DOI：10.19789/j.1004-9398.2025.05.002
文献引用：王洁，李德明．超树的正负惯性指数[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2025，46(5)：8-12. WANG J，LI D M. Positive and negative inertia index of a hypertree[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2025，46(5)：8-12.

超树的正负惯性指数*

王　洁**，李德明

（首都师范大学数学科学学院，北京　100048）

摘要：将图上的结论推广到超图上，证明了单个超树的正负惯性指数与超边个数和顶点个数有关，并给出了2个超树通过一条超边连接后的超树的正惯性指数。

关键词：超树；正惯性指数；负惯性指数
中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A

Positive and negative inertia index of a hypertree*

WANG Jie**，LI Deming

（School of Mathematical Sciences，Capital Normal University，Beijing　100048）

Abstract：This paper extend the conclusion of the graph to hypergraphs，prove that the positive and negative inertia index of a single hypertree are related to the number of hyperedges and vertices，and give the positive and negative inertia index of two hypertrees connected by a hyperedge.

Keywords：hypertree；positive inertia index；negative inertia index
CLC：O157.5　　**DC**：A

0　引　言

超图$\mathcal{G}=(V, E)$是由非空顶点集$V=V(\mathcal{G})$和边集$E=E(\mathcal{G})$组成的，这里的每条边$e\in E(\mathcal{G})$是至少包含2个顶点的$V(\mathcal{G})$的子集。$|V(\mathcal{G})|=n$和$|E(\mathcal{G})|=m$表示超图$\mathcal{G}$的顶点和超边个数。本文中超图$\mathcal{G}$的每条超边大小都为k时，把超图$\mathcal{G}$称作是k－一致的。众所周知，2－一致超图总是称作普通图。含有n个顶点的完全图记作K_n。

对于一个超图$\mathcal{G}$，定义超图$\mathcal{G}-v_0$是从$\mathcal{G}$中删去顶点v_0以及删去与v_0相关联的超边所得。对于一个顶点集$S\in V(\mathcal{G})$，定义超图$\mathcal{G}-S$是从$\mathcal{G}$中删去S中的所有顶点以及删去与S中的任意一个顶点相关联的超边所得。

在一个超图中，如果2个顶点包含在同一条超边上，则这2个顶点是相邻的。如果2条超边的交非空，则这2条超边相邻。如果$v\in e$，则超边e与一个顶点v是关联的。在超图$\mathcal{G}$中，顶点v的度$\deg_{\mathcal{G}}(v)$称作是与顶点v所关联的超边个数。对于一个超图$\mathcal{G}$，分别记$\Delta(\mathcal{G})$和$\delta(\mathcal{G})$为最大度和最小度。其中度为1的顶点称作悬挂点。至多有1个顶点的度>1且在这条超边的其他顶点的度都是悬挂点的超边称作悬挂边。

在一个超图中，长度为q的超路径$v_1e_1v_2e_2\cdots v_qe_qv_{q+1}$被定义作顶点和超边的交替序列，使得$v_1, v_2, \cdots, v_{q+1}$是不同的顶点，$e_1, e_2, \cdots, e_q$是不同的超边。对于$i=1, 2, \cdots, q$，$v_i, v_{i+1}\in e_i$，对于$i=1, 2, \cdots, q-1$，$e_i\cap e_{i+1}=v_{i+1}$，如果$|i-j|\leqslant 2$，则

收稿日期：2023-07-18
*国家自然科学基金项目（10201022）
**通信作者：cnuwjie@163.com

$e_i \cap e_j = \varnothing$成立。长度为$q$的超圈$v_1e_1v_2e_2\cdots v_qe_qv_1$是从一条超路径$v_1e_1v_2e_2\cdots v_qe_qv_{q+1}$中在$v_1$和$v_q$之间添加一条新的超边$e_q$所得，其中$e_q \cap e_1 = \{v_1\}$，$e_q \cap e_{q-1} = \{v_q\}$，如果$j \neq 1, q-1$，$|q-j| \geqslant 2$成立，则$e_i \cap e_j = \varnothing$。对于所有的$u, v \in V(\mathcal{G})$，如果存在从$v$到$u$的超路径，则该超图$\mathcal{G}$是连通的。如果超图$\mathcal{G}$不包含超圈，则该超图$\mathcal{G}$是无圈的。

