DOI：10.19789/j.1004-9398.2025.06.008
文献引用：郭航，赵家昂，郭健宏.拓扑超导体耦合单量子点结构的累积量性质[J].首都师范大学学报（自然科学版），2025，46（6）：54-61. GUO H，ZHAO J A，GUO J H. Cumulant properties of topological superconductor coupled single quantum dot structures [J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2025，46（6）：54-61.

拓扑超导体耦合单量子点结构的累积量性质

郭　航，赵家昂，郭健宏*

（首都师范大学物理系，北京　100048）

摘要：利用粒子数表象下的量子主方程，通过计算Liouville超算符的特征多项式，研究了单量子点与拓扑超导纳米线耦合结构中全计数统计的各阶累积量性质。结果表明：各阶累积量随电压的变化呈台阶状分布，当电压为系统不同宇称间能级差的2倍时，各阶累积量增加；各个子信道的一阶累积量求和等于全部通道的电流，但能级间的干涉导致高阶累积量的子信道和全部通道间不遵循简单加和关系；量子点和纳米线远端弱耦合时，Majorana零模更易出现，且Majorana零模可以通过低能级参与输运；库仑相互作用通过影响能级简并状态，改变累积量随电压变化的台阶数目。

关键词：Majorana零模；累积量；全计数统计；量子点；拓扑超导体
中图分类号：O469　　**文献标志码**：A

Cumulant properties of topological superconductor coupled single quantum dot structures

GUO Hang，ZHAO Jiaang，GUO Jianhong*

（Department of Physics，Capital Normal University，Beijing　100048）

Abstract：This paper utilizes the quantum master equation in particle number representation and calculates the characteristic polynomial of the Liouville superoperator to study the properties of various order cumulants of full counting statistics in a single quantum dot coupled with a topological superconducting nanowire structure. The results show that the cumulants exhibit a step-like distribution with voltage，the cumulative amount of each order increases when the voltage is twice the energy difference between different parity levels of the system；the sum of the first-order cumulants of each sub-channel equals the total current of all channels，but the interference between energy levels leads to non-trivial addition rules for higher-order cumulants between sub-channels and the total channel. When quantum dots and nanowires are weakly coupled at the remote end，Majorana zero modes are more likely to appear，and Majorana zero modes can participate in transport through lower energy levels；The Coulomb interaction alters the degeneracy state of energy levels，thereby changing the number of steps in the voltage-dependent cumulants.

Keywords：Majorana zero mode；cumulative quantity；total count statistics；quantum dots；topological superconductor
CLC：O469　　**DC**：A

收稿日期：2024-10-24

*通信作者：gjhaso@163.com

0　引　言

量子计算机通过量子比特同时处理大量计算数据,能有效提高计算速度[1-2]。但是退相干影响了量子计算的稳定性[3-4]。容错量子计算将多个物理比特编码为一个逻辑量子比特,能保证量子计算的准确性,但实现这一目标仍面临技术挑战。因此,容错量子计算是当前研究的重要方向。Majorana费米子的反粒子是其自身,满足自厄米性$\gamma_i=\gamma_i^\dagger$,$\{\gamma_i,\gamma_j\}=2\delta_{ij}$,称为Majorana零模,下文统称为M零模[3]。M零模总是成对出现,可表示为通常Dirac费米子的等概率叠加[5]。M零模具有电中性、零能量的特点,遵循非阿贝尔统计[3],受到拓扑保护,可以实现拓扑量子计算中的量子门操作,有望成为实现容错量子计算的构建模块[1]。

近年来,研究人员在低温固态物理实验中找到了M零模可能存在的证据,在超导-半导体异质结[6]、二维p波超导体的涡旋态[7]、Kitaev无自旋p波超导体[8]、铁基超导体的涡旋态[9]中都探测到零能量模式。目前,一维纳米线是实验上常用的探究M零模的模型[10-17]。因为一维半导体纳米线,如砷化铟(InAs)或锑化铟(InSb)这些材料具有强自旋轨道耦合,通过邻近效应容易获得超导性,具有较强的可控性。

实验中,研究人员发展了许多探测M零模的方法,如零偏压电导峰[10-17](zero bias peak,ZBP)、反常4π周期约瑟夫森效应[18]、自旋流关联函数[19]等。其中最常用的方法就是ZBP,虽然ZBP被认为是M零模的特征之一,但ZBP的起因并不是只能由M零模造成,如Andreev反射[20-21]、无序[22]、Kondo效应[23]、拓扑绝缘体的边缘态[24]等都可能引起ZBP。因此,必须通过进一步的实验验证来确认M零模的存在及其性质。

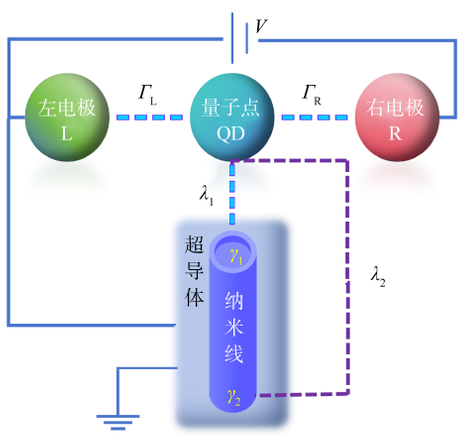
本文利用粒子数分辨的条件量子主方程,研究单量子点和拓扑超导纳米线耦合结构中电流的各阶累积量性质,采用特征多项式的方法,并推广至有限温度和有限电压,揭示了远端M零模和库仑相互作用对全计数统计累积量的影响。

1　模　型

量子点与形成M零模的拓扑超导纳米线耦合,如图1所示。量子点通过隧道结与左、右金属电极耦合,在偏压V的作用下构成测量回路。量子点和纳米线构成约化的研究系统,将左、右2个金属电极视作环境。Γ_α是量子点和电极间的电子隧穿率,计算式为

$$\Gamma_\alpha=2\pi g_\alpha|t_\alpha|^2(\alpha=\mathrm{L},\mathrm{R})^{[25]},$$

