DOI：10.19789/j.1004-9398.2025.06.005
文献引用：刘天宇，耿俊.有界Trellis上一致模的构造[J].首都师范大学学报（自然科学版），2025，46（6）：34-40. LIU T Y，GENG J. Construction of uninorms on bounded Trellis[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2025，46（6）：34-40.

有界Trellis上一致模的构造*

刘天宇，耿　俊**
（内蒙古师范大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特　010022）

摘要：作为一类混合型聚合算子，一致模具有重要的研究意义，特别是序结构上的一致模是目前的研究热点。本文主要研究有界Trellis上一致模的构造问题，给出了一种新的构造方法，并举例阐明与已有方法的差异。

关键词：Psoset；有界Trellis；一致模
中图分类号：O153；O159　　**文献标志码**：A

Construction of uninorms on bounded Trellis*

LIU Tianyu，GENG Jun**
（College of Mathematics Science，Inner Mongolia Normal University，
Hohhot Inner Mongolia　010022）

Abstract：As a class of mixed aggregation operators，uninorms hold significant research importance. In particular，uninorms on ordered structures are currently a research hotspot. This paper focuses on the construction of uninorms on bounded Trellis，proposing a new method for their construction. Additionally，it provides examples to illustrate the differences between this new method and existing approaches.

Keywords：Psoset；bounded Trellis；uninorm
CLC：O153；O159　　**DC**：A

0　引　言

信息聚合是将不同来源的信息聚合成一个具有代表性数值的过程，描述该过程的数学模型称为聚合算子。近些年，随着科技的发展，信息聚合变得尤为重要。一致模是一类重要的聚合算子，由Yager和Rybalov[1]于1996年引入，随后Fodor等[2]展开深入研究。作为三角模和三角余模的推广，一致模被广泛应用于统计决策、专家系统、模糊逻辑、图像处理和近似推理[3-7]等领域。随着研究的深入，Karaçal和Mesiar[8]于2015年定义了有界格上的一致模，证明了任意有界格上一致模的存在性，并提供2种构造有界格上一致模的方法；2016年，Çaylı等[9]讨论了新的一类有界格上的一致模，证明了有界格上幂等一致模的存在性，并得到了任意有界格上最大和最小的幂等一致模。此后，许多研究者致力于研究有界格上一致模的相关问题[10-16]。

传递性是偏序关系具有的属性之一，事实上，在数学和其他领域中非传递关系普遍存在而且具有重要的作用，如相邻关系、正交关系等。Psoset是一类具有自反性和反对称性，但不具备传递性的序结构。1971年，Skala[17]引入了Trellis。随后，许多

收稿日期：2024-10-27
*国家自然科学基金项目（12461093）；内蒙古自然科学基金项目（2023MS01009）；内蒙古师范大学科研专项项目（2023JBQN044）
**通信作者：gengjun@imnu.edu.cn

学者研究了Trellis的一些重要性质[18-21]。2023年,Zedam和De Baets[22]在有界Trellis上定义了三角模,开始了有界Trellis上聚合算子的研究;2024年,Kong和Zhao[23]进一步研究了有界Trellis上的一致模,并给出了一类构造方法。在此基础上,本文将继续研究有界Trellis上一致模的不同构造,并通过具体实例阐明构造方法的不同之处。

1　预备知识

定义1.1[22] 设X是一个非空集合,$\trianglelefteq$是X上的一个二元关系,若其满足自反性和反对称性,则称$\trianglelefteq$是X上的一个Pseudo序。具有Pseudo序关系的集合X称为Psoset,记作$\mathbb{P}=(X,\ \trianglelefteq)$。

定义1.2[22] 存在最小元和最大元(最小元用0表示,最大元用1表示)的Psoset(即对任意$x\in X,\ 0\trianglelefteq x\trianglelefteq 1$)被称为有界Psoset。记作$\mathbb{P}=(X,\ \trianglelefteq,0,1)$。