Cioaba等[1]定义了超图$\mathcal{G}$的邻接矩阵$\boldsymbol{A}$，邻接矩阵定义为

$$\boldsymbol{A}_{x,y} = \begin{cases} \left|\left\{e \in E: \{x,y\} \subset e\right\}\right|, & x \neq y, \\ 0, & x = y。 \end{cases}$$

$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是超图$\mathcal{G}$的特征值，并且其形成了超图的谱。实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的谱中正特征值、负特征值、零特征值的个数称为正惯性指数、负惯性指数、零度，用$p(\boldsymbol{A})$、$q(\boldsymbol{A})$、$\eta(\boldsymbol{A})$表示。对于一个超图$\mathcal{G}$，其邻接矩阵为$\boldsymbol{A}(\mathcal{G})$，分别称$p(\boldsymbol{A}(\mathcal{G}))$、$q(\boldsymbol{A}(\mathcal{G}))$和$\eta(\boldsymbol{A}(\mathcal{G}))$是$\mathcal{G}$的正惯性指数、负惯性指数和零度，为了简便，将其写为$p(\mathcal{G})$、$q(\mathcal{G})$和$\eta(\mathcal{G})$。显然，$p(\mathcal{G}) + q(\mathcal{G}) + \eta(\mathcal{G}) = |V(\mathcal{G})|$。

图惯性的研究由于其在化学中的许多应用而引起广泛关注[2-5]。Gregory等[6]研究了正负惯性指数的次加性，并发展了厄米秩的一些性质，得到了双方分解数的一些结果；Gregory等[7]研究了2个图的部分连接的惯性，并建立了图的部分连接的惯性与双式分解之间的一些关系；Daughert[8]用匹配数对单圈图的惯性进行了刻画，得到了一个计算其线性时间算法；Torgašev[9]给出了顶点集上的一个等价关系，并将G的标准图定义为相应的商图，其推导出所有具有恰好$n(\geqslant 1)$个负特征值（包括多重性）的连通图的类只包含有限多个所谓的正则图；Torgašev[10]得到了一个有限连通图G恰好有2个负特征值，当且仅当其正则图是9个特定图中的一个，每个图都有3、4、5或6个顶点，此外还建立了第2和3个的最小负特征值的严格上界；Yu等[11]刻画了有1或者2个正特征值的符号树、符号单圈图、符号双圈图；Ma等[12]研究了树、单圈图、双圈图的正负惯性指数，得到了其计算方法，并证明了正负惯性指数差的一个不等式；Ma等[13]研究了树的线图的正负惯性指数，得到了树的线图的正惯性指数界与树中的非悬挂边的个数有关，证明了当树的线图的正惯性指数达到上界时，树的线图是非奇异的，而当树的线图的正惯性指数达到下界时，树的线图是奇异的；Duan[14]研究了符号图的惯性指数和基底图的惯性指数的关系；Ma和Xie[15]研究了一种特殊的三圈图的惯性指数，给出了一种计算具有较大顶点的三圈图惯性指数的新方法；Yu等[16]研究了所有带有悬挂顶点的n阶双圈图之间的最小正惯性指数，并刻画了所有n阶双圈图中正惯性指数为1或2的双圈图。基于上述讨论，研究超图的正负惯性指数将是有趣的。

1　定义和引理

在这一节中，本文引用一些以前的结果。假设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$是2个$n$阶的实对称矩阵，若存在一个$n$阶的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$，则说$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是合同的，记作$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$。