式中:t_α是量子点和α电极间的隧穿耦合强度,g_α是α电极的态密度,λ_1是量子点与近邻M零模γ_1的耦合强度,λ_2是量子点与远端M零模γ_2的耦合强度。



注:L和R分别表示左和右,QD表示量子点;$\gamma_i(i=1,2)$是纳米线两端的M零模;$\Gamma_\alpha(\alpha=\mathrm{L},\mathrm{R})$是量子点和$\alpha$电极间的电子隧穿率;$\lambda_i(i=1,2)$是量子点和纳米线两端M零模的耦合强度;$V$是施加的偏压。

图1　量子点与拓扑纳米线耦合模型

总的哈密顿量可写为

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{T}=\boldsymbol{H}_\mathrm{bath}+\boldsymbol{H}_\mathrm{tun}+\boldsymbol{H}_\mathrm{sys},$$

式中:$\boldsymbol{H}_\mathrm{bath}=\sum_{\alpha=\mathrm{L},\mathrm{R}}\sum_k\varepsilon_{\alpha k}c_{\alpha k}^\dagger c_{\alpha k}$表示无相互作用的电子构成的左、右金属电极,$\varepsilon_{\alpha k}$为$\alpha$电极中电子的能量,$k$为电子的波矢,$c_{\alpha k}^\dagger(c_{\alpha k})$为$\alpha$电极的电子产生(湮灭)算符;$\boldsymbol{H}_\mathrm{tun}=\sum_{\alpha=\mathrm{L},\mathrm{R}}\sum_k t_{\alpha k}dc_{\alpha k}^\dagger+\mathrm{H.c.}$表示量子点与电极间的隧穿相互作用,$d^\dagger(d)$为量子点的电子产生(湮灭)算符。$\boldsymbol{H}_\mathrm{sys}=\varepsilon_\mathrm{d}d^\dagger d+\mathrm{i}(\varepsilon_\mathrm{m}\gamma_1\gamma_2)/2+\lambda_1(d-d^\dagger)\gamma_1+\mathrm{i}\lambda_2(d+d^\dagger)\gamma_2+\boldsymbol{H}_U$表示系统的哈密顿量[26]:第1项表示量子点的能量,ε_d为量子点的能级,可通过门电压调控;第2项表示纳米线首尾两端非局域M零模的耦合,$\varepsilon_\mathrm{m}=e^{-l/\xi_\mathrm{SC}}$[27]为2个M零模间的分裂能,描述2个M零模波函数间的重叠程度,l为纳米线长度,ξ_SC为超导相干长度;第3、4项分别为量子点与近端M零模γ_1和远端M零模γ_2耦合;最后1项$\boldsymbol{H}_U=Un_\mathrm{d}n_\mathrm{f}$描述量子点和纳米线的电子间库仑排斥作用,$n_\mathrm{d}=d^\dagger d$与$n_\mathrm{f}=f^\dagger f$分别是量子点和纳米线的电子占据数算符。库仑相互作用$U=\int\mathrm{d}\vec{x}_\mathrm{d}\vec{x}_\mathrm{f}\left|\phi_\mathrm{d}(\vec{x}_\mathrm{d})\right|^2e_0^2\phi_\mathrm{d}(\vec{x}_\mathrm{f})\left|^2\right/\left|\vec{x}_\mathrm{d}-\vec{x}_\mathrm{f}\right|$[26],$\vec{x}_\mathrm{d}$和$\vec{x}_\mathrm{f}$分别

是量子点和纳米线电子的位置,$|\phi_{\mathrm{d}}(\vec{x}_{\mathrm{d}})|$和$|\phi_{\mathrm{f}}(\vec{x}_{\mathrm{f}})|$分别是量子点和纳米线电子归一化的波函数,$e_0^2 = e^2/4\pi\varepsilon_0$,$e$是$\boldsymbol{H}_U = Un_{\mathrm{d}}n_{\mathrm{f}} = 1/2\left[Un_{\mathrm{d}}(1 + \mathrm{i}\gamma_1\gamma_2)\right]$量子点的电子电荷,$\varepsilon_0$是纳米线的介电常数。引入非局域Dirac费米子$f$,$f = (\gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2)/2$[28],满足$\{f, f^{+}\} = 1$,则最后1项可写为[26]。不难发现,$\boldsymbol{H}_U$与纳米线两端非局域M零模的耦合项$\mathrm{i}(\varepsilon_{\mathrm{m}}\gamma_1\gamma_2)/2$相似,这表明库仑相互作用导致了描述M零模的波函数发生额外重叠,其幅度取决于量子点的占据情况Un_{d}。

借助M零模的性质$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$、$\gamma_1 = f^{\dagger} + f$和$\gamma_2 = f^{\dagger} - f$,$\boldsymbol{H}_{\mathrm{sys}}$可改写为$\boldsymbol{H}_{\mathrm{sys}} = \varepsilon_{\mathrm{D}}d^{\dagger}d + \varepsilon_{\mathrm{m}}(f^{\dagger}f - 1/2) + t(df^{\dagger} + fd^{\dagger}) + \Delta(df + f^{\dagger}d^{\dagger}) + Un_{\mathrm{d}}n_{\mathrm{f}}$,其中$t = \lambda_1 - \lambda_2$表示纳米线和量子点间通常的电子隧穿耦合,$\Delta = \lambda_1 + \lambda_2$表示Andreev反射导致的Cooper对的形成与分裂[29]。