定义1.3[22] 设$\mathbb{P}=(X,\ \trianglelefteq)$是一个Psoset,且对任意$x,y\in X$都存在$x\wedge y$(或$x\vee y$),则称$\mathbb{P}$为$\wedge$-semi-Trellis($\vee$-semi-Trellis)。若$\mathbb{P}$既是$\wedge$-semi-Trellis又是$\vee$-semi-Trellis,则称为Trellis,记作$\mathrm{T}=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee)$。

定义1.4[22] 设$\mathbb{T}=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是有界Trellis,若$a$和$b$是不可比较的,用$a\|b$来表示,与$a$不可比较元的集合记为$I_a=\{x\in X|x\|a\}$。

定义1.5[22] 设$\mathbb{T}=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是有界Trellis,且$a,b\in X,a\trianglelefteq b$,则有如下定义:$[a,b]=\{x\in X|a\trianglelefteq x\trianglelefteq b\}$,$(a,b]=\{x\in X|a\triangleleft x\trianglelefteq b\}$,$[a,b)=\{x\in X|a\trianglelefteq x\triangleleft b\}$,$(a,b)=\{x\in X|a\triangleleft x\triangleleft b\}$。

定义1.6[22] 设$\mathbb{P}=(X,\ \trianglelefteq)$是一个Psoset,$X$中的元$a$被称为如下4类传递元。

(1)右传递元:对任意$x,\ y\in X$,若$a\trianglelefteq x\trianglelefteq y$,则$a\trianglelefteq y$。

(2)左传递元:对任意$x,\ y\in X$,若$x\trianglelefteq y\trianglelefteq a$,则$x\trianglelefteq a$。

(3)中间传递元:对任意$x,\ y\in X$,若$x\trianglelefteq a\trianglelefteq y$,则$x\trianglelefteq y$。

(4)传递元:既是左传递元、右传递元又是中间传递元。

本文记X^{rtr}、X^{ltr}、X^{mtr}、X^{tr}分别表示X中所有右传递元、左传递元、中间传递元、传递元的集合。

定义1.7[22] 设$\mathbb{T}=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是一个有界Trellis,$X$上的二元运算$F$具有以下特性。

(1)交换性:若对任意$x,\ y\in X$,有$F(x,\ y)=F(y,\ x)$。

(2)结合性:若对任意$x,\ y,\ z\in X$,有$F(x,\ F(y,\ z))=F(F(x,\ y),\ z)$。

(3)左单调性:若对任意$x_1,\ x_2,\ y\in X,x_1\trianglelefteq x_2$有$F(x_1,y)\trianglelefteq F(x_2,y)$。

(4)右单调性:若对任意$x_1,\ x_2,\ y\in X,x_1\trianglelefteq x_2$有$F(y,x_1)\trianglelefteq F(y,x_2)$。

(5)单调性:若对任意$x_1,x_2,y_1,y_2\in X$,$x_1\trianglelefteq x_2,\ y_1\trianglelefteq y_2$有$F(x_1,y_1)\trianglelefteq F(x_2,y_2)$。

定义1.8[23] 设$\mathbb{T}=(X,\ \trianglelefteq,\wedge)$是一个$\wedge$-semi-Trellis,称$X$上的一个二元运算$F:X^2\to X$为子模,若对任意$x,y\in X$,满足交换性、结合性、单调性,且$F(x,y)\trianglelefteq x\wedge y$成立。

定义1.9[23] 设$\mathbb{T}=(X,\ \trianglelefteq,\vee)$是一个$\vee$-semi-Trellis,称$X$上的一个二元运算$F:X^2\to X$为余子模,若对任意$x,y\in X$,满足交换性、结合性、单调性,且$x\vee y\trianglelefteq F(x,y)$成立。

定义1.10[23] 设$\mathbb{T}=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是一个有界Trellis,称$X$上的一个二元运算$U:X^2\to X$为一致模,若$U$满足交换性、结合性、单调性,且存在单位元$e$。

