DOI:10.19789/j.1004-9398.2026.01.002　　**Open Access**
文献引用:岳文艳,张世金.闭收缩梯度里奇孤立子的一些刚性定理[J].首都师范大学学报(自然科学版),2026,47(1):14-20. YUE W Y, ZHANG S J. Some rigidity theorems for closed Ricci shrinkers[J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition), 2026, 47(1):14-20.

闭收缩梯度里奇孤立子的一些刚性定理*

岳文艳[1]，张世金[2**]

(1. 首都师范大学数学科学学院，北京　100048；
2. 北京航空航天大学数学科学学院，北京　102206)

摘要:本文研究闭流形上收缩梯度里奇孤立子的一些性质,在无迹曲率张量的$L^{n/2}$范数足够小和直径有上界且体积有下界的假设条件下,利用经典的Moser迭代,给出了一些刚性结果,如当维数为4时,不需要体积有下界的条件。

关键词:收缩梯度里奇孤立子;无迹曲率张量;球空间形式
中图分类号:O186　　**文献标志码**:A

Some rigidity theorems for closed Ricci shrinkers*

YUE Wenyan[1], ZHANG Shijin[2**]

(1. School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing　100048;
2. School of Mathematical Sciences, Beihang University, Beijing　102206)

Abstract: This paper study some properties about the shrinking gradient Ricci solitons on closed manifold, under the assumptions of $L^{n/2}$-norm of traceless curvature tensor are sufficiently small and the diameter has an upper bound and the volume has a lower bound, using the classical Moser iteration to give some rigidity results, such as without assumption of volume has a lower bound if the dimension is 4.

Keywords: shrinking gradient Ricci solitons; traceless curvature tensor; spherical space form
CLC: O186　　**DC**: A

0　引　言

梯度里奇孤立子在Hamilton的里奇流中扮演着重要角色,因为其对应于自相似解,并且经常作为里奇流的奇点模型出现。因此,对收缩梯度里奇孤立子(简称里奇收缩子)的分类,对于研究里奇流的奇点模型非常重要。本文给出了一些判断里奇收缩子是一个空间形式的充分条件。

设(M^n, g)是n维完备的黎曼流形,若存在M上的一个光滑函数f,使得

$$R_{ic} + \nabla\nabla f = \lambda g$$

成立,其中λ是某个常数。则这样的流形称为梯度里奇孤立子,记作(M, g, f)。如果f是常数,那么度量g就是爱因斯坦度量。因此,梯度里奇孤立子可以看成爱因斯坦度量的推广。当$\lambda < 0$,称此里奇孤立子是膨胀的;当$\lambda = 0$,是稳态;当$\lambda > 0$,是收缩态。函数f被称为梯度里奇孤立子的势函数。通过对度量g做适当的缩放,可以假设$\lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$。

收稿日期:2025-03-10
*国家自然科学基金项目(12171018)
**通信作者:shijinzhang@buaa.edu.cn

本文只考虑收缩的情况,即 $\lambda=\frac{1}{2}$。用 R 表示 (M,g,f) 的数量曲率,并通过添加一个常数将势函数 f 正规化,使得

$$R+|\nabla f|^2=f。\tag{0.1}$$

Petersen[1]证明了无迹曲率张量的 $L^{n/2}$ 范数充分小的正爱因斯坦流形必然是球空间形式,文中空间形式指的是常曲率空间。本文在闭里奇收缩子上给出一些类似的定理。

定理 0.1 给定正数 D、V,存在一个正常数 $\epsilon=\epsilon(n,D,V)$,使得满足条件

$$V_{\mathrm{ol}}(g)\geqslant V, d_{\mathrm{iam}}(g)\leqslant D \text{ 和 } \int_M\left|\mathring{R}_m\right|^{n/2}\mathrm{d}v_g\leqslant\epsilon \tag{0.2}$$

的闭里奇收缩子 (M,g) 一定是球空间形式。

定理 0.2 给定正数 D,存在一个正常数 $\epsilon=\epsilon(n,D)$,使得满足条件

$$d_{\mathrm{iam}}(g)\leqslant D \text{ 和 } \int_M\left|R_m-\frac{g\circ g}{4(n-1)}\right|^{n/2}\mathrm{d}v_g\leqslant\epsilon V_{\mathrm{ol}}(g) \tag{0.3}$$

的闭里奇收缩子 (M,g) 一定是球空间形式。

定理 0.3 考虑 4 维闭里奇孤立子的情形。给定正数 D,存在一个充分小的正常数 $\epsilon=\epsilon(n,D)$,使得满足条件

$$d_{\mathrm{iam}}(g)\leqslant D \text{ 和 } \int_M\left|\mathring{R}_m\right|^2\mathrm{d}v_g\leqslant\epsilon \tag{0.4}$$

的 4 维闭里奇收缩子一定是球空间形式。

1 预备知识——数量曲率以及势函数 f

由 Chen[2]、Zhang Z H[3]和 Zhang S J[4]的工作,有以下梯度孤立子上的数量曲率估计。

定理 1.1 任意完备收缩或稳态梯度里奇孤立子的数量曲率 $R\geqslant 0$;任意完备扩张梯度里奇孤立子的数量曲率 $R\geqslant-\frac{n}{2}$。若以上等号在某点取到,则该梯度孤立子是爱因斯坦度量;对于收缩孤立子的情形,该梯度孤立子必为高斯孤立子。特别地,闭里奇收缩子的数量曲率一定>0。