2　理论方法

2.1　能量本征表象

本文研究有限温度和有限电压下的电子隧穿问题,最方便的表象是能量本征表象。取量子点和纳米线的直积表象$|n_{\mathrm{d}}n_{\mathrm{f}}\rangle$,其中$n_{\mathrm{d}}$、$n_{\mathrm{f}}$取1或0,分别表示各点位有无电子占据。因为系统包含超导体,所以系统总的粒子数不守恒,但系统总的费米子占据数宇称守恒,可分为偶宇称子空间$\{|00\rangle, |11\rangle\}$和奇宇称子空间$\{|01\rangle, |10\rangle\}$。

将H_{sys}在局域表象$\{|00\rangle, |11\rangle \equiv f^{\dagger}d^{\dagger}|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle\}$中对角化,得到系统奇(o)偶(e)宇称的本征态

$$|e\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \mp \frac{U + 2\varepsilon_{+}}{2\Omega_{\mathrm{e}}}}|00\rangle \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \pm \frac{U + 2\varepsilon_{-}}{2\Omega_{\mathrm{e}}}}|11\rangle] = \alpha_{\mp}|00\rangle - \alpha_{\pm}|11\rangle, \tag{1a}$$

$$|o\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \pm \frac{2\varepsilon_{-}}{2\Omega_{\mathrm{o}}}}|10\rangle \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \mp \frac{2\varepsilon_{-}}{2\Omega_{\mathrm{o}}}}|01\rangle] = \beta_{\pm}|10\rangle - \beta_{\mp}|01\rangle。 \tag{1b}$$

本征能量$E_{\mathrm{e}}^{\pm} = 1/2\,[(U + \varepsilon_{+} + \varepsilon_{-}) \pm \Omega_{\mathrm{e}}]$,$E_{\mathrm{o}}^{\pm} = 1/2\,[(\varepsilon_{+} + \varepsilon_{-}) \pm \Omega_{\mathrm{o}}]$,其中$\varepsilon_{\pm} = 1/2\,[(\varepsilon_{\mathrm{d}} \pm \varepsilon_{\mathrm{m}})]$,$\Omega_{\mathrm{o}} = 1/2\,[\sqrt{4t^2 + (2\varepsilon_{-})^2}\,]$和$\Omega_{\mathrm{e}} = 1/2\,[\sqrt{4\Delta^2 + (U + 2\varepsilon_{+})^2}\,]$分别描述奇偶宇称能级间的拉比分裂。根据4个本征能量,得到输运系统的8个子信道能级:$E_{i\pm j\pm} = E_i^{\pm} - E_j^{\pm}$,其中$i$、$j$分别表示不同宇称。

库仑相互作用和远端M零模对系统能谱的影响如图2所示。显而易见,无库仑相互作用时(图2(a)和(c)),能级均简并且相对于粒子-空穴对称点$\varepsilon_U = -U/2$处对称。不考虑远端M零模时(图2(a)),低能级$E_{\mathrm{e-o-}}$和$E_{\mathrm{o-e-}}$在$\varepsilon_U = 0$处相交,出现量子相变。随着量子点和远端M零模耦合强度的增加(图2(c)),低能级间相互排斥并向高能级移动。库仑相互作用不为0时((图2(b)和(d)),能级简并均有一定程度的消除且相对于粒子-空穴对称点$\varepsilon_U = -U/2$处对称。不考虑远端M零模时(图2(b)),能级间的重叠程度显著增强。随着耦合强度增加,能级间的重叠程度又会减弱(图2(d)),并且远端M零模与量子点的耦合依然会导致某些激发能级的简并,这是因为能级$E_{i\pm j\pm}$与参数U和λ_2都有关。

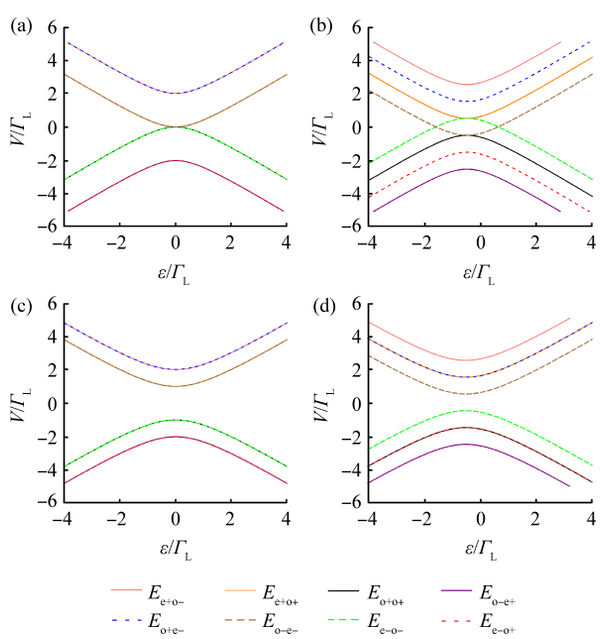


图2　系统本征能谱随$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{d}} = \varepsilon_{\mathrm{m}}$的变化

(a)$U = 0, \lambda_2 = 0$;(b)$U = 1, \lambda_2 = 0$;(c)$U = 0, \lambda_2 = 0.5$;(d)$U = 1, \lambda_2 = 0.5$

2.2　主方程

本文利用粒子数分辨的量子主方程研究介观系统中电荷输运的全计数统计。将量子点和超导拓扑纳米线看作约化系统,左、右金属电极视作环境。设系统和环境弱耦合,利用二阶累积展开,只考虑右电极收集电子,在Born-Markov近似下,粒子数分辨的条件性密度矩阵演化方程可写为[30]