定理1.1[23] 设$\mathbb{T}=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是一个满足(CC1)的有界Trellis,$e\in(X^{mtr}\cap X^{ltr})\setminus\{0,1\}$,$T:[0,e]^2\to[0,e]$是一个三角模,$cl:X^2\to X$是一个闭包算子,$F:cl(X)^2\to cl(X)$是一个余子模,若$cl(X)\subseteq X^{ltr}$,则二元运算$U:X^2\to X$被定义为

$$U(x,y)=\begin{cases}T(x,y), & (x,y)\in[0,e]^2,\\ y, & x\in[0,e],y\notin[0,e],\\ x, & y\in[0,e],x\notin[0,e],\\ F(cl(x),cl(y)), & \text{其他},\end{cases}$$

则U是X上单位元为e的一致模。

2　主要结果

定理2.1 设$\mathbb{T}=(X,\ \trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$是有界Trellis,$e\in X^{mtr}\setminus\{0,1\}$,$I_e\subseteq X^{tr}$,若$T$为$[0,e)^2$上的子模且满足$T(x,y)\subseteq X^{rtr},\forall x,y\in[0,e)$,则二元运算$U_t:X^2\to X$为

$$U_t(x,y)=\begin{cases}T(x,y), & (x,y)\in[0,e)^2,\\ (x\vee y)\vee e, & (x,y)\in I_e\times I_e\cup[0,e)\times(e,1]\cup(e,1]\times[0,e),\\ y, & (x,y)\in[0,e)\times I_e\cup\{e\}\times X,\\ x, & (x,y)\in I_e\times[0,e)\cup X\times\{e\},\\ 1, & \text{其他},\end{cases}$$

是X上单位元为e的一致模。

证明 交换性显然成立,e是U_t的单位元,下面只需证单调性和结合性即可。

关于单调性,只需证明对任意的$x,y,z,t\in X$,当$x\trianglelefteq z,y\trianglelefteq t$时,有$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$成立。下面分情况讨论。

2.1 对于$x\in[0,e)$时的情形

(1)$y\in[0,e)$。

① $z\in[0,e)$时,若$t\in[0,e)$,则

$$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq T(z,t)=U_t(z,t)。$$

若$t=e$,则

$$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq x\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

因为$T\subseteq X^{rtr}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。若$t\in(e,1]$,则

$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq e\trianglelefteq t=(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)$。

因为$e\in X^{mtr}\setminus\{0,1\}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。若$t\in I_e$,则

$$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq y\trianglelefteq t=U_t(z,t)。$$

因为$T\subseteq X^{rtr}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。

② $z=e$时,对所有的t均有

$$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq y\trianglelefteq t=U_t(z,t)。$$

因为$T\subseteq X^{rtr}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。

③ $z\in(e,1]$时,若$t\in[0,e)$,则有

$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq x\trianglelefteq z=(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)$。

因为$T\subseteq X^{rtr}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。若$t=e$,则有

$$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq x\trianglelefteq z=U_t(z,t)$$

因为$T\subseteq X^{rtr}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。若$t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

④ $z\in I_e$时,若$t\in[0,e)$或$t=e$,则有

$$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq x\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

因为$T\subseteq X^{rtr}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。若$t\in(e,1]$,则有

$$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

若$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=T(x,y)\trianglelefteq e\trianglelefteq(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)。$$

因为$e\in X^{mtr}\setminus\{0,1\}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。

(2)$y=e$。

① $z\in[0,e)$时,若$t=e$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq e\trianglelefteq(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)。$$

因为$e\in X^{mtr}\setminus\{0,1\}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。

② $z=e$时,若$t=e$,则有

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq e=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$时,

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq e\trianglelefteq t=U_t(z,t)。$$

因为$e\in X^{mtr}\setminus\{0,1\}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。

③ $z\in(e,1]$或$z\in I_e$时,若$t=e$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

(3)$y\in(e,1]$。

① $z\in[0,e)$时,若$t\in(e,1]$,则

$U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e=y\trianglelefteq t=(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)$。