定义1[17]　超树是一个既连通又无圈的超图。

Berge[18]给出了无圈超图的一个刻画，特别是对于连通的情况，结果如下。

引理2[18]　如果$\mathcal{G}$是一个有n个顶点和m条超边的连通超图，则$\mathcal{G}$是无圈的当且仅当$\sum_{i\in[m]}|e_i - 1| = n - 1$。

引理3[19]　$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$是2个$n$阶的实对称矩阵，使得$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$。则$p(\boldsymbol{A}) = p(\boldsymbol{B}), n(\boldsymbol{A}) = n(\boldsymbol{B}), \eta(A) = \eta(\boldsymbol{B})$。

引理4[13]　令$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$是一个$2 \times 2$的非奇异的实对称矩阵，如果$a_{22} = 0$，则$p(\boldsymbol{A}) = n(\boldsymbol{A}) = 1$。

引理5[13]　如果$m \geqslant 2$，K_m的特征值是$m-1$和-1（重数为$m-1$），则$p(K_m) = 1$，$n(K_m) = m - 1$。

2　主要结论

引理6　设T是含有n个顶点，m条超边大小为$k_i(i = 1, 2, \cdots, m$，且$k_i \geqslant 3)$的超树，若超树T满足以下2个条件之一：

（1）如果超树H是非奇异的，$H - v_0$是奇异的，存在1个顶点$v_1 \in V(H)$，$v_1 \neq v_0$，使得$H - v_0 - v_1$是非奇异的；

（2）$H - v_0$是非奇异的，如果$\dfrac{|H|}{|H - v_0|} = \dfrac{k_m - 1}{k_m - 2}$或$\dfrac{|H|}{|H - v_0|} \leqslant 0$时，则超树$T$的正负惯性指数分别为$p(T) = m$，$q(T) = n - m$。

证明　对超边的个数m进行归纳。

（1）当$m = 1$时，$n = k_1(k_1 \geqslant 3)$，此时超树T为n个顶点一条超边的超树，对应的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(T)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix},$$

式中$\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{j}$分别表示k_1-1阶的全1方阵、单位矩阵、全1列向量。

取 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}$，有

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & -\dfrac{k_1-1}{k_1-2}\end{bmatrix}$，其中$-\dfrac{k_1-1}{k_1-2}<0$。

由引理3可知，如果$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是2个合同的实对称矩阵，那么矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$有相同的正负惯性指数，又根据引理5，$\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I}$是完全图$K_{k_1-1}$对应的邻接矩阵，并且其正负惯性指数分别为$p(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})=1$，$q(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})=k_1-2$。因此，$p(\boldsymbol{A})=1$，$q(\boldsymbol{A})=k_1-1$，结论成立。

(2)假设超边个数为$m-1$时结论成立。

(3)当超边个数为m时，超树T可看作是有$m-1$条超边的超树H通过其顶点v_0标记$K_{k_m}(k_m\geqslant 3)$的一个顶点得到的，记作$T=K_{k_m}\triangle(v_0)\,H$。

当条件(1)成立时，超树$T=K_{k_m}\triangle(v_0)\,H$的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(T)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{j}_{(k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{0}_{(k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}_{1\times(k_m-1)} & 0 & \delta & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(k_m-1)} & \delta & 0 & \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{(n-k_m-1)\times(k_m-1)} & \boldsymbol{\alpha}_{(n-k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{\beta}_{(n-k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix},$$

其中$\delta=\begin{cases}1, v_0\sim v_1\\ 0, \text{否则}\end{cases}$，$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$分别为顶点$v_0$和$v_1$与$H-v_0-v_1$的顶点的邻接关系向量，$\boldsymbol{B}$是$H-v_0-v_1$的邻接矩阵。