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^{(n_{\mathrm{R}})}(t) = \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{\rho}^{(n_{\mathrm{R}})}(t) - \frac{1}{2}\{[d^{\dagger}A^{(-)}\boldsymbol{\rho}^{(n_{\mathrm{R}})} + \boldsymbol{\rho}^{(n_{\mathrm{R}})}A^{(+)}d^{\dagger} - A_{\mathrm{L}}^{(-)}\boldsymbol{\rho}^{(n_{\mathrm{R}})}d^{\dagger} - d^{\dagger}\boldsymbol{\rho}^{(n_{\mathrm{R}})}A_{\mathrm{L}}^{(+)} - A_{\mathrm{R}}^{(-)}\boldsymbol{\rho}^{(n_{\mathrm{R}}-1)}d^{\dagger} -$$

$$d^{\dagger}\boldsymbol{\rho}^{(n_{\mathrm{R}}+1)}A_{\mathrm{R}}^{(+)}]+\mathrm{H.c.}\},\tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{O}\equiv-\mathrm{i}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{sys}},\boldsymbol{O}]$,$\boldsymbol{O}$代表任意算符;$n_{\mathrm{R}}$表示右电极收集到的电子数;$A^{(\pm)}=\sum_{\alpha=\mathrm{L,R}}A_{\alpha}^{(\pm)}$,$A_{\alpha}^{(\pm)}=\Gamma_{\alpha}f_{\alpha}^{\pm}(-\boldsymbol{M}_0)d$,$f_{\alpha}^{+}(-\boldsymbol{M}_0)$是$\alpha$电极电子的费米分布,影响电子从$\alpha$电极隧穿到量子点的概率,$f_{\alpha}^{-}(-\boldsymbol{M}_0)=1-f_{\alpha}^{+}(-\boldsymbol{M}_0)$是$\alpha$电极空穴的费米分布,影响电子从量子点隧穿到$\alpha$电极的概率。

进一步,引入计数场(ξ)标记右电极收集的电子,则式(2)可变为

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_{\xi}(t)=\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{\rho}_{\xi}(t)-\frac{1}{2}\{[d^{\dagger}A^{(-)}\boldsymbol{\rho}_{\xi}(t)+\boldsymbol{\rho}_{\xi}(t)A^{(+)}d^{\dagger}-A_{\mathrm{L}}^{(-)}\boldsymbol{\rho}_{\xi}(t)d^{\dagger}-d^{\dagger}\boldsymbol{\rho}_{\xi}(t)A_{\mathrm{L}}^{(+)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}A_{\mathrm{R}}^{(-)}\boldsymbol{\rho}_{\xi}(t)d^{\dagger}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}d^{\dagger}\boldsymbol{\rho}_{\xi}(t)A_{\mathrm{R}}^{(+)}]+\mathrm{H.c.}\}。\tag{3}$$

式(2)对粒子数(n_{R})求和可以得到Bloch-Redfield方程的形式。采用本征近似(Secular近似),忽略能量本征表象下约化密度矩阵的非对角元,得到奇偶宇称能级上粒子布居数的方程$\dot{\boldsymbol{P}}_i=\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}_i$,$i$是宇称能级,可得系数矩阵即Liouville超算符表达式$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}+\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}\xi}$,其中

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{L}}=\begin{pmatrix}-(\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}) & 0 & (\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}) & (\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}-}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+})\\ 0 & -(\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}) & (\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{e}-\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}-}) & (\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{e}-\mathrm{o}-}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}-})\\ (\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}) & (\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}-\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}-}) & -(\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}) & 0\\ (\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}-}+\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}) & (\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}-\mathrm{o}-}+\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}-}) & 0 & -(\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{L}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{L}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+})\end{pmatrix},\tag{4a}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}\xi}=\begin{pmatrix}-(\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}) & 0 & (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_1}\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_2}\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}) & (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_3}\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}-}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_4}\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+})\\ 0 & -(\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}) & (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_5}\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{e}-\mathrm{o}+}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_6}\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}-}) & (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_7}\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{e}-\mathrm{o}-}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_8}\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}-})\\ (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_1}\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_2}\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}) & (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_5}\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}-\mathrm{o}+}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_6}\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}-}) & -(\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}) & 0\\ (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_3}\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}-}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_4}\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}) & (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_7}\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}-\mathrm{o}-}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_8}\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}-}) & 0 & -(\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}+\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+}+\Gamma_{\mathrm{R}+}^{\mathrm{o}-\mathrm{e}+}+\Gamma_{\mathrm{R}-}^{\mathrm{e}+\mathrm{o}+})\end{pmatrix},\tag{4b}$$

式中:$\Gamma_{\alpha+}^{\mathrm{o}\pm\mathrm{e}\pm}=\Gamma_{\alpha}\alpha_{\pm}^2\beta_{\mp}^2f_{\alpha}^{(+)}(\omega_{\mathrm{o}\pm\mathrm{e}\pm})$和$\Gamma_{\alpha+}^{\mathrm{e}\pm\mathrm{o}\pm}=\Gamma_{\alpha}\alpha_{\mp}^2\beta_{\pm}^2f_{\alpha}^{(+)}(\omega_{\mathrm{e}\pm\mathrm{o}\pm})$表示电子的有效隧穿率,$\omega_{ij}=E_i-E_j$,$f_{\alpha}^{(+)}(\omega_{ij})=1/[\mathrm{e}^{\beta(\omega_{ij}-\mu_{\alpha})}+1]$,$\beta=1/k_{\mathrm{B}}T$[31];$\Gamma_{\alpha-}^{\mathrm{e}\pm\mathrm{o}\pm}=\Gamma_{\alpha}\alpha_{\pm}^2\beta_{\mp}^2f_{\alpha}^{(-)}(\omega_{\mathrm{e}\pm\mathrm{o}\pm})$和$\Gamma_{\alpha-}^{\mathrm{o}\pm\mathrm{e}\pm}=\Gamma_{\alpha}\alpha_{\mp}^2\beta_{\pm}^2f_{\alpha}^{(-)}(\omega_{\mathrm{o}\pm\mathrm{e}\pm})$表示空穴的有效隧穿率,$f_{\alpha}^{(-)}(\omega_{ij})=1-f_{\alpha}^{(+)}(\omega_{ij})$。值得注意的是,考虑到不同子信道对输运累积量的贡献可能不同,用计数场$\xi_i(i=1,2,3,\cdots,8)$标记不同子信道的贡献。当$\xi_i(i=1,2,3,\cdots,8)=\xi$时不区分信道,探测的是全部信道对累积量的影响。