② $z=e$时,若$t\in(e,1]$,则

$$U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e=y\trianglelefteq t=U_t(z,t)$$

③ $z\in(e,1]$或$z\in I_e$时,若$t\in(e,1]$,则有

$U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e=y\trianglelefteq 1=U_t(z,t)$。

(4)$y\in I_e$。

① $z\in[0,e)$时,若$t\in(e,1]$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq t=(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)。$$

若$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq t=U_t(z,t)。$$

② $z=e$时,若$t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq t=U_t(z,t)。$$

③ $z\in(e,1]$时,若$t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

④ $z\in I_e$时,若$t\in(e,1]$,则

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

若$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq t\trianglelefteq(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)。$$

因为$I_e\subseteq X^{tr}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。

2.2 对于$x=e$时的情形

(1)$y\in[0,e)$。

① $z=e$时,对所有的t均有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq t=U_t(z,t)。$$

② $z\in(e,1]$时,若$t\in[0,e)$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq e\trianglelefteq z=(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)。$$

因为$e\in X^{mtr}\setminus\{0,1\}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。若$t=e$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq e\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

因为 $e\in X^{mtr}\backslash\{0,1\}$，所以 $U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。若 $t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

(2) $y=e$。

① $z=e$时,若$t=e$,则有

$$U_t(x,y)=e=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$,则

$$U_t(x,y)=e\trianglelefteq t=U_t(z,t)。$$

② $z\in(e,1]$时,若$t=e$,则有

$$U_t(x,y)=e\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$,则有

$$U_t(x,y)=e\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

(3) $y\in(e,1]$。

① $z=e$时,若$t\in(e,1]$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq t=U_t(z,t)。$$

② $z\in(e,1]$时,若$t\in(e,1]$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

(4) $y\in I_e$。

① $z=e$时,若$t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq t=U_t(z,t)。$$

② $z\in(e,1]$时,若$t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=y\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

2.3　对于$x\in(e,1]$时的情形

(1) $y\in[0,e)$。当 $z\in(e,1]$ 时，若 $t\in[0,e)$，则有

$$U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e=x\trianglelefteq z=(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)。$$

若$t=e$时,则有

$$U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e=x\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e=x\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

(2) $y=e$。当$z\in(e,1]$时,若$t=e$,则有

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$,则有

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

(3) $y\in(e,1]$。当 $z\in(e,1]$ 时，若 $t\in(e,1]$，则有

$$U_t(x,y)=1=U_t(z,t)。$$

(4) $y\in I_e$。当$z\in(e,1]$时,若$t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=1=U_t(z,t)。$$

2.4　对于$x\in I_e$时的情形

(1) $y\in[0,e)$。

① 当$z\in(e,1]$时,若$t\in[0,e)$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq z=(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)。$$

若$t=e$,则有

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

② 当$z\in I_e$时,若$t\in[0,e)$或$t=e$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

若$t\in I_e$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq z\trianglelefteq(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)。$$

因为$I_e\subseteq X^{tr}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。

(2) $y=e$。当$z\in(e,1]$或$z\in I_e$时,若$t=e$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq z=U_t(z,t)。$$

若$t\in(e,1]$,则

$$U_t(x,y)=x\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

(3) $y\in(e,1]$。当 $z\in(e,1]$ 或 $z\in I_e$ 时，若 $t\in(e,1]$,则

$$U_t(x,y)=1=U_t(z,t)。$$

(4) $y\in I_e$。

① 当$z\in(e,1]$时,若$t\in(e,1]$或$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

② 当$z\in I_e$时,若$t\in(e,1]$,则有

$$U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e\trianglelefteq 1=U_t(z,t)。$$

若$t\in I_e$,则有

$$U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e\trianglelefteq(z\vee t)\vee e=U_t(z,t)。$$

