-32.

有界Trellis上的零模*

郑智通，耿　俊**

（内蒙古师范大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特　010022）

摘要:零模作为一类混合型聚合算子,在理论及实际应用中具有重要的研究价值,尤其是序结构上的零模已成为当前的研究热点。首先,介绍了有界Trellis上零模的概念和基本性质;其次,提出了有界Trellis上零模的一个新的构造方法;最后,给出了有界Trellis上零模的相关实例。

关键词:Psoset;有界Trellis;零模
中图分类号:O153;O159　　**文献标志码**:A

Nullnorms on bounded Trellis*

ZHENG Zhitong，GENG Jun**

（College of Mathematics Science，Inner Mongolia Normal University，
Hohhot　Inner Mongolia　010022）

Abstract: The nullnorms as a class of hybrid aggregation operators, holds significant research value both in theory and practical applications, especially the nullnorms on ordered structures which has become a current research hotspot. Firstly, introduces the concept and basic properties of the nullnorms on a bounded Trellis. Secondly, it proposes a new construction method for the nullnorms on a bounded Trellis. Finally, it provides relevant examples of the nullnorms on a bounded Trellis.

Keywords:Psoset; bounded Trellis; nullnorm
CLC:O153;O159　　**DC**:A

0　引　言

信息聚合是将不同来源的信息聚合成一个具有代表性数值的过程,描述该过程的数学模型称为聚合算子。近年来,随着信息技术与人工智能的快速发展,信息聚合在理论研究与实际应用中的重要性日益凸显。零模作为一类重要的聚合算子,由Calvo等首次提出,Karaçal等[1]将零模的概念从单位区间推广到有界格,并基于有界格上三角模和三角余模的存在性给出了一些构造方法。目前,有界格上零模的研究已经取得了丰富的成果[2-3]。

传递性是偏序集的重要特征之一,但是在许多理论研究和实际问题中非传递关系广泛存在。例如:在随机变量比较的研究中,传递性的缺失,导致了循环传递性的建立[4-5];在物种竞争结构中循环的存在性支持了生物多样性[6]。此外,在博弈论、图论以及非传递性蕴含逻辑的研究中,非传递关系亦广泛存在。因此,非传递关系吸引了众多学者的研究,1970年Fried提出不具有传递性的Psosets结构[7]。随后,针对这一结构开展了诸多研究,例如非结合格[8]、Trellis[9]等。

Trellis作为格的一般化,最近,很多学者将有界格上的聚合算子推广到Trellis上,并进行了相关性质

收稿日期:2025-04-16
*国家自然科学基金项目(12461093);内蒙古自然科学基金项目(2023MS01009);内蒙古师范大学科研专项资助项目(2023JBQN044)
**通信作者:gengjun@imnu.edu.cn

的研究。Zedam 和 De Baets[9]将三角模的概念从有界格推广到有界Trellis;Kong 和 Zhao[10]随后研究了有界Trellis上的一致模。零模作为三角模和三角余模的推广,在模糊逻辑、模糊集理论、专家系统和神经网络等[11-15]领域已得到广泛应用。因此,有界Trellis上零模的研究具有重要的理论与应用价值。本文构造了有界Trellis上的2类零模,并给出相应的实例。

1 预备知识

定义 1.1[9] 设X是一个非空集合,$\trianglelefteq$是X上的一个二元关系,若其满足自反性和反对称性,则称$\trianglelefteq$是X上的一个Pseudo序。具有Pseudo序关系的集合X称为Psoset,记作$P=(X,\ \trianglelefteq)$。

定义 1.2[9] 存在最小元和最大元(最小元用0表示,最大元用1表示)的Psoset被称为有界Psoset。记作$P=(X,\ \trianglelefteq,0,1)$。

定义 1.3[9] 设$P=(X,\ \trianglelefteq)$是一个Psoset,且对于任意的元$x,y\in X$都存在$x\wedge y$(或$x\vee y$),则称P为$\wedge$-semi-Trellis ($\vee$-semi-Trellis)。若P既是$\wedge$-semi-Trellis又是$\vee$-semi-Trellis,则称为Trellis,记作$T=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee)$。