为了计算输运电子的全计数统计,常用的方法是计算超算符的最小本征值。然而,随着超算符的矩阵维度增加,最小本征值难以求得。相较而言,通过计算系数矩阵的特征多项式获取各阶累积量的方法展现出独特优势。但此方法先前仅应用于大电压极限的情形[32],本文将其推广至有限温度和有限电压的一般情形。

从条件性密度矩阵的演化方程出发,$\dot{\boldsymbol{\rho}}_n(t)=\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{\rho}_n(t)+\boldsymbol{M}^{(+)}\boldsymbol{\rho}_{n-1}(t)+\boldsymbol{M}^{(-)}\boldsymbol{\rho}_{n+1}(t)$,引入$\xi$,对$\boldsymbol{\rho}_n(t)$进行Laplace变换,得到变换后的超算符$\boldsymbol{M}_{\xi}=\boldsymbol{M}_0+\mathrm{e}^{\xi}\boldsymbol{M}^{(+)}+\mathrm{e}^{-\xi}\boldsymbol{M}^{(-)}$。其中$\boldsymbol{M}_0$对应无跳跃项的相干演化,$\boldsymbol{M}^{(+)}$表示电子从系统隧穿到右电极的跳跃项,$\boldsymbol{M}^{(-)}$表示从右电极隧穿回系统的跳跃项。考虑变换后超算符$\boldsymbol{M}_{\xi}$的特征多项式

$$P_{\xi}(x)=\det\left[x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}_{\xi}\right]=x^q+a_{q-1}x^{q-1}+\sum_{\mu=0}^{q-2}a_{\mu}(\xi)\,x^{\mu},\tag{5}$$

式中包含了全计数统计的全部信息,其中$\boldsymbol{I}$是单位矩阵,q是系数矩阵的维度,对于本文研究模型,$q=4$。对$a_{\mu}(\xi)$在$\xi=0$附近做泰勒展开,则式(5)变为

$$P_{\xi}(x)=x^q+a_{q-1}x^{q-1}+\sum_{\mu=0}^{q-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{\mu}^{(k)}(\xi)}{k!}\xi^k\,x^{\mu},\tag{6}$$

式中:$a_q=1$,$a_{q-1}=-\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{M}_{\xi}\right]$,$a_0=(-1)^q\det\left[\boldsymbol{M}_{\xi}\right]$;

$a_\mu^{(k)}(\xi)=\partial_\xi^k a_\mu(\xi)\Big|_{\xi=0}$；$k=0$时$a_\mu=a_\mu(\xi)\Big|_{\xi=0}$。值得注意的是，本文考虑有限温度和有限电压的一般情况，$a_\mu(\xi)$的高阶导数并不等于一阶导数。仅在大电压极限下，高阶导数才与一阶导数相等[32]。设$\boldsymbol{M}_\xi$的本征值为$\lambda(\xi)$，$\lambda(\xi)$决定了电流各阶累积矩，$\lambda(\xi)=\sum_{v=1}^{\infty}C_v\xi^v/v!$[32]。令$P_\xi[\lambda(\xi)]=0$，挑出$\xi^v$前的系数组合后令其等于0，特征多项式中变量阶数对应系数就是相应阶数下的电流累积量，由此可以得到一阶累积量平均电流(c_1)、二阶累积量方差(c_2)、三阶累积量偏斜度(c_3)和四阶累积量峰度(c_4)分别表示为：

$$c_1=-\frac{a_0^{(1)}}{a_1},\tag{7a}$$

$$c_2=-\frac{1}{a_1}\left(a_0^{(2)}+2a_1^{(1)}c_1+2a_2c_1^2\right),\tag{7b}$$

$$c_3=-\frac{1}{a_1}\left(a_0^{(3)}+3a_1^{(2)}c_1+6a_2^{(1)}c_1^2+6a_3c_1^3+6a_1^{(1)}c_2+6a_2c_1c_2\right),\tag{7c}$$

$$c_4=-\frac{1}{a_1}\begin{pmatrix}a_0^{(4)}+4a_1^{(3)}c_1+12a_2^{(2)}c_1^2+24a_3^{(1)}c_1^3+\\24a_4c_1^4+6a_1^{(2)}c_2+24a_2^{(1)}c_1c_2+\\36a_3c_1^2c_2+6a_2c_2^2+4a_1^{(1)}c_3+8a_2c_1c_3\end{pmatrix}。\tag{7d}$$

通过研究系统系数矩阵的特征多项式，只需挑出以上所列的系数，即可得到所需的各阶累积量。此法大大简化了计算量，且适用于有限电压和有限温度的一般情况。

3　结果与分析

为获取系统各阶累积量性质，求解Liouville超算符(式(4))的特征多项式，结合式(7)的结论，可推导出一阶至四阶累积量的具体结果，并考虑不同参数影响下，累积量随电压的变化关系。一方面，研究没有库仑作用($U=0$)和远端M零模($\lambda_2=0$)的情况下，全部通道和子信道的全计数统计，得到系统全部通道和子信道间的关系。另一方面，作为比较分别讨论远端M零模对全计数统计的影响($\lambda_2=0$和$\lambda_2=0.5$)，以及库仑相互作用对各阶累积量的影响($U=0$和$U=1$)。以下讨论取$\Gamma_L=\Gamma_R=1$，$k_B=\hbar=e=1$，$\mu_L=V/2$，$\mu_R=-V/2$，$\varepsilon_d=\varepsilon_m=0.5$，$\lambda_1=1$，$T=0.1$。本文以超导体的化学势为0能量作为参考点($\mu_S=0$)。