因为$I_e\subseteq X^{tr}$,所以$U_t(x,y)\trianglelefteq U_t(z,t)$。

下证结合性,需证明对任意的$x,y,z\in X$,有$U_t(x,U_t(y,z))=U_t(U_t(x,y),z)$成立。

2.5　根据文献[10]中定理2.23,只需考虑如下情况

(1) $x\in[0,e)$。

① $y\in[0,e)$时,若$z=e$,有

$$U_t(x,U_t(y,z))=U_t(x,y)=T(x,y)=U_t(T(x,y),z)=U_t(U_t(x,y),z)。$$

② $y=e$时,若$z\in[0,e)$,有

$$U_t(x,U_t(y,z))=U_t(x,z)=T(x,z)=$$

$$U_t(x,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z=e$,有

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,e)=x=U_t(x,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z\in(e,1]$,有

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,z)=(x\vee z)\vee e=U_t(x,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z\in I_e$,有

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

(1.3) $y\in(e,1]$时,若$z=e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e=y=U_t(y,z)=U_t\big((x\vee y)\vee e,z\big)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

(2) $x=e$。

① $y\in[0,e)$时,若$z\in[0,e)$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t\big(x,T(y,z)\big)=T(y,z)=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z=e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,y)=y=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z\in(e,1]$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t\big(x,(y\vee z)\vee e\big)=(y\vee z)\vee e=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z\in I_e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,z)=z=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

② $y=e$时,若$z\in[0,e)$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,z)=z=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z=e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,e)=x=e=U_t(e,e)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z\in(e,1]$或$z\in I_e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,z)=z=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

③ $y\in(e,1]$时,若$z\in[0,e)$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t\big(x,(y\vee z)\vee e\big)=U_t(x,y)=y=(y\vee z)\vee e=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z=e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,y)=y=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z\in(e,1]$或$z\in I_e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,1)=1=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

④ $y\in I_e$时,若$z\in[0,e)$或$z=e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,y)=y=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z\in(e,1]$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,1)=1=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z\in I_e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t\big(x,(y\vee z)\vee e\big)=(y\vee z)\vee e=U_t(y,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

(3) $x\in(e,1]$。

① $y\in[0,e)$时,若$z=e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,y)=(x\vee y)\vee e=x=U_t(x,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

② $y=e$时,若$z\in[0,e)$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,z)=(x\vee z)\vee e=U_t(x,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

若$z\in[e,1]$或$z\in I_e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

③ $y\in(e,1]$时,若$z=e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,y)=1=U_t(1,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

(4) $x\in I_e$。

① $y\in[0,e)$时,若$z=e$,则

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,y)=x=U_t(x,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

② $y=e$时,对所有的z,有

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

③ $y\in(e,1]$时,若$z=e$,则有

$$U_t\big(x,U_t(y,z)\big)=U_t(x,y)=1=U_t(1,z)=U_t\big(U_t(x,y),z\big)。$$

综上所述,$U_t(x,y)$是一致模。

注 2.1　在定理 2.1 中,一致模 $U_t: X^2 \to X$ 也可以定义为

$$U_t(x,y)=\begin{cases} T(x,y), & (x,y)\in[0,e)^2,\\ (x\vee y)\vee e, & (x,y)\in I_e\times I_e,\\ y, & (x,y)\in[0,e)\times I_e\cup\{e\}\times X\cup(e,1]\times[0,e),\\ x, & (x,y)\in I_e\times[0,e)\cup X\times\{e\}\cup[0,e)\times(e,1],\\ 1, & \text{其他。}\end{cases}$$

定理 2.2　设 $\mathbb{T}=(X,\trianglelefteq,\wedge,\vee,0,1)$ 是有界 Trellis,$e\in X^{mtr}\setminus\{0,1\}$,$I_e\subseteq X^{tr}$,若 S 为 $(e,1]^2$ 上的余子模且满足 $S(x,y)\subseteq X^{ltr}$,$\forall x,y\in(e,1]$,则二元运算 $U_s: X^2\to X$,

$$U_s(x,y)=\begin{cases} S(x,y), & (x,y)\in(e,1]^2,\\ (x\wedge y)\wedge e, & (x,y)\in I_e\times I_e\cup[0,e)\times(e,1]\cup(e,1]\times[0,e),\\ y, & (x,y)\in(e,1]\times I_e\cup\{e\}\times X,\\ x, & (x,y)\in I_e\times(e,1]\cup X\times\{e\},\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