定义 1.4[9] 设$T=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是有界Trellis,如果$a$和$b$是不可比较的,用$a\parallel b$来表示。与$a$不可比较的元的集合记为$I_a=\{x\in X\mid x\parallel a\}$。

定义 1.5[9] 设$T=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是有界Trellis,且$a,b\in X,a\trianglelefteq b$,则有如下定义:$[a,b]=\{x\in X\mid a\trianglelefteq x\trianglelefteq b\}$,$(a,b]=\{x\in X\mid a\triangleleft x\trianglelefteq b\}$,$[a,b)=\{x\in X\mid a\trianglelefteq x\triangleleft b\}$,$(a,b)=\{x\in X\mid a\triangleleft x\triangleleft b\}$。

定义 1.6[9] 设$P=(X,\ \trianglelefteq)$是一个Psoset,X中的元a被称为:

(1)右传递元,对任意$x,y\in X$,若$a\trianglelefteq x\trianglelefteq y$,则$a\trianglelefteq y$;

(2)左传递元,对任意$x,y\in X$,若$x\trianglelefteq y\trianglelefteq a$,则$x\trianglelefteq a$;

(3)中间传递元,对任意$x,y\in X$,若$x\trianglelefteq a\trianglelefteq y$,则$x\trianglelefteq y$;

(4)传递元,既是左传递元、右传递元又是中间传递元。

本文记X^{rtr}、X^{ltr}、X^{mtr}和X^{tr}分别表示X中所有右传递元、左传递元、中间传递元和传递元的集合。

定义 1.7[16] 设$T=(X,\trianglelefteq,\wedge,\vee)$是一个Trellis,则:

(1)若对于任意的三元组$(x,y,z)\in X^3$,满足$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)$(或$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$),则称该三元组是$\wedge$-结合的(或$\vee$-结合的);

(2)若对于包含元a的任意三元组都是$\wedge$-结合的(或$\vee$-结合的),则称元a是$\wedge$-结合的(或$\vee$-结合的);

(3)若元a既是$\wedge$-结合的,又是$\vee$-结合的,则称其为结合的。

本文记$X^{\wedge-ass}$、$X^{\vee-ass}$和X^{ass}分别表示X中所有$\wedge$-结合元、$\vee$-结合元和结合元的集合。

定义 1.8[9] 设$T=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是一个有界Trellis,$X$上的二元运算$F$具有:

(1)交换性,若对任意$x,y\in X$,有$F(x,y)=F(y,x)$;

(2)结合性,若对任意$x,y,z\in X$,有$F(x,F(y,z))=F(F(x,y),z)$;

(3)左单调性,若对任意$x_1,x_2,y\in X,x_1\trianglelefteq x_2$有$F(x_1,y)\trianglelefteq F(x_2,y)$;

(4)右单调性,若对任意$x_1,x_2,y\in X,x_1\trianglelefteq x_2$有$F(y,x_1)\trianglelefteq F(y,x_2)$;

(5)单调性,若对任意$x_1,x_2,y_1,y_2\in X,x_1\trianglelefteq x_2$,$y_1\trianglelefteq y_2$有$F(x_1,y_1)\trianglelefteq F(x_2,y_2)$。

定义 1.9[10] 设$(X,\ \trianglelefteq,0,1)$是一个有界Psoset,称$X$上的一个二元运算$T:X^2\to X$($S:X^2\to X$)为一个三角模(三角余模),若满足交换性、结合性、单调性,有单位元1(单位元0),使得对任意$x\in X$,有$T(x,1)=1$($S(x,0)=0$)成立。

命题 1.1[16] 设$T=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee)$是一个Trellis且$a\in X$,则:

(1)如果$a\in X^{rtr}$,则:

(a)对任意$x\in X$,$a\trianglelefteq x$蕴含$a\trianglelefteq x$;

(b)对任意$x,y\in X$,$a\trianglelefteq x$蕴含$a\vee y\trianglelefteq x\vee y$。

(2)如果$a\in X^{ltr}$,则:

(a)对任意$x\in X$,$a\trianglelefteq x$蕴含$x\trianglelefteq a$;