3.1　各个子信道的各阶累积量

首先，考虑没有库仑相互作用和远端M零模的情况，此时全部通道和8个子信道对平均电流的贡献如图3所示。由图可知，平均电流随电压的变化呈阶梯状分布，当电压值等于系统能级差的2倍，即$V=2|E_{aa'}|$时，发射极的费米能级与系统不同宇称能级差共振，电子从发射极隧穿到量子点的概率增大，导致电流迅速增加，曲线出现明显的台阶。在低压区，只有E_{e-o-}和E_{o-e-}通道对平均电流有贡献，说明M零模可以通过低能级通道参与输运。此外，全部通道的平均电流等于8个子信道的电流之和，这一结果初步暗示，在平均电流的贡献层面，各个子信道之间近乎呈现出相互独立的状态，各自电流的传输过程受其他子信道的干扰极小。

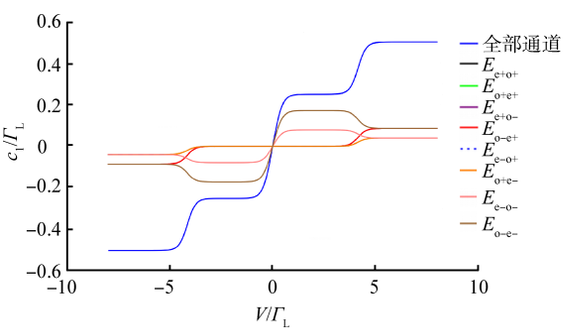


图3　不同通道下平均电流随电压变化

考虑没有库仑相互作用和远端M零模时，全部通道和8个子信道对二阶累积量的贡献，如图4所示。二阶累积量表示电流分布的涨落，与散粒噪声直接相关。其呈现出的台阶状分布与一阶累积量相似，与图3不同的是，$V\to 0$时电流的涨落有一特定值，这一现象归因于热噪声的影响。不难发现，各个子信道的曲线并不对称，且电子-空穴对电荷的输运相对于电压成反对称。此外，全部通道的电流涨落不等于8个子信道之和，这一差异表明，尽管在平均电流上子信道看似独立，但在动态的电流涨落过程中，8个子信道之间实则存在着不可忽视的相互关联，这种关联以干涉现象的形式展现，致使总电流的涨落不等于各子信道的简单相加。

考虑无库仑相互作用和远端M零模时，全部通道和8个子信道对三阶累积量的贡献，如图5所示。电流的三阶累积量在$V=2|E_{aa'}|$处迅速增加，形成台阶状分布，并且都关于$V=0$处对称。不同之处在于，三阶累积量的8个子信道和全部通道间并不存在简单加和的关系，这表明8个子信道之间存在干涉现象。

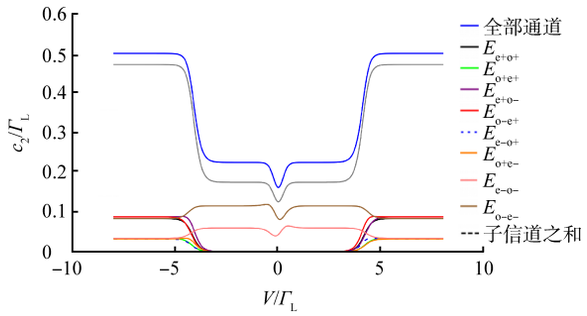


图4　不同通道下二阶累积量随电压变化

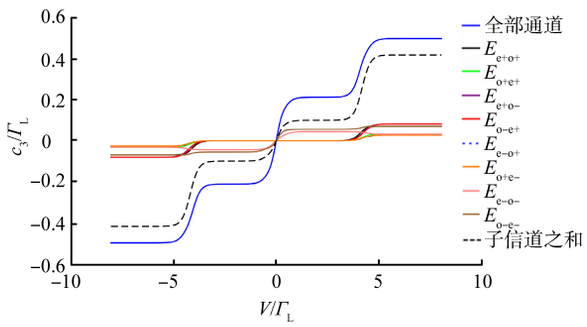


图5　不同通道下三阶累积量随电压变化

考虑无库仑相互作用且不含远端M零模的情况下,全部通道及其8个子信道对四阶累积量的贡献,如图6所示。四阶累积量随电压变化呈现出不对称性,表现出粒子-空穴对的效应。此外,全部通道的四阶累积量与8个子信道之和并不相等,表明在高阶累积量的测量中,子信道间的干涉造成了复杂的相互作用,未遵循简单的加和关系。随着累积量阶数的增加,各子信道之间的干涉效果逐渐增强,致使整体通道(蓝线)与子信道之和(黑虚线)之间的差距越来越大。

3.2　远端M零模对平均电流和散粒噪声的影响

考虑到三阶累积量随电压变化的曲线类似一阶累积量,而四阶累积量随电压变化的曲线类似二阶累积量,接下来将重点讨论平均电流和散粒噪声。

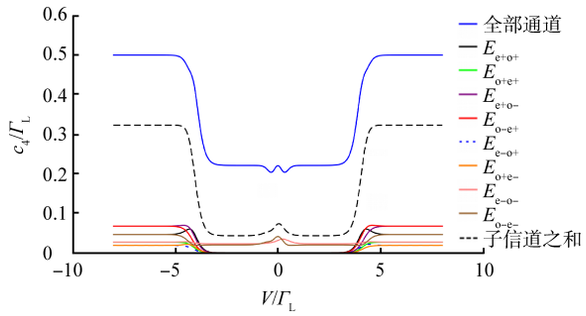


图6　不同通道下四阶累积量随电压变化

考虑没有库仑相互作用时,远端M零模对各阶累积量的影响,如图7所示。无论远端M零模存在与否,$U=0$时系统能级均简并,因此累积量随电压变化曲线始终表现出2个台阶。随着λ_2增加,远端M零模与量子点的耦合增强,能级间的相互排斥导致不同宇称间的能级差向高能级移动(图2(c)),从而使c_1-V曲线(图7(a))和c_2-V曲线(图7(b))的台阶向高偏压方向移动。由于零偏压附近的电导峰是M零模存在的重要特征,不难发现,当远端弱耦合时M零模更易出现。最终,平均电流趋近于单量子点输运电流$\Gamma_L\Gamma_R/\Gamma_L+\Gamma_R$[33]。