结合假设(0.1)可得如下引理。

引理 1.2 令 (M,g,f) 为具有势函数 f 的完备梯度里奇收缩子。令 $p\in M$ 为一基点,则对任意 x 有

$$0\leqslant f(x)\leqslant\left(\sqrt{f(p)}+\frac{1}{2}d(p,x)\right)^2。$$

推论 1.3 令 (M,g,f) 为闭里奇收缩子,若对正的常数 D 有,$d_{\mathrm{iam}}(M,g)\leqslant D$,则

$$0\leqslant R(x)\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{2n}+D\right)^2。$$

证明 若 $p\in M$ 是 f 的最小值点,则有 $\nabla f(p)=0$ 和 $\Delta f(p)\geqslant 0$,由下式

$$R+\Delta f=\frac{n}{2} \text{ 和 } R+|\nabla f|^2=f,$$

得 $f(p)=R(p)\leqslant\frac{n}{2}$,该推论可由引理 1.2 得到。

基于文献[5]中的论证方法,Cao 和 Zhou[6]非紧情形下给出了 f 的二次增长估计,后由 Haslhofer 和 Müller[7] 改进。

2 里奇收缩子上的 Moser 迭代

设 $q\in M$ 是 f 的最大值点。根据势函数 f 的基本恒等式

$$R+|\nabla f|^2=f,\tag{2.1}$$

易知 R 在点 q 处达到最大值。同时,由数量曲率的正性可得 f 的梯度估计

$$\left|\nabla\sqrt{f}\right|\leqslant\frac{1}{2}。\tag{2.2}$$

考虑共形度量 $\tilde{g}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{n-2}f}g$。下文记 $\widetilde{R_{\mathrm{ic}}}$ 和 V_{ol} 分别为 $\tilde{g}$ 对应的里奇张量和体积函数。那么通过直接计算可得[8-9]

$$\widetilde{R_{\mathrm{ic}}}=\frac{1}{2}g+\frac{1}{n-2}\mathrm{d}f\otimes\mathrm{d}f+\frac{1}{n-2}\left(\frac{n}{2}-R-|\nabla f|^2\right)g=\frac{1}{n-2}\left[\mathrm{d}f\otimes\mathrm{d}f+(n-1-f)\mathrm{e}^{\frac{2f}{n-2}}\tilde{g}\right]\geqslant\frac{-f}{n-2}\mathrm{e}^{\frac{2f}{n-2}}\tilde{g}。$$

推论 2.1 给定 n 和 D,存在 $C=C(n,D)$ 使得对于任意 $(M,g)\in\mathcal{O}^n$ 且 $d_{\mathrm{iam}}(g)\leqslant D$,以下体积比较性质成立

$$\frac{V_{\mathrm{ol}}\left(B(x,r_2)\right)}{V_{\mathrm{ol}}\left(B(x,r_1)\right)}\leqslant C\frac{r_2^n}{r_1^n},\ \forall x\in M,0<r_1<r_2,\tag{2.3}$$

其中 $\mathcal{O}^n$ 表示 $\lambda=\frac{1}{2}$ 的所有 n 维闭里奇收缩子组成的集合。

证明 由于推论 1.3,可以选择 2 个常数 $\alpha=\alpha(n,D)$,$\beta=\beta(n,D)$,满足

$$\widetilde{R_{\mathrm{ic}}}\geqslant-(n-1)\alpha\tilde{g},\ \beta\tilde{g}\geqslant g\geqslant\tilde{g}。\tag{2.4}$$

那么对于所有的 $x\in M$ 和 $r>0$,有 $B_g(x,r)\subset B_{\tilde{g}}(x,r)\subset B_g(x,\beta^{1/2}r)$。根据 Bishop-Gromov 相对体积比较定理,

$$\frac{V_{\mathrm{ol}\,g}\left(B_g(x,r_2)\right)}{V_{\mathrm{ol}\,g}\left(B_g(x,r_1)\right)}\leqslant\beta^{n/2}\frac{V_{\mathrm{ol}\,\tilde{g}}\left(B_{\tilde{g}}(x,r_2)\right)}{V_{\mathrm{ol}\,\tilde{g}}\left(B_{\tilde{g}}(x,\beta^{-1/2}r_1)\right)}\leqslant$$

$$\beta^{n/2}\Lambda\frac{r_2^n}{\left(\beta^{-1/2}r_1\right)^n}=\Lambda\beta^n\frac{r_2^n}{r_1^n}。\tag{2.5}$$

其中Λ是一个依赖于α以及r_1,r_2的上界的常数,即D。因此,$C=\Lambda\beta^n$是可行的。

推论 2.2 给定n和常数v、D,存在$C_s=C_s(n,v,D)$满足以下性质。假设$(M,g)\in\mathcal{O}^n$满足$V_{\mathrm{ol}}(g)\geqslant v$且$d_{\mathrm{iam}}(M,g)\leqslant D$,则以下局部索伯列夫不等式

$$\left(\int_B|\phi|^{\frac{2n}{n-2}}\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-2}{2n}}\leqslant C_s\left(\int_B|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall\phi\in C_0^\infty(B)\tag{2.6}$$

成立,式中B为半径$r\leqslant\min\left(\frac{1}{4}d_{\mathrm{iam}}(M,g),1\right)$的度量球。

证明 令2个常数$\alpha=\alpha(n,D)$,$\beta=\beta(n,D)$,满足

$$\widetilde{R_{\mathrm{ic}}}\geqslant-(n-1)\alpha\tilde{g},\beta\tilde{g}\geqslant g\geqslant\tilde{g}。\tag{2.7}$$