是 X 上单位元为 e 的一致模。

证明　由定理 2.1 易证。

注 2.2　在定理 2.2 中,一致模 $U_s: X^2\to X$ 也可以定义为

$$U_s(x,y)=\begin{cases} S(x,y), & (x,y)\in(e,1]^2,\\ (x\wedge y)\wedge e, & (x,y)\in I_e\times I_e,\\ y, & (x,y)\in(e,1]\times I_e\cup\{e\}\times X\cup(e,1]\times[0,e),\\ x, & (x,y)\in I_e\times(e,1]\cup X\times\{e\}\cup[0,e)\times(e,1],\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

例 2.1　考虑图 1 所示的有界 Trellis X,$e\in X^{mtr}\setminus\{0,1\}$,表 1 中定义了 $[0,e)$ 上的子模 $T(x,y)$,由定理 2.1 可得一类新的一致模 $U_t(x,y)$,见表 2。

注 2.3　定理 2.1 中定义的一致模 $U_t(x,y)$ 与定理 1.1 中定义的一致模 $U(x,y)$ 不同,如下例所示。

例 2.2　考虑图 2 中的有界 Trellis X,定义闭包算子 cl 如下:

$$cl(i)=i, i\in\{0,e,f,d,g,c,a,h,1\};$$
$$cl(l)=d, cl(b)=a。$$

由定理 2.1 和 1.1,在表 3 和 4 分别定义一致模 U_t 和一致模 U,显然不同。

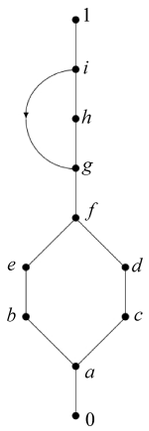


图 1　一类有界 Trellis X

表 1　$[0,e)$ 上的子模 $T(x,y)$

T	0	a	b
0	0	0	0
a	0	0	0
b	0	0	b

表 2　有界 Trellis X 上的一致模 $U_t(x,y)$

U_t	0	a	b	e	c	d	f	g	h	i	1
0	0	0	0	0	c	d	f	g	h	i	1
a	0	0	0	a	c	d	f	g	h	i	1
b	0	0	b	b	c	d	f	g	h	i	1
e	0	a	b	e	c	d	f	g	h	i	1
c	c	c	c	c	f	f	1	1	1	1	1
d	d	d	d	d	f	f	1	1	1	1	1
f	f	f	f	f	1	1	1	1	1	1	1
g	g	g	g	g	1	1	1	1	1	1	1
h	h	h	h	h	1	1	1	1	1	1	1
i	i	i	i	i	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

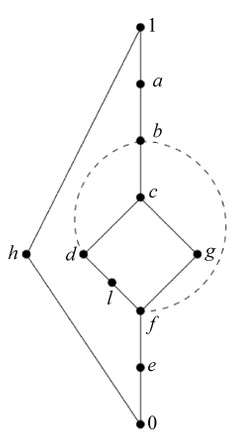


图 2　另一类有界 Trellis X

表3 有界Trellis X上的一致模 $U_t(x,y)$

U_t	0	e	f	l	d	g	c	b	a	h	1
0	0	0	f	l	d	g	c	b	a	h	1
e	0	e	f	l	d	g	c	b	a	h	1
f	f	f	1	1	1	1	1	1	1	1	1
l	l	l	1	1	1	1	1	1	1	1	1
d	d	d	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g	g	g	1	1	1	1	1	1	1	1	1
c	c	c	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	b	b	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	a	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
h	h	h	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