(b)对任意$x,y\in X$,$x\trianglelefteq a$蕴含$x\wedge y\trianglelefteq a\wedge y$。

(3)如果$a\in X^{\wedge-ass}$则对任意$x,y\in X$,$x\trianglelefteq y$蕴含$a\wedge x\trianglelefteq a\wedge y$。

2 主要结果

定义 2.1[17] 设$T=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是有界Trellis,称$X$上的一个二元运算$V:X^2\to X$为零模,若$V$满足交换性、单调性、结合性,当$x\trianglelefteq a$时,

$V(x,0)=x$;当$a\trianglelefteq x$时,$V(x,1)=x$。

可以很容易地得到$V(x,a)=a$对所有的$x\in X$都成立。因此,a是V的零元。

命题 2.1[17] 设$T=(X,\trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是有界Trellis,$V$是$T$上零元为$a$的零模,则:

(1) $V|_{[0,a]^2}:[0,a]^2\to[0,a]$是$[0,a]$上的三角余模;

(2) $V|_{[a,1]^2}:[a,1]^2\to[a,1]$是$[a,1]$上的三角模;

(3) $V(x,y)=a$,对所有的$(x,y)\in[0,a]\times[a,1]\cup[a,1]\times[0,a]$;

(4) $a\trianglelefteq V(x,y)$,对所有的$(x,y)\in[a,1]^2\cup[a,1]\times I_a\cup I_a\times[a,1]$;

(5) $V(x,y)\trianglelefteq a$,对所有的$(x,y)\in[0,a]^2\cup[0,a]\times I_a\cup I_a\times[0,a]$;

(6) $V(x,y)\trianglelefteq y$,对所有的$(x,y)\in X\times[a,1]$;

(7) $V(x,y)\trianglelefteq x$,对所有的$(x,y)\in[a,1]\times X$;

(8) $x\trianglelefteq V(x,y)$,对所有的$(x,y)\in[0,a]\times X$;

(9) $y\trianglelefteq V(x,y)$,对所有的$(x,y)\in X\times[0,a]$;

(10) $x\vee y\trianglelefteq V(x,y)$,对所有的$(x,y)\in[a,1]^2$;

(11) $V(x,y)\trianglelefteq x\vee y$,对所有的$(x,y)\in[a,1]^2$;

(12) $(x\wedge a)\vee(y\wedge a)\trianglelefteq V(x,y)$,对所有的$(x,y)\in[0,a]\times I_a\cup I_a\times[0,a]\cup I_a\times I_a$;

(13) $V(x,y)\trianglelefteq(x\vee a)\wedge(y\vee a)$,对所有的$(x,y)\in[a,1]\times I_a\cup I_a\times[a,1]\cup I_a\times I_a$。

定理 2.1 设$T=(X,\trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是一个有界Trellis,且$a\in X\setminus\{0,1\}$,$S$为$[0,a]$上的三角余模,若$a\in X^{\wedge-\mathrm{ass}}$,则二元运算$V:X^2\to X$:

$$V(x,y)=\begin{cases}S(x\wedge a,y\wedge a), & (x,y)\in([0,a)\cup I_a)^2,\\ x\wedge y, & (x,y)\in\{1\}\times(a,1]\cup(a,1]\times\{1\},\\ a, & \text{其他},\end{cases}$$

是X上零元为a的零模。

证明 交换性容易验证,当$x\trianglelefteq a$时,$V(x,0)=x$;当$a\trianglelefteq x$时,$V(x,1)=x$。

关于单调性,只需证明对任意的$x,y,z,t\in X$,当$x\trianglelefteq y,z\trianglelefteq t$时,有$V(x,z)\trianglelefteq V(y,t)$成立。若$y=t=1$,则保序性显然,只需考虑如下情况:

(1) $x,y\in[0,a)\cup I_a$。

(a) $z,t\in[0,a)\cup I_a$,由$a\in X^{\wedge-\mathrm{ass}}$和$S$保序知

$$V(x,z)=S(x\wedge a,z\wedge a)\trianglelefteq S(y\wedge a,t\wedge a)=V(y,t);$$

(b) $z\in[0,a)\cup I_a,t\in[a,1]$,

$$V(x,z)=S(x\wedge a,z\wedge a)\trianglelefteq a=V(y,t);$$

(c) $z,t\in[a,1]$,$V(x,z)=a=V(y,t)$;