则有$\widetilde{R_{\mathrm{ic}}}\geqslant-(n-1)\alpha\tilde{g}$和$V_{\mathrm{ol}\,\tilde{g}}(M)\geqslant\beta^{-n/2}V_{\mathrm{ol}\,g}(M)\geqslant\beta^{-n/2}v$。根据Croke[10]的经典结果,或参见文献[11],$\tilde{g}$的局部索伯列夫常数是绝对有界的。由于g的$L^{\frac{2n}{n-2}}$范数和$H^{1,2}$范数与$\tilde{g}$的范数一致等价,因此不等式(2.7)成立。

定义局部索伯列夫常数为$C_s(B(x,r))$的极小值,满足

$$\left(\int_{B(x,r)}u^{\frac{2n}{n-2}}\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-2}{2n}}\leqslant C_s\cdot\left(\int_{B(x,r)}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{2}},\forall u\in C_0^\infty(B(x,r))。\tag{2.8}$$

定理 2.3[12] 设完备黎曼流形满足$R_{\mathrm{ic}}\geqslant-(n-1)\alpha g$,令$B(x,r)$是一个半径为$r$的度量球。记$B^\alpha(r)$是截面曲率为$-\alpha$的空间形式中半径为$r$的度量球。如果$r\leqslant\min\left(\frac{1}{4}d_{\mathrm{iam}}(M),1\right)$,那么局部索伯列夫常数有上界

$$C_s(B(x,r))\leqslant C(n,\alpha)\times\left(\frac{V_{\mathrm{ol}}(B^\alpha(r))}{V_{\mathrm{ol}}(x,r)}\right)^{\frac{1}{n}},\tag{2.9}$$

式中$C(n,\alpha)$是一个依赖于n和α的常数。

通过Moser迭代,得到下面重要的估计。

定理 2.4 给定n和D,存在常数ϵ和C满足以下性质。假设$(M,g)\in\mathcal{O}^n$且$d_{\mathrm{iam}}(g)\leqslant D$,令$u$为$M$上非负的利普希茨函数,满足

$$u\Delta u+\frac{1}{4}|\nabla u|^2+hu^2+8u^3\geqslant0。\tag{2.10}$$

式中h是非负有界函数。则对于半径为$r\leqslant\min\left(\frac{1}{4}d_{\mathrm{iam}}(M,g),1\right)$的度量球$B(x,r)$,若

$$\int_{B(x,r)}u^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}v\leqslant\frac{\epsilon r^n}{V_{\mathrm{ol}}(B(x,r))},\tag{2.11}$$

则有

$$\sup_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)}u\leqslant C\times\left(r^{-2}+\sup_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)}h\right)\times\left(\frac{r^n}{V_{\mathrm{ol}}(B(x,r))}\int_{B(x,r)}u^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{2}{n}}。\tag{2.12}$$

按照文献[13]中的方法来证明此定理。

证明 记$C_s(B(x,r))$为$B(x,r)$的局部索伯列夫常数。根据Anderson的定理2.3和推论2.1,有

$$C_s\leqslant C_0\frac{r}{V_{\mathrm{ol}}(B(x,r))^{\frac{1}{n}}},$$

式中$C_0=C_0(n,D)$是一个常数。将函数乘以η^2u^{q-2},其中截断函数满足$\sup\eta\subset B(x,r)$。由文献[13]可得

$$\frac{q-1}{q^2}\int\eta^2\left|\nabla u^{\frac{q}{2}}\right|^2\mathrm{d}v\leqslant\frac{2}{q-1}\int u^q|\nabla\eta|^2\,\mathrm{d}v+\int\eta^2hu^q\mathrm{d}v+8\int\eta^2u^{q+1}\mathrm{d}v。\tag{2.13}$$

根据索伯列夫不等式,令$\mu=\frac{n}{n-2}$,有

$$\left(\int\left(\eta u^{\frac{q}{2}}\right)^{2\mu}\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{\mu}}\leqslant C_s^2\int\left|\nabla\left(\eta u^{\frac{q}{2}}\right)\right|^2\mathrm{d}v\leqslant$$

$$C_s^2\int\left(\eta^2\left|\nabla u^{\frac{q}{2}}\right|^2+u^q|\nabla\eta|^2\right)\mathrm{d}v\leqslant$$

$$C_s^2\left[\frac{2q^2}{(q-1)^2}+1\right]\int u^q|\nabla\eta|^2\,\mathrm{d}v+$$

$$\frac{q^2C_s^2}{q-1}\int\left(\sup h\eta^2u^q+8\eta^2u^{q+1}\right)\mathrm{d}v\leqslant$$

$$9C_s^2\int u^q|\nabla\eta|^2\,\mathrm{d}v+2qC_s^2\int\left(\sup h\eta^2u^q+8\eta^2u^{q+1}\right)\mathrm{d}v。\tag{2.14}$$

由Hölder不等式得,

$$\int_{B(x,r)}\eta^2u^{q+1}\leqslant\left(\int_{B(x,r)}u^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}\cdot\left(\int_{B(x,r)}\left(\eta u^{\frac{q}{2}}\right)^{2\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}。$$

因此,当$q=\frac{n}{2}$时,假设

$$\int_{B(x,r)}u^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}v\leqslant\left(\frac{1}{4nC_0}\right)^n\cdot\frac{r^n}{V_{\mathrm{ol}}(B(x,r))}\tag{2.15}$$

成立,则 $C_s^2\left(\int_{B(x,r)}u^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}\leqslant\frac{1}{16n^2}$ 且有

$$\left(\int\left(\eta u^{\frac{q}{2}}\right)^{2\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\leqslant 18C_s^2\int u^q\left|\nabla\eta\right|^2\mathrm{d}v+4qC_s^2\sup h\int\eta^2u^q\,\mathrm{d}v。\tag{2.16}$$