表4 有界Trellis X上一致模 $U(x,y)$

U	0	e	f	l	d	g	c	b	a	h	1
0	0	0	f	l	d	g	c	b	a	h	1
e	0	e	f	l	d	g	c	b	a	h	1
f	f	f	f	l	d	g	c	a	a	1	1
l	l	l	l	d	d	c	c	a	a	1	1
d	d	d	d	d	d	c	c	a	a	1	1
g	g	g	g	c	c	g	c	a	a	1	1
c	c	c	c	c	c	c	c	a	a	1	1
b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	1	1
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	1	1
h	h	h	1	1	1	1	1	1	1	h	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3 结束语

一致模不论在理论还是应用方面,均具有重要的研究意义。本文构造了有界Trellis上的一类一致模,研究结果表明有界Trellis上存在新的不同的一致模,进一步丰富和发展了有界Trellis上的一致模理论。

参 考 文 献

[1] YAGER R R, RYBALOV A. Uninorms aggregation operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 80(1): 111-120.

[2] FODOR J, YAGER R R, RYBALOV A. Structure of uninorms [J]. International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 1997, 5(4): 411-427.

[3] BACZYŃSKI M, JAYARAM B. Fuzzy implications [M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.

[4] DUBOIS D, PRADE H. A review of fuzzy set aggregation connectives[J]. Information Sciences, 1985, 36(1/2): 85-121.

[5] DUBOIS D, PRADE H. Fundamentals of fuzzy sets [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[6] BAETS B D, FODOR J. Melle's combining function in MYCIN is a representable uninorm: an alternative proof [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 104(1): 133-136.

[7] YAGER R R. Defending against strategic manipulation in uninorm-based multi-agent decision making [J]. European Journal of Operational Research, 2002, 141(1): 217-232.

[8] KARAÇAL F, MESIAR R. Uninorms on bounded lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 261: 33-43.

[9] ÇAYLI G D, KARAÇAL F, MESIAR R. On a new class of uninorms on bounded lattices [J]. Information Sciences, 2016, 367/368: 221-231.

[10] ÇAYLI G D. A characterization of uninorms on bounded lattices by means of triangular norms and triangular conorms[J]. International Journal of General Systems, 2018, 47(8): 772-793.

[11] ÇAYLI G D, KARAÇAL F. Construction of uninorms on bounded lattices [J]. Kybernetika, 2017, 53(3): 394-417.

[12] ÇAYLI G D. On a new class of t-norms and t-conorms on bounded lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 332: 129-143.

[13] DAN Y, HU B Q, QIAO J. New construction of t-norms and t-conorms on bounded lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 395: 40-70.

[14] PENG H, WANG X P. Constructing uninorms on bounded lattices by using additive generators [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2021, 136: 1-13.

[15] SUN X R, LIU H W. Further characterization of uninorms on bounded lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2022, 427: 96-108.

[16] ZHANG H P, WU M, WANG Z, et al. A characterization of the classes Umin and Umax of uninorms on a bounded lattice[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 423: 107-121.

[17] SKALA H. Trellis theory[J]. Algebra Universalis, 1971(1): 218-233.

[18] GLADSTIEN K. A characterization of complete trellises of finite length[J]. Algebra Universalis, 1973, 3: 341-344.

[19] FRIED E, GRÄTZER G. Some examples of weakly associative lattices [J]. In Colloquium Mathematics, 1973, 27(2): 215-221.

[20] FRIED E. Tournaments and non-associative lattices[J]. Annual University Science Budapest, 1970, 13: 151-164.

[21] RAI S B, RAO P. Modular, weakly distributive and Normal trellises [J]. Journal of Physics (Conference Series), 2021, 1850(1): 012090.

[22] ZEDAM L, DE BAETS B. Triangular norms on bounded trellises [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 462: 108468.

[23] KONG Y, ZHAO B. Uninorms on bounded trellises[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2024, 481: 108898.

(责任编辑:马田田)