由假设知，$H-v_0-v_1$非奇异，即$\boldsymbol{B}$可逆。取

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{k_m-1} & -(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{0}_{(k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{0}_{(k_m-1)\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}_{1\times(k_m-1)} & 1 & 0 & \boldsymbol{0}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}_{1\times(k_m-1)} & 0 & 1 & \boldsymbol{0}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}_{(n-k_m-1)\times(k_m-1)} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{I}_{n-k_m-1}\end{bmatrix},$$

根据合同变换，有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}_{(k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{0}_{(k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(k_m-1)} & -\dfrac{k_m-1}{k_m-2}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & \delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(k_m-1)} & \delta-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}_{(n-k_m-1)\times(k_m-1)} & \boldsymbol{0}_{(n-k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{0}_{(n-k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}。$$

因为$H-v_0$是奇异的，由$\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$合同于$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}_{(n-k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，故$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}_{(n-k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$奇异，因此$-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}=0$。

现考虑超树H的邻接矩阵$\boldsymbol{A}(H)=\begin{bmatrix}0 & \delta & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \delta & 0 & \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，使得

$$\boldsymbol{A}(H)\simeq\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & \delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \delta-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & 0 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m-1)}\\ \boldsymbol{0}_{(n-k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{0}_{(n-k_m-1)\times 1} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}。$$

由假设知，H是非奇异的，故

$$-(\delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta})(\delta-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\neq 0,$$

即

$$\delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}\neq 0。$$

由引理4得，

$$p\left(\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha} & \delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}\\ \delta-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & 0\end{bmatrix}\right)=$$

$$q\left(\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha} & \delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}\\ \delta-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & 0\end{bmatrix}\right)=1,$$

再根据$p(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})=1$，$q(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})=k_m-2$，可得

$$p(\boldsymbol{A})=p(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})+$$

$$p\left(\begin{bmatrix}-\dfrac{k_m-1}{k_m-2}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & \delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}\\ \delta-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}\right)+p(\boldsymbol{B})=$$

$$p(\boldsymbol{B})+2,$$

$$q(\boldsymbol{A})=q(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})+$$

$$q\left(\begin{bmatrix}-\dfrac{k_m-1}{k_m-2}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & \delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}\\ \delta-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}\right)+q(\boldsymbol{B})=$$

$$q(\boldsymbol{B})+k_m-1,$$

即

$$p\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\,H\right)=p(H-v_0-v_1)+2, q\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\,H\right)=$$

$$q(H-v_0-v_1)+k_m-1。\tag{1}$$

由

$$p(H)=p\left(\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha} & \delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}\\ \delta-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & 0\end{bmatrix}\right)+p(\boldsymbol{B}),$$

即

$$q(H)=q\left(\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha} & \delta-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\beta}\\ \delta-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & 0\end{bmatrix}\right)+q(\boldsymbol{B}),$$

即$p(H)=p(H-v_0-v_1)+1, q(H)=q(H-v_0-v_1)+1$。(2)

故由式(1和2),$p\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H\right)=p(H)+1$,$q\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H\right)=q(H)+k_m-2$。

根据归纳假设,$p(H)=m-1$,$q(H)=n-(k_m-1)-(m-1)=n-k_m-2$。因此,

$$p(T)=p\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H\right)=p(H)+1=m,$$

$$q(T)=q\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H\right)=q(H)+k_m-2=n-m,$$

结论成立。

当条件(2)成立时,超树$T=K_{k_m}\triangle(v_0)\ H$的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(T)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{(n-k_m)\times(k_m-1)} & \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{\gamma}$为顶点v_0与$H-v_0$的顶点的邻接关系向量,$\boldsymbol{C}$是$H-v_0$的邻接矩阵。

由于$H-v_0$非奇异,故$\boldsymbol{C}$可逆。取

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{j} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{(k_m-1)\times(n-k_m)}\\ \boldsymbol{0}_{1\times(k_m-1)} & 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m)}\\ \boldsymbol{0}_{(n-k_m)\times(k_m-1)} & -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}_{(k_m-1)\times1} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{(k_m-1)\times(n-k_m)}\\ \boldsymbol{0}_{1\times(k_m-1)} & -\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m)}\\ \boldsymbol{0}_{(n-k_m)\times(k_m-1)} & \boldsymbol{0}_{(n-k_m)\times1} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix},$$