令 $\rho(\cdot)=d(x,\cdot)$ 为距离函数,函数 ξ 为 $\xi(t)=0,t\geqslant 1$;$\xi(t)=t,t\in[0,1]$;$\xi(t)=1,t\leqslant 0$。令 $\eta=\xi\left(2^2\left(\rho-\frac{3}{4}\right)r^{-1}\right)$,则有

$$\left(\int_{B\left(x,\left(\frac{3}{4}\right)r\right)}u^{\frac{n\mu}{2}}\right)^{\frac{1}{\mu}}\leqslant 192r^{-2}C_s^2\int_{B(x,r)}u^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}v+2nC_s^2\sup h\int_{B(x,r)}u^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}v=\left(288r^{-2}+2n\sup h\right)C_s^2\int_{B(x,r)}u^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}v。\tag{2.17}$$

由于 $0<2^{-k-1}<2^{-k}$,$k\geqslant 2$。设 $\rho_k=\left(1-\sum_{i=2}^{k}2^{-i}\right)r$,$\eta_k=\xi\left(2^2\left(\rho-\rho_{k+1}\right)r^{-1}\right)$。利用 Hölder 和 Young 不等式可得

$$\int_{B(x,\rho_k)}\eta_k^2u^{q+1}\,\mathrm{d}v\leqslant\left(\int_{B(x,\rho_k)}u^{\frac{n\mu}{2}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{2}{n\mu}}\cdot\left(\int_{B(x,\rho_k)}\left(\eta_ku^{\frac{q}{2}}\right)^{2v}\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{v}}\leqslant\left(\int_{B(x,\rho_k)}u^{\frac{n\mu}{2}}\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{2}{n\mu}}\cdot\left(\delta\left(\eta_k^2u^q\right)_\mu+C(n)\delta^{-(n-2)/2}\left(\eta_k^2u^q\right)_1\right),\tag{2.18}$$

其中 $v=\frac{n^2}{n^2-2n+4}$。将式(2.18)代入式(2.14)中,令 δ 满足

$$\delta\cdot 16qC_s^2\cdot\left(288r^{-2}+2n\sup h\right)^{\frac{2}{n}}C_s^{\frac{4}{n}}\|u\|_{\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}。$$

则有

$$\left(\int_{B(x,\rho_{k+1})}u^{q\mu}\right)^{1/\mu}\leqslant C(n)C_s^2\left(2^4+q^{\frac{n}{2}}\right)\left(r^{-2}+\sup h\right)\int_{B(x,\rho_k)}u^q\,\mathrm{d}v。$$

再令 $q_2=\frac{n}{2}$,并通过 $q_{k+1}=q_k\mu$ 递归定义 q_k,得到

$$\|u\|_{L^{q_{k+1}}\left(B(x,\rho_{k+1})\right)}\leqslant\left[C(n)C_s^2\left(2^4+q_{k+1}^{n/2}\right)\left(r^{-2}+\sup h\right)\right]^{1/q_{k+1}}\|u\|_{L^{q_k}\left(B(x,\rho_k)\right)}\leqslant\left[C(n)C_s^22^{8n}\left(r^{-2}+\sup h\right)\right]^{1/q_{k+1}}\|u\|_{L^{q_k}\left(B(x,\rho_k)\right)}\leqslant\left[C(n)C_s^2\left(r^{-2}+\sup h\right)\right]^{\frac{2\mu}{n(\mu-1)}}2^{\frac{8\mu}{(\mu-1)}}\|u\|_{L^{\frac{n}{2}}(B(x,r))}。$$

令 k 趋于无穷,则得到

$$\sup_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)}|u|\leqslant\left[C(n)C_s^2\left(r^{-2}+\sup h\right)\right]2^{4n}\|u\|_{L^{n/2}(B(x,r))}\leqslant 2^{4n}C(n)C_0^2\left(r^{-2}+\sup h\right)\left(\frac{r^n}{V_{\mathrm{ol}}\left(B(x,r)\right)}\frac{\int_{B(x,r)}u^n}{2}\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{2}{n}}。$$

令 $C=2^{4n}C(n)C_0^2$,可得结论。

3 里奇收缩子上 R_m 和 $\mathring{R}_m$ 的不等式

令 (M,g) 为里奇收缩子,定义 $u=\left|\mathring{R}_m\right|$。

引理 3.1 在局部坐标系下,有

$$\Delta R_{ijkl}=\nabla_pR_{ijkl}\nabla_pf+R_{ijkl}+2\left(-B_{ijkl}-B_{ikjl}+B_{iljk}+B_{ijlk}\right),\tag{3.1}$$