(2) $x\in[0,a)\cup I_a,y\in[a,1)$。

(a) $z\in[0,a)\cup I_a,t\in[a,1)$,

$$V(x,z)=S(x\wedge a,z\wedge a)\trianglelefteq a=V(y,t);$$

(b) $z\in[0,a)\cup I_a,t=1$,

$$V(x,z)=S(x\wedge a,z\wedge a)\trianglelefteq a\trianglelefteq y=V(y,1);$$

(c) $z,t\in[a,1)$,$V(x,z)=a=V(y,t)$;

(d) $z\in[a,1]$,$t=1$,$V(x,z)=a\trianglelefteq y=V(y,1)$。

(3) $x\in[0,a)\cup I_a,y=1$。

$z,t\in[a,1)$,$V(x,z)=a\trianglelefteq t=V(1,t)$。

(4) $x,y\in[a,1)$。

(a) $z,t\in[a,1)$,$V(x,z)=a=V(y,t)$;

(b) $z\in[a,1)$,$t=1$,$V(x,z)=a\trianglelefteq y=V(y,1)$;

(c) $z=t=1$,$V(x,1)=x\trianglelefteq y=U(y,1)$。

下证结合性,只要证明对任意$x,y,z\in X$,有$V(x,V(y,z))=V(V(x,y),z)$成立。若$a\in\{x,y,z\}$,则$V(x,V(y,z))=V(V(x,y),z)=a$。若$a\notin\{x,y,z\}$,进行如下分情况讨论。

(1) $x,y,z\in[0,a)\cup I_a$。

$$V(x,V(y,z))=V(x,S(y\wedge a,z\wedge a))=S(x\wedge a,S(y\wedge a,z\wedge a)),$$

$$V(V(x,y),z)=V(S(x\wedge a,y\wedge a),z)=S(S(x\wedge a,y\wedge a),z\wedge a)。$$

由S的结合性,知$V(x,V(y,z))=V(V(x,y),z)$。

(2) $x\in[a,1),y=z=1$。

$$V(x,V(1,1))=V(x,1)=x,$$

$$V(V(x,1),1)=V(x,1)=x。$$

(3) $x=y=z=1$。

$$V(x,V(y,z))=1=V(V(x,y),z)。$$

对其他情况有

$$V(x,V(y,z))=V(V(x,y),z)=a$$

成立。综上所述,V是X上零元为a的零模。

定理 2.2 设$P=(X,\trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是一个有界Trellis,且$a\in X\setminus\{0,1\}$,$T$为$[a,1]$上的三角模,若$a\in X^{\vee-\mathrm{ass}}$,则二元运算$V:X^2\to X$:

$$V(x,y)=\begin{cases}T(x\vee a,y\vee a), & (x,y)\in((a,1]\cup I_a)^2,\\ x\vee y, & (x,y)\in\{0\}\times[0,a)\cup[0,a)\times\{0\},\\ a, & \text{其他},\end{cases}$$

是X上零元为a的零模。

若有界 Trellis 为有界格,则可得由 Funda Karaçal 等构造的有界格上的零模 $V_a^{(S)}(x,y)$ 和 $V_a^{(T)}(x,y)$,参见文献[1]。

推论 2.1[1]　$L=(L,\leqslant,\wedge,\vee,0,1)$ 是一个有界格,$a\in L\backslash\{0,1\}$,S 是 $[0,a]$ 上的三角余模,T 是 $[a,1]$ 上的三角模,其中 $D_a=\{(x,y)|(x,y)\in[0,a)\times(a,1]\cup(a,1]\times[0,a)\}$,则 $V_a^{(S)}$, $V_a^{(T)}: L^2\to L$ 定义为