其中

$$-\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\gamma}=\frac{|H|}{|\boldsymbol{C}|}=\frac{|H|}{|H-v_0|},\ \boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{j}=\frac{k_m-1}{k_m-2}。$$

若$\dfrac{|H|}{|H-v_0|}=\dfrac{k_m-1}{k_m-2}$,则

$$-\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\gamma}>0,$$

从而可得

$$p(\boldsymbol{A})=p(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})+p(\boldsymbol{C})+1=p(\boldsymbol{C})+2,$$

$$q(\boldsymbol{A})=q(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})+q(\boldsymbol{C})=q(\boldsymbol{C})+k_m-2,$$

等价于

$$p\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H\right)=p(H-v_0)+2,$$

$$q\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H\right)=q(H-v_0)+k_m-2。$$

另外,

$$\boldsymbol{A}(H)=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}(H)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m)}\\ \boldsymbol{0}_{(n-k_m)\times1} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}。$$

于是有

$$p(H)=p(H-v_0)+1,$$

$$q(H)=q(H-v_0)=n-k_m-p(H-v_0)。$$

根据归纳假设,可得

$$p\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H\right)=p(H)+1=m,$$

$$q\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H\right)=$$

$$n-k_m-p(H-v_0)+k_m-2=$$

$$n-2-p(H-v_0)=$$

$$n-2-(p(H)-1)=$$

$$n-p(H)-1=n-m。$$

若$\dfrac{|H|}{|H-v_0|}\leqslant0$时,$-\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\gamma}=\dfrac{|H|}{|H-v_0|}-\dfrac{k_m-1}{k_m-2}<0$,从而可得,

$$p(\boldsymbol{A})=p(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})+p(\boldsymbol{C})=p(\boldsymbol{C})+1,$$

$$q(\boldsymbol{A})=q(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})+q(\boldsymbol{C})+1=q(\boldsymbol{C})+k_m-1。$$

等价于

$$p(K_{k_m}\Delta(v_0)H)=p(H-v_0)+1,$$

$$q(K_{k_m}\Delta(v_0)H)=q(H-v_0)+k_m-1。$$

又因为

$$\boldsymbol{A}(H)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}(H)\simeq\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}_{1\times(n-k_m)}\\ \boldsymbol{0}_{(n-k_m)\times1} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}。$$

于是有

$$p(H)=p(H-v_0),$$

$$q(H)=q(H-v_0)+1=n-k_m-p(H-v_0)+1。$$

根据归纳假设,可得

$$p(K_{k_m}\Delta(v_0)H)=p(H)+1=m,$$

$$q\left(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H\right)=q(H)+k_m-2=$$

$$n-k_m-p(H-v_0)+1+k_m-2=$$

$$n-p(H-v_0)-1=$$

$$n-p(H)-1=n-m。$$

综上所述,若超树T满足引理中2个条件之一,则超树T的正负惯性指数分别为$p(T)=m$,$q(T)=n-m$。

定理7　设T_1是含有n_1个顶点,m_1条超边大小为$k_i(i=1,2,\cdots,m_1,$且$k_i\geqslant3)$的超树,T_2是含有n_2个顶点,m_2条超边大小为$k_j(j=1,2,\cdots,m_2,$且$k_j\geqslant3)$的超树,并且T_1和T_2不相交。若T是在T_1和T_2之间加一条大小为$k(k\geqslant3)$超边所得的超树,并且T、T_1