其中 $B_{ijkl}=R_{piqj}R_{pkql}$。

证明 在法坐标系下通过直接计算可得

$$\begin{aligned}\Delta R_{ijkl}&=\nabla_p\nabla_pR_{ijkl}=-\nabla_p\left(\nabla_iR_{jpkl}+\nabla_jR_{pikl}\right)=\\&-\nabla_i\nabla_pR_{jpkl}+R_{pij}^qR_{qpkl}+R_{pip}^qR_{jqkl}+R_{pik}^qR_{jpql}+R_{pil}^qR_{jpkq}-\\&\nabla_j\nabla_pR_{pikl}+R_{pjp}^qR_{qikl}+R_{pji}^qR_{pqkl}+R_{pjk}^qR_{piql}+R_{pjl}^qR_{pikq}=\\&\nabla_i\left(\nabla_kR_{jplp}+\nabla_lR_{jppk}\right)+\nabla_j\left(\nabla_kR_{pilp}+\nabla_lR_{pipk}\right)+\\&R_{piqj}R_{qpkl}+R_{piqp}R_{jqkl}+R_{piqk}R_{jpql}+R_{piql}R_{jpkq}+\\&R_{pjqp}R_{qikl}+R_{pjqi}R_{pqkl}+R_{pjqk}R_{piql}+R_{pjql}R_{pikq}=\\&\nabla_i\left(\nabla_lf_{jk}-\nabla_kf_{jl}\right)+\nabla_j\left(\nabla_kf_{il}-\nabla_lf_{ik}\right)-2R_{piqk}R_{pjql}+\\&2R_{piql}R_{pjqk}-2R_{piqj}R_{pqkl}+R_{qi}R_{qjkl}-R_{qj}R_{qikl}=\\&-\nabla_i\left(R_{lkpj}\nabla_pf\right)-\nabla_j\left(R_{klpi}\nabla_pf\right)-2R_{piqk}R_{pjql}+2R_{piql}R_{pjqk}-\\&2R_{piqj}R_{pqkl}+R_{qi}R_{qjkl}-R_{qj}R_{qikl}=\\&\nabla_iR_{pjkl}\nabla_pf+\nabla_jR_{ipkl}\nabla_pf+R_{pjkl}\nabla_i\nabla_pf+R_{ipkl}\nabla_j\nabla_pf-\\&2R_{piqk}R_{pjql}+2R_{piql}R_{pjqk}-2R_{piqj}R_{pqkl}+R_{qi}R_{qjkl}-R_{qj}R_{qikl}=\\&\nabla_iR_{pjkl}\nabla_pf+\nabla_jR_{ipkl}\nabla_pf+R_{ijkl}-\\&2R_{piqk}R_{pjql}+2R_{piql}R_{pjqk}-2R_{piqj}R_{pqkl}=\\&\nabla_pR_{ijkl}\nabla_pf+R_{ijkl}+\\&2\left(-R_{piqk}R_{pjql}+R_{piql}R_{pjqk}-R_{piqj}R_{pkql}+R_{piqj}R_{plqk}\right)。\end{aligned}$$

引理 3.2 函数 $v=|R_m|$ 满足

$$v\Delta v+\frac{1}{4}|\nabla v|^2+\left(|\nabla f|^2-1\right)v^2+8v^3\geqslant 0。\tag{3.2}$$

证明 由 Kato 不等式 $|\nabla R_m|\geqslant|\nabla|R_m||$,计算可得

$$\begin{aligned}v\Delta v&=\left\langle\Delta R_m,R_m\right\rangle+|\nabla R_m|^2-|\nabla|R_m||^2=\\&\left\langle\nabla_{\nabla f}R_m+R_m+8R_m*R_m,R_m\right\rangle+|\nabla R_m|^2-|\nabla|R_m||^2\geqslant\\&-|\nabla f||\nabla R_m||R_m|+|R_m|^2-8|R_m|^3+|\nabla R_m|^2-|\nabla|R_m||^2\geqslant\\&-|\nabla f|^2v^2+v^2-8v^3-\frac{1}{4}|\nabla R_m|^2+|\nabla R_m|^2-|\nabla|R_m||^2\geqslant\end{aligned}$$

$$-\left(\left|\nabla f\right|^2-1\right)v^2-8v^3-\frac{1}{4}\left|\nabla\left|R_m\right|\right|^2。$$

为了更好地理解张量 $\mathring{R}_m$，回顾 Kulkarni-Nomizu 乘积：对于2个对称的(2,0)型张量 h 和 g，定义一个(4,0)型张量 $h\circ g$ 为

$$\left(h\circ g\right)_{ijkl}=h_{ik}g_{jl}+h_{jl}g_{ik}-h_{il}g_{jk}-h_{jk}g_{il}。\quad(3.3)$$

利用 Kulkarni-Nomizu 乘积，黎曼曲率张量具有以下众所周知的正交分解为

$$R_m=W+\frac{1}{n-2}\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g+\frac{R}{2n(n-1)}g\circ g。\quad(3.4)$$

特别地，曲率张量的无迹部分是

$$\mathring{R}_m=W+\frac{1}{n-2}\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g。\quad(3.5)$$

引理 3.3 记 $A_{ijkl}=-B_{ijkl}-B_{ikjl}+B_{iljk}+B_{ijlk}$，则有

$$\Delta\mathring{R}_m=\nabla_{\nabla f}\mathring{R}_m+\mathring{R}_m+2\left(A+\frac{\left|R_{\mathrm{ic}}\right|^2}{2n(n-1)}g\circ g\right)。\quad(3.6)$$

证明 注意到 $\Delta R=\sum_{i,j}\Delta R_{ijij}$，可得

$$\Delta\mathring{R}_m=\nabla_{\nabla f}\mathring{R}_m+\mathring{R}_m+2\left(A-\frac{\sum_{i,j}A_{ijij}}{2n(n-1)}g\circ g\right)。$$

根据文献[14]中引理7.4，$\sum_j B_{ijkj}=2\sum_j B_{ijjk}$，则有

$$\sum_{i,j}A_{ijij}=\sum_{i,j}\left(-B_{ijij}-B_{iijj}+B_{ijji}+B_{jiji}\right)=\sum_{i,j}\left(-B_{iijj}\right)=-\left|R_{\mathrm{ic}}\right|^2。$$