3.3　库仑相互作用对平均电流和散粒噪声的影响

在没有远端M零模的情况下,库仑相互作用对各阶累积量的影响显著。无论是否存在库仑相互作用,c_1-V曲线在零偏压附近均表现出电导峰(图8(a)),表明量子点与拓扑超导纳米线远端弱耦合是产生M零模的重要条件。随着库仑相互作用的增强,系统不同宇称间的能级差简并被打破(图2(b)),使c_1-V曲线(图8(a))和c_2-V曲线(图8(b))中红色曲线的台阶数增加。这表明库仑相互作用通过改变系统能级的简并状态,影响累积量随电压变化的台阶数。

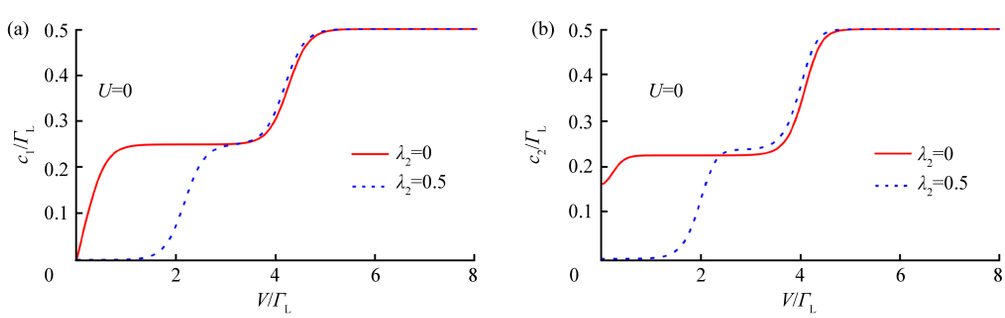


图7　不同λ_2作用下的累积量随电压的变化

(a)一阶;(b)二阶

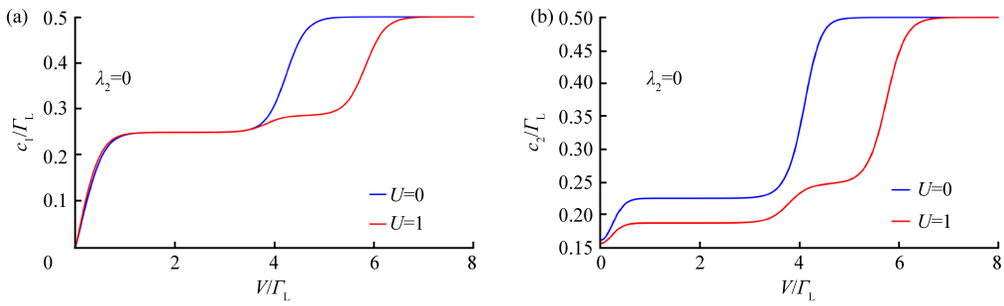


图8　不同U时平均电流和散粒噪声随电压的变化

(a)一阶;(b)二阶

3.4　实验的可行性

图1所示的超导体可用氮化钛铌(NbTiN),半导体纳米线可以使用锑化铟(InSb)。因为InSb具有强Rashba型自旋轨道耦合作用。利用高精度的磁场发生装置,产生可精确调节的外磁场,施加于量子点和拓扑超导纳米线耦合的系统。通过霍尔探头等磁场测量设备,精确监测磁场强度。强自旋轨道耦合与外加磁场及超导近邻效应协同作用,促使纳米线进入拓扑超导相,从而在纳米线两端产生M零模。

通过门电压可以调节量子点能级ε_d,使得量子点的电子点位$\vec{x}_d$变化,从而调节库仑相互作用U;或者选择不同介电常数ε_0的纳米线材料直接调节库仑相互作用U。通过改变量子点与纳米线之间的耦合材料,或者在量子点与纳米线间插入不同厚度和成分的缓冲层材料,来实现对量子点与近端M零模耦合强度λ_1以及与远端M零模耦合强度λ_2的调节。此外,实验应选取低温环境,能够有效抑制M零模向高能态的热激发,利于观察和研究M零模相关的物理现象。

对于高阶累积量的测量,可利用扫描隧道显微镜(scanning tunneling microscope, STM)技术。STM可以在原子尺度上对量子点和纳米线结构进行探测,通过在不同偏压下扫描测量,获得系统相关的电流涨落信息。

4　结　论

本文利用粒子数分辨的量子主方程,研究了单量子点和拓扑超导纳米线耦合结构的全计数统计。在有限温度和有限电压的情况下,利用超算符的特征多项式快速求解各阶累积量,讨论了各个子信道、远端M零模和库仑相互作用对各阶累积量的作用。

研究表明,当电压等于系统能级差的2倍时,发生共振隧穿现象,导致各阶累积量随电压的变化呈台阶分布。计算一阶累积量时,子信道之和即为全部通道的平均电流。然而,随着累积量阶数的增加,各个子信道之间的干涉逐渐增加,导致子信道和全部通道间不再遵循加和关系。远端M零模的耦合强度改变c_1-V图的台阶位置,且远端弱耦合时更易出现M零模,M零模可以通过低能级通道参与输运。库仑相互作用通过改变系统能级差的简并度,影响曲线的台阶数目。通过研究不同通道能级的累积量变化,能够更深入地理解各能级间的相互作用及其对系统输运特性的影响。

参 考 文 献

[1] BEENAKKER C W J. Search for non-Abelian Majorana braiding statistics in superconductors [J]. SciPost Physics Lecture Notes, 2020, 15: 1-29.