和T_2分别满足引理6中2个条件之一,则

$$p(T)=p(T_1)+p(T_2)+1=m_1+m_2+1,$$

$$q(T)=n-m_1-m_2-1。$$

证明 令$T=K_{k_m}\triangle(v_0)\ H$,其中$k_m$是$T_i(i=1,2)$中一条超边的大小,$H$是包含顶点$v_0$的含有$m_1+m_2$条超边的超树,使用引理6可知,$p(T_1)=m_1$,$q(T_1)=n_1-m_1$,$p(T_2)=m_2$,$q(T_2)=n_2-m_2$,$p(T)=p(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H)=m_1+m_2+1$,$q(T)=q(K_{k_m}\triangle(v_0)\ H)=n-m_1-m_2-1$,其中$n=n_1+n_2+k_m-2$。

3 结束语

本文将图上的结论推广到了超图上,并证明了单个超树的正负惯性指数与超边个数和顶点个数有关,其次推出了2个超树通过一条超边连接后的超树的正惯性指数问题。本文的研究方法对于研究超树的线图、符号超图及符号超图的线图的正负惯性指数问题提供思路和方法。

参 考 文 献

[1] CIOAB S M, KOOLEN J H, MIMURA M, et al. On the spectrum and linear programming bound for hypergraphs [J]. European Journal of Combinatorics, 2022, 104: 103535.

[2] COLLATZ L, SINOGOWITZ U. Spectra of finite graphs [J]. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 1957, 21: 64-77.

[3] FOWLER P W, MANOLOPOULOS D E. An atlas of fullerenes[M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.

[4] CVETKOVIĆ D, GUTMAN I, TRINAJSTIĆ N. Graph theory and molecular orbitals. II [J]. Theoretical Chemistry Accounts, 1972, 34(2): 129-136.

[5] LONGUET-HIGGINS H C. Some studies in molecular orbital theory I. Resonance structures and molecular orbitals in unsaturated hydrocarbons[J]. The Journal of Chemical Physics, 1950, 18(3): 265-274.

[6] GREGORY D A, WATTS V L, SHADER B L. Biclique decompositions and Hermitian rank[J]. Linear Algebra and its Applications, 1999, 292(1/2/3): 267-280.

[7] GREGORY D A, HEYINK B, VANDER MEULEN K N. Inertia and biclique decompositions of joins of graphs [J]. Combination Theory Series B, 2003, 88: 135-151.

[8] DAUGHERTY S. The inertia of unicyclic graphs and the implications for closed-shells [J]. Linear Algebra and its Applications, 2008, 429(4): 849-858.

[9] TORGŠEV A. On graphs with a fixed number of negative eigenvalues[J]. Discrete Math, 1985, 57(3): 311-317.

[10] TORGŠEV A. Graphs with exactly two negative eigenvalues[J]. Mathematische Nachrichten, 1985, 122: 135-140.

[11] YU G H, FENG L H, QU H. Signed graphs with small positive index of inertia[J]. The Electronic Journal of Linear Algebra ELA, 2016, 31: 232-243.

[12] MA H C, YANG W H, LI S G. Positive and negative inertia index of a graph [J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 438(1): 331-341.

[13] MA X B, WONG D, ZHU M. The positive and the negative inertia index of line graphs of trees [J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 439(10): 3120-3128.

[14] DUAN F. The inertia indices of a signed graph in terms of the inertia indices of its underlying graph[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2020, 70(3): 497-510.

[15] MA H C, XIE C L. The inertia indexes of one special kind of tricyclic graphs[J]. Applied Mathematics, 2019, 10(1): 11-18.

[16] YU G H, FENG L H, WANG Q W. Bicyclic graphs with small positive index of inertia[J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 438(5): 2036-2045.

[17] ZHANG L, HOU Y P. Nodal domain theorem of signed hypergraphs[EB/OL]. [2023-07-02]. https://arxiv.org/abs/2207.02664.

[18] BERGE C. Graphs and hypergraphs [M]. 2nd ed. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1976.

[19] LANCASTER P, TISMENETSKY M. The theory of matrices with application [M]. Orlando Florida: Academic Press, 1985.

(责任编辑:马田田)