下面计算 A。在局部坐标系中，定义 $\mathring{B}_{ijkl}=\mathring{R}_{m(piqj)}\mathring{R}_{m(pkql)}$，其与 B 有关系为

$$\mathring{B}_{ijkl}=\left(R_{piqj}-\frac{R}{n(n-1)}\left(g_{pq}g_{ij}-g_{pj}g_{qi}\right)\right)\cdot\left(R_{pkql}-\frac{R}{n(n-1)}\left(g_{pq}g_{kl}-g_{pl}g_{kq}\right)\right)=$$
$$B_{ijkl}-\frac{R}{n(n-1)}\left(R_{kl}g_{ij}+R_{ij}g_{kl}-2R_{iljk}\right)+\frac{R^2}{n^2(n-1)^2}\left[(n-2)g_{ij}g_{kl}+g_{ik}g_{jl}\right]。$$

令

$$\mathring{A}_{ijkl}=-\mathring{B}_{ijkl}-\mathring{B}_{ikjl}+\mathring{B}_{iljk}+\mathring{B}_{ijlk},\quad(3.7)$$

通过直接计算，可得

$$A=\mathring{A}-\frac{R}{n(n-1)}R_{\mathrm{ic}}\circ g+\frac{R^2}{2n^2(n-1)}g\circ g。\quad(3.8)$$

引理 3.4

$$\Delta\mathring{R}_m=\nabla_{\nabla f}\mathring{R}_m+\mathring{R}_m+2\mathring{A}+\frac{\left|\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\right|^2}{n(n-1)}g\circ g-\frac{2R}{n(n-1)}\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g。\quad(3.9)$$

证明 由式(3.8)可得

$$A+\frac{\left|R_{\mathrm{ic}}\right|^2}{2n(n-1)}g\circ g=\mathring{A}+\frac{\left|\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\right|^2}{2n(n-1)}g\circ g-\frac{R}{n(n-1)}\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g。$$

由引理3.3即可推得结论。

注释 3.5 当流形 $\left(M^n,g\right)$ 是爱因斯坦流形时，则有 $\Delta\mathring{R}_m=\mathring{R}_m+2\mathring{A}$。基于这一观察，Petersen[1]证明了具有 R_m 的平均 $L^{n/2}$ 范数较小的爱因斯坦流形的刚性定理。并可得到本文定理证明所需要的关键不等式。

引理 3.6 函数 $u=\left|\mathring{R}_m\right|$ 满足不等式

$$u\Delta u+\frac{1}{4}\left|\nabla u\right|^2+\left(\left|\nabla f\right|^2-1+\frac{2(n-2)R}{n(n-1)}\right)u^2+8u^3\geqslant 0,\quad(3.10)$$

$$u\Delta u+\frac{1}{4}\left|\nabla u\right|^2+fu^2+8u^3\geqslant 0。\quad(3.11)$$

证明 通过直接计算有

$$\left|\mathring{R}_m\right|\Delta\left|\mathring{R}_m\right|=\left\langle\Delta\mathring{R}_m,\mathring{R}_m\right\rangle+\left|\nabla\mathring{R}_m\right|^2-\left|\nabla\left|\mathring{R}_m\right|\right|^2=$$
$$\left|\nabla\mathring{R}_m\right|^2-\left|\nabla\left|\mathring{R}_m\right|\right|^2+\left\langle\nabla_{\nabla f}\mathring{R}_m,\mathring{R}_m\right\rangle+\left\langle\mathring{R}_m+2\mathring{A},\mathring{R}_m\right\rangle+\left\langle\frac{\left|\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\right|^2}{n(n-1)}g\circ g-\frac{2R}{n(n-1)}\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g,\mathring{R}_m\right\rangle。$$

前3项的估计为

$$\left|\nabla\mathring{R}_m\right|^2-\left|\nabla\left|\mathring{R}_m\right|\right|^2+\left\langle\nabla_{\nabla f}\mathring{R}_m,\mathring{R}_m\right\rangle\geqslant\left|\nabla\mathring{R}_m\right|^2-\left|\nabla\left|\mathring{R}_m\right|\right|^2-\left|\nabla f\right|\left|\nabla\mathring{R}_m\right|\left|\mathring{R}_m\right|\geqslant$$
$$\left|\nabla\mathring{R}_m\right|^2-\left|\nabla\left|\mathring{R}_m\right|\right|^2-\frac{1}{4}\left|\nabla\mathring{R}_m\right|^2-\left|\nabla f\right|^2\left|\mathring{R}_m\right|^2\geqslant-\frac{1}{4}\left|\nabla\left|\mathring{R}_m\right|\right|^2-\left|\nabla f\right|^2\left|\mathring{R}_m\right|^2。$$

注意到 $g\circ g\perp\mathring{R}_m$ 和 $W\perp\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g$，下面估计最后一项。

$$\left\langle\frac{\left|\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\right|^2}{n(n-1)}g\circ g-\frac{2R}{n(n-1)}\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g,\mathring{R}_m\right\rangle=-\left\langle\frac{2R}{n(n-1)}\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g,\mathring{R}_m\right\rangle=$$
$$-\left\langle\frac{2R}{n(n-1)}\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g,\frac{1}{n-2}\mathring{R}_{\mathrm{ic}}\circ g\right\rangle=$$

$$-\frac{2R}{n(n-1)(n-2)}\left|\mathring{R}_{ic}\circ g\right|^2\geqslant -\frac{2(n-2)R}{n(n-1)}\left|\mathring{R}_m\right|^2。$$

观察到

$$\left\langle \mathring{R}_m+2\mathring{A},\ \mathring{R}_m\right\rangle\geqslant\left|\mathring{R}_m\right|^2-8\left|\mathring{R}_m\right|^3。$$