$$V_a^{(S)}(x,y)=\begin{cases}S(x,y), & (x,y)\in[0,a]^2,\\ a, & (x,y)\in[a,1)^2\cup[a,1]\times I_a\cup I_a\times[a,1]\cup D_a,\\ S(x\wedge a,y\wedge a), & (x,y)\in[0,a]\times I_a\cup I_a\times[0,a]\cup I_a\times I_a,\\ x\wedge y, & \text{其他},\end{cases}$$

$$V_a^{(T)}(x,y)=\begin{cases}T(x,y), & (x,y)\in[a,1]^2,\\ a, & (x,y)\in(0,a]^2\cup[0,a]\times I_a\cup I_a\times[0,a]\cup D_a,\\ T(x\vee a,y\vee a), & (x,y)\in[a,1]\times I_a\cup I_a\times[a,1]\cup I_a\times I_a,\\ x\vee y, & \text{其他}。\end{cases}$$

例 2.1　考虑图 1 所示的有界 Trellis X,$a\in X^{\wedge\text{-ass}}$,取 $S(x,y)=x\vee y$ 为 $[0,a]$ 上的三角余模,则由定理 2.1 可得 V_S 是 X 上的零模,见表 1。

例 2.2　考虑图 2 所示的有界 Trellis X,$a\in X^{\vee\text{-ass}}$,取 $T(x,y)=x\wedge y$ 为 $[a,1]$ 上的三角模,则由定理 2.2 可得 V_T 是 X 上的零模,见表 2。

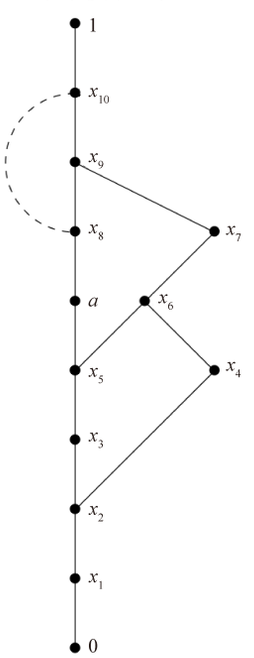


图 1　有界 Trellis X

Figure 1　bounded Trellis X

表 1　有界 Trellis X 上的零模 $V_S(x,y)$

Table 1　nullnorms $V_S(x,y)$ on bounded Trellis X

V_S	0	x_1	x_2	x_3	x_5	a	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	1
0	0	x_1	x_2	x_3	x_5	a	x_2	x_5	x_5	a	a	a	a
x_1	x_1	x_1	x_2	x_3	x_5	a	x_2	x_5	x_5	a	a	a	a
x_2	x_2	x_2	x_2	x_3	x_5	a	x_2	x_5	x_5	a	a	a	a
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_5	a	x_3	x_5	x_5	a	a	a	a
x_5	x_5	x_5	x_5	x_5	x_5	a	x_5	x_5	x_5	a	a	a	a
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
x_4	x_2	x_2	x_2	x_3	x_5	a	x_2	x_5	x_5	a	a	a	a
x_6	x_5	x_5	x_5	x_5	x_5	a	x_5	x_5	x_5	a	a	a	a
x_7	x_5	x_5	x_5	x_5	x_5	a	x_5	x_5	x_5	a	a	a	a
x_8	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	x_8
x_9	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	x_9
x_{10}	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	x_{10}
1	a	a	a	a	a	a	a	a	a	x_8	x_9	x_{10}	1