[2] LAHTINEN V, PACHOS J K. A short introduction to topological quantum computation [J]. SciPost Physics, 2017, 3(3): 21.

[3] NAYAK C, SIMON S H, STERN A, et al. Non-Abelian anyons and topological quantum computation [J]. Reviews of Modern Physics, 2008, 80(3): 1083-1159.

[4] SCHLOSSHAUER M. Quantum decoherence [J]. Physics Reports, 2019, 831: 1-57.

[5] SANKAR D S. In search of Majorana [J]. Nature Physics, 2023, 19(2): 165-170.

[6] ZHANG H, LIU C X, GAZIBEGOVIC S, et al. Quantized Majorana conductance [J]. Nature, 2018, 556(7699): 74-79.

[7] READ N, GREEN D. Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect [J]. Physical Review B, 2000, 61(15): 10267.

[8] KITAEV A Y. Unpaired Majorana fermions in quantum wires [J]. Physics Uspekhi, 2001, 44(10): 131.

[9] WANG D F, KONG L Y, FAN P, et al. Evidence for Majorana bound states in an iron-based superconductor [J]. Science, 2018, 362(6412): 333-335.

[10] MOURIK V, ZUO K, FROLOV S M, et al. Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices[J]. Science, 2012, 336 (6084): 1003-1007.

[11] DAS A, RONEN Y, MOST Y, et al. Zero-bias peaks and splitting in an Al-InAs nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions[J]. Nature Physics, 2012, 8: 887-895.

[12] DENG M T, YU C L, HUANG G Y, et al. Anomalous zero-bias conductance peak in a Nb-InSb nanowire-Nb hybrid device [J]. Nano Letters, 2012, 12 (12): 6414-6419.

[13] NADJ-PERGE S, DROZDOV I, LI J, et al. Observation of Majorana fermions in ferromagnetic atomic chains on a superconductor [J]. Science, 2014, 346 (6209): 602-607.

[14] PAN H N, SARMA S D. Physical mechanisms for zero-bias conductance peaks in Majorana nanowires [J]. Physical Review Research, 2020, 2(1): 013377.

[15] DENG M T, VAITIEKENAS S, HANSEN E B, et al. Majorana bound state in a coupled quantum-dot-nanowire system [J]. Science, 2016, 354 (6319): 1557-1562.

[16] NICHELE F, DRACHMANN A C C, WHITICAR A M, et al. Scaling of Majorana zero-bias conductance peaks [J]. Physical Review Letters, 2017, 119(13): 136803.

[17] ZHANG H, GÜL Ö, CONESA-BOJ S, et al. Ballistic superconductivity in semiconductor nanowires [J]. Nature Communications, 2017, 8(1): 16025.

[18] SARMA S D, FREEDMAN M, NAYAK C. Majorana zero modes and topological quantum computation [J]. NPJ Quantum Information, 2015, 1(1): 1-13.

[19] HAIM A, BERG E, VON OPPEN F, et al. Signatures of Majorana zero modes in spin-resolved current correlations [J]. Physical Review Letters, 2015, 114 (16): 166406.

[20] KELLS G, MEIDAN D, BROUWER P W. Near-zero-energy end states in topologically trivial spin-orbit coupled superconducting nanowires with a smooth confinement [J]. Physical Review B, 2012, 86 (10): 100503.

[21] BLONDER G E, TINKHAM M, KLAPWIJK T M. Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion [J]. Physical Review B, 1982, 25(7): 4515.

[22] BAGRETS D, ALTLAND A. Class D spectral peak in Majorana quantum wires [J]. Physical Review Letters, 2012, 109(22): 227005.

[23] GOLDHABER-GORDON D, SHTRIKMAN H, MAHALU D, et al. Kondo effect in a single-electron transistor[J]. Nature, 1998, 391: 156-159.

[24] XU Y, MIOTKOWSKI I, LIU C, et al. Observation of topological surface state quantum Hall effect in an intrinsic three-dimensional topological insulator [J]. Nature Physics, 2014, 10(12): 956-963.

[25] DONG B, FAN H Y, LEI X L, et al. Counting statistics of tunneling through single molecule: effect of distortion and displacement of vibrational potential surface [J]. Journal of Applied Physics, 2009, 105(11): 113702.

[26] RICCO L S, MARQUES Y, SANCHEZ J E, et al. Interaction induced hybridization of Majorana zero modes in a coupled quantum-dot-superconducting-nanowire hybrid system [J]. Physical Review B, 2020, 102(16): 045483.

[27] ALBRECHT S M, HIGGINBOTHAM A P, MADSEN M, et al. Exponential protection of zero modes in Majorana islands[J]. Nature, 2016, 531(7593): 206-209.

[28] 于春霖,张浩. Majorana准粒子与超导体-半导体异质纳米线[J].物理学报,2020,69(7):077303.

[29] TSINTZIS A, SOUTO R S, LEIJNSE M. Creating and detecting poor man's Majorana bound states in interacting quantum dots[J]. Physical Review B, 2022, 106(20): L201404.

[30] WANG S K, JIAO H, LI F, et al. Full counting statistics of transport through two-channel Coulomb blockade systems[J]. Physical Review B, 2007, 76(12): 125416.

[31] ELAHWEL A A, ALJALALI N A, BARBASH M, et al. Fermi function and its applications [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2023, 11 (1): 135-146.

[32] BRUDERER M, CONTRERAS-PULIDO L D, THALLER M, et al. Inverse counting statistics for stochastic and open quantum systems: the characteristic polynomial approach[J]. New Journal of Physics, 2014, 16(3): 033030.

[33] BLANTER Y M, BÜTTIKER M. Shot noise in mesoscopic conductors[J]. Physics Reports, 2000, 336 (1/2): 1-166.

(责任编辑:兰丽丽)