代入这些估计,可得第1个不等式。再由

$$|\nabla f|^2+\frac{2(n-2)R}{n(n-1)}\leqslant|\nabla f|^2+R=f,$$

即可得出第2个不等式。

令 $u_1=\left|R_m-\frac{1}{4(n-1)}g\circ g\right|$,通过类似的计算,可得如下引理。

引理3.7

$$u_1\Delta u_1+\frac{1}{4}|\nabla u_1|^2+\left(|\nabla f|^2+1\right)u_1^2+8u_1^3\geqslant 0。\quad(3.12)$$

因此,$u=\left|\mathring{R}_m\right|$ 或 $u=\left|R_m-\frac{1}{4(n-1)}g\circ g\right|$ 都满足如下不等式

$$u\Delta u+\frac{1}{4}|\nabla u|^2+(1+f)u^2+8u^3\geqslant 0。\quad(3.13)$$

4　主要定理的证明

4.1　定理0.1的证明

如果里奇收缩子是爱因斯坦度量,则本文的定理可以从 Petersen[1] 中得出。如果里奇收缩子是非平凡的,那么根据 Futaki 等[15]的结果,直径有一致正下界。再通过不等式(3.13)和定理2.4,结合定理0.1的假设,得到

$$\sup_M\left|\mathring{R}_m\right|\leqslant C\cdot\left(\int_M\left|\mathring{R}_m\right|^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{2}{n}}。\quad(4.1)$$

式中 C 是依赖于 n, D 和 V 的常数。

下面证明存在正常数 $\delta=\delta(n,D,V)>0$,使得 $R\geqslant\delta$。否则存在一列流形 $(M_k,g_k)\in\mathcal{O}^n$ 满足 $V_{ol}(g_k)\geqslant V$ 和 $d_{iam}(M,g_k)\leqslant D$,使得 $\inf\limits_{M_k}R(g_k)\to 0$。根据推论1.3和式(4.1)可知 $R_m(g_k)$ 是一致有界的。然后根据 Cheeger-Gromov 收敛定理[16]或 Hamilton 的里奇流紧性定理[17],存在一个子序列,仍然用 (M_k,g_k) 表示,收敛到一个平滑的 Ricci 收缩子 (M_∞,g_∞),其中 $\lambda=\frac{1}{2}$,且 $\inf\limits_{M_\infty}R(g_\infty)=0$。由于 $d_{iam}(M_k,g_k)\leqslant D$, $d_{iam}(M_\infty,g_\infty)\leqslant D$,即 M_∞ 是紧致的,从而 $\min\limits_{M_\infty}R(g_\infty)=0$,这与紧致里奇收缩子的数量曲率为正的结论相矛盾。

因此,如果 ϵ 足够小,根据式(4.1),则 $\left|\mathring{R}_m\right|$ 充分小,从而曲率算子为正。然后利用 Böhm 和 Wilking 的定理[18]可知此里奇收缩子只能是球空间形式。

4.2　定理0.2的证明

与定理0.1的证明类似,有

$$\sup_M\left|R_m-\frac{g\circ g}{4(n-1)}\right|\leqslant C\cdot\left(\frac{1}{V_{ol}(g)}\int_M\left|R_m-\frac{g\circ g}{4(n-1)}\right|^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{2}{n}}。$$

式中 C 是依赖于 n 和 D 的常数。因此,如果

$$\frac{1}{V_{ol}(g)}\int_M\left|R_m-\frac{g\circ g}{4(n-1)}\right|^{n/2}\mathrm{d}v\leqslant\epsilon,$$

对于足够小的 ϵ 成立。则曲率算子为正,从而此结论可从 Böhm 和 Wilking[18]的定理中得出。

4.3　定理0.3的证明

设 $(M,g)\in\mathcal{O}^4$ 是一个给定的里奇孤立子,满足 $d_{iam}(g)\leqslant D$ 和 $\int_M\left|\mathring{R}_m\right|^2\mathrm{d}v\leqslant\epsilon$,其中 $\epsilon<1$ 是一个很小的正常数。

由于 $n=4$,所以 $R+\Delta f=2$,则有 $\int_M R\mathrm{d}v=\int_M 2\,\mathrm{d}v$。又因为 $R_{ic}(\nabla f,\cdot)=\frac{1}{2}\nabla R$,所以

$$\int_M\left|H_{ess}(f)\right|^2\mathrm{d}v=\int_M\nabla_i\nabla_j f\nabla_i\nabla_j f=-\int_M\nabla_j f\nabla_i\nabla_i\nabla_j f=-\int_M\nabla_j f\left(\nabla_j\Delta f+R_{ij}\nabla_i f\right)=\frac{1}{2}\int_M\nabla_j f\nabla_j R=-\frac{1}{2}\int_M R\,\Delta f=\frac{1}{2}\int_M\left(R^2-4\right)\mathrm{d}v。$$

因此 $\int_M\left(R^2-4\right)\mathrm{d}v\geqslant 0$。进一步可得

$$\int_M|R_{ic}|^2\mathrm{d}v=\int_M\left|\frac{1}{2}g-H_{ess}(f)\right|^2\mathrm{d}v=\int_M\left|H_{ess}(f)\right|^2\mathrm{d}v+\int_M 1\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_M\left(R^2-2\right)\mathrm{d}v。$$

由定向4维情形的高斯-博内-陈公式(参见文献[19]中的定理3.8.3),

$$32\pi^2\chi(M)=\int_M\left(|R_m|^2-4|R_{ic}|^2+\frac{R^2}{6}\right)=\int_M|R_m|^2\mathrm{d}v-\int_M\left(R^2-4\right)\mathrm{d}v\leqslant\int_M|R_m|^2\mathrm{d}v。$$