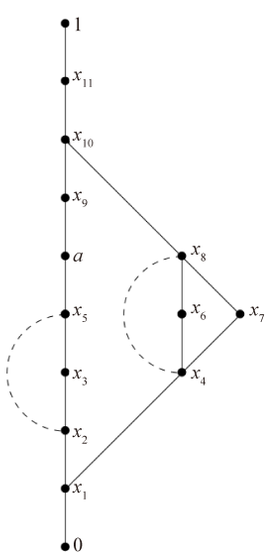


图 2　有界 Trellis X

Figure 2　bounded Trellis X

表 2　有界 Trellis X 上的零模 $V_T(x,y)$

Table 2　nullnorms $V_T(x,y)$ on bounded Trellis X

V_T	0	x_1	x_2	x_3	x_5	a	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	1
0	0	x_1	x_2	x_3	x_5	a	a	a	a	a	a	a	a	a
x_1	x_1	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
x_2	x_2	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
x_3	x_3	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
x_5	x_5	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
x_4	a	a	a	a	a	a	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_9	x_{10}	x_{10}	x_{10}
x_6	a	a	a	a	a	a	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_9	x_{10}	x_{10}	x_{10}
x_7	a	a	a	a	a	a	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_9	x_{10}	x_{10}	x_{10}
x_8	a	a	a	a	a	a	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_9	x_{10}	x_{10}	x_{10}
x_9	a	a	a	a	a	a	x_9	x_9	x_9	x_9	x_9	x_9	x_9	x_9
x_{10}	a	a	a	a	a	a	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_9	x_{10}	x_{10}	x_{10}
x_{11}	a	a	a	a	a	a	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{11}
1	a	a	a	a	a	a	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_{10}	x_9	x_{10}	x_{11}	1

3 结束语

作为一类混合型聚合算子,零模不论在理论还是应用方面,均具有重要的研究意义。目前,有界Trellis上零模的研究引起学者广泛关注。本文构造了一类有界Trellis上的零模,结果表明有界Trellis上存在新的不同的零模,进一步丰富和发展了有界Trellis上的零模理论。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2025. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

参 考 文 献

[1] KARAÇAL F, İNCE M A, MESIAR R. Nullnorms on bounded lattice[J]. Information Sciences, 2015, 325: 227-236. DOI:10.1016/j.ins.2015.06.052.

[2] DRYGAŚ P. A characterization of idempotent nullnorms [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 145: 455-461. DOI: 10.1016/S0165-0114(03)00259-8.

[3] QIN F, ZHAO B. The distributive equations for idempotent uninorms and nullnorms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 155: 446-458. DOI: 10.1016/j.fss.2005.04.010.

[4] DE BAETS B, DE MEYER H, DE SCHUYMER B, et al. Cyclic evaluation of transitivity of reciprocal relations [J]. Social Choice and Welfare, 2006, 26: 217-238. DOI:10.1007/s00355-006-0093-3.

[5] DE BAETS, DE LOOF K, DE MEYER H. A frequentist view on cycle-transitivity of reciprocal relations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 281: 198-218. DOI: 10.1016/j.fss.2015.06.020.

[6] KERR B, RILEY M A, FELDMAN M W, et al. Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock-paper-scissors [J]. Nature, 2002, 418: 171-174. DOI:10.1038/nature00823.

[7] FRIED E. Tournaments and non-associative lattices[J]. Annales Universitatis Scientiarium Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica, 1970, 13:151-164.

[8] SKALA H. Trellis theory[M]. Providence: American Mathematical Society, 1972.

[9] ZEDAM L, DE BAETS B. Triangular norms on bounded trellises[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 462:108468. DOI:10.1016/J. FSS.2023.01.003.

[10] KONG Y, ZHAO B. Uninorms on bounded trellises[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2024, 481: 108898. DOI: 10.1016/J. FSS.2024.108898.

[11] ALSINA M, FRANK B, SCHWEIZER H. Associative functions. Triangular norms and copulas [M]. Hackensack: World Scientific, 2006.

[12] DUBOIS D, PRADE H. A review of fuzzy set aggregation connectives [J]. Information Sciences, 1985, 36: 85-121. DOI: 10.1016/0020-0255 (85) 90027-1.

[13] DUBOIS D, PRADE H. Fundamentals of fuzzy sets [M]. Boston:Kluwer Academic Publishers, 2000.

[14] GRABISCH M, MARICHAL J L, MESIAR R, et al. Aggregation functions [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[15] MESIAR R, PAP E. Different interpretations of triangular norms and related operations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 96: 183-189. DOI: 10.1016/s0165-0114(96)00290-4.

[16] BACZYŃSKI M, JAYARAM B. Fuzzy implications [M]. Berlin:Springer, 2008.

[17] XIU Z Y, XU Z. Nullnorms on bounded trellises[EB/OL]. [2025-04-02]. https://arxiv.org/abs/2408.09321.

(责任编辑:马田田)