由于闭里奇收缩子的基本群是有限的[20],则 $\chi(M)=2+b_2(M)$。对于 $n=4$,有

$$\int_M|R_m|^2\mathrm{d}v\geqslant 64\pi^2。\quad(4.2)$$

另一方面,

$$\int_M |R_m|^2 \, \mathrm{d}v = \int_M \left(\left| \mathring{R}_m \right|^2 + \frac{R^2}{6} \right) \mathrm{d}v \leqslant \epsilon + C \cdot V_{\mathrm{ol}}(g),$$

C 是只依赖于 n 和 D 的正数,最后一个不等式用到推论 1.3 中的数量曲率有上界。从而可知 $V_{\mathrm{ol}}(g)$ 有一致下界。从而由定理 0.1 推出定理 0.3。

5 结束语

本文得到了在一定几何条件和无迹曲率张量的 $L^{n/2}$ 范数足够小的闭收缩梯度里奇孤立子的一些刚性结果。未来可以考虑所证明的定理的条件可以替换成其他的几何量,是否可以将定理 1 中的“直径有上界和体积有下界”替换成“Perelman 的 v-泛函有下界”;也可以考虑非紧流形上收缩梯度里奇孤立子相关的刚性问题。

©The editorial department of Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition) 2025. This is an open access article under the CC BY-NC-ND 4.0 license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

参 考 文 献

[1] PETERSEN P. Rigidity and compactness of Einstein metrics[J]. Surveys in Differential Geometry, 2001, 6(1):221-234. DOI:10.4310/SDG.2001.v6.n1.a8.

[2] CHEN B L. Strong uniqueness of the Ricci flow[J]. Journal of Differential Geometry, 2009, 82(2):363-382. DOI:10.4310/jdg/1246888488.

[3] ZHANG Z H. Gradient shrinking solitons with vanishing Weyl tensor [J]. Pacific Journal of Mathematics, 2009, 242(1): 189-200. DOI: 10.2140/pjm.2009.242.189.

[4] ZHANG S J. On a sharp volume estimate for gradient Ricci solitons with scalar curvature bounded below[J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2011, 27: 871-882. DOI:10.1007/s10114-011-9527-7.

[5] FANG F Q, MAN J W, ZHANG Z L. Complete gradient shrinking Ricci solitons have finite topological type[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2008, 346(11/12):653-656. DOI:10.1016/j.crma.2008.03.021.

[6] CAO H D, ZHOU D T. On complete gradient shrinking Ricci solitons [J]. Journal of Differential Geometry, 2010, 85(2):175-186. DOI:10.4310/jdg/1287580963.

[7] HASLHOFER R, MÜLLER R. A compactness theorem for complete Ricci shrinkers [J]. Geometric and Functional Analysis, 2011, 21:1091-1116. DOI:10.1007/s00039-011-0137-4.

[8] SCHOEN R M, YAU S T. Lectures on differential geometry[M]. Boston: International Press of Boston, 1994:231-232.

[9] ZHANG Z L. Compact blow-up limits of finite time singularities of Ricci flow are shrinking Ricci solitons [J]. Comptes Rendus Mathematique, 2007, 345(9):503-506. DOI:10.1016/j.crma.2007.09.017.

[10] CROKE C B. Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates [J]. Annales Scientifiques de I'École Normale Supérieure.1980, 13(4):419-435. DOI: 10.24033/asens.1390.

[11] ANDERSON M T. Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds[J]. Inventiones Mathematicae, 1990, 102(1): 429-445. DOI: 10.1007/BF01233434.

[12] ANDERSON M T. The L^2 structure of moduli spaces of Einstein metrics on 4-manifolds [J]. Geometric & Functional Analysis GAFA, 1992, 2(1): 29-89. DOI: 10.1007/BF01895705.

[13] ZHANG X. Compactness theorems for gradient Ricci solitons[J]. Journal of Geometry and Physics, 2006, 56(12):2481-2499. DOI:10.1016/j.geomphys.2006.01.004.

[14] HAMILTON R S. Three-manifolds with positive Ricci curvature[J]. Journal of Differential geometry, 1982, 17(2):255-306. DOI:10.4310/JDG/1214436922.

[15] FUTAKI A, LI H Z, LI X D. On the first eigenvalue of the Witten-Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons[J]. Annals of Global Analysis and Geometry, 2013, 44:105-114. DOI:10.1007/s10455-012-9358-5.

[16] ANDERSON M T. Ricci curvature bounds and Einstein metrics on compact manifolds [J]. Journal of the American Mathematical Society, 1989, 2(3): 455-490. DOI:10.1007/978-3-0348-9078-6_37.

[17] HAMILTON R S. The formation of singularities in the Ricci flow[J]. Surveys in Differential Geometry, 1995, 2:7-136. DOI:10.4310/sdg.1993.v2.n1.a2.

[18] BÖHM C, WILKING B. Manifolds with positive curvature operators are space forms [J]. Annals of Mathematics, 2008, 167: 1079-1097. DOI: 10.4007/annals.2008.167.1079.

[19] 梅加强.流形与几何初步[M].北京:科学出版社,2013.
MEI J Q. Manifold and preliminary geometry[M]. Beijing: Science Press, 2013.

[20] WEI G F, WYLIE W. Comparison geometry for the Bakry- Émery Ricci tensor[J]. Journal of differential geometry, 2009, 83(2): 337-405. DOI: 10.4310/jdg/1261495336.

(责任编辑:马田田)