DOI:10.19789/j.1004-9398.2025.05.003
文献引用:林霞,李长远,刘雨喆,等.$\Bbbk$-代数的零张量因子[J].首都师范大学学报(自然科学版),2025,46(5):13-19. LIN X,LI C Y,LIU Y Z,et al. The zero tensor-divisors of $\Bbbk$-algebras[J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2025,46(5):13-19.

$\Bbbk$-代数的零张量因子*

林 霞[1],李长远[2**],刘雨喆[1],赵 伟[3]

(1. 贵州大学数学与统计学院,贵州 贵阳 550025;2. 首都师范大学数学科学学院,北京 100048;3. 阿坝师范学院数学学院,四川 汶川 623002)

摘要:对定义在域$\Bbbk$上的$\Bbbk$-代数A,本文考虑了2个问题,代数A上的张量积$M\otimes_A N$为0时,何时能导出$M=0$或$N=0$;代数上的张量积$M\otimes_A N$中的元素$m\otimes n$为0时,何时能导出$m=0$或$n=0$。本文引入了强/弱零张量因子的概念,并利用箭图方法对此进行了回答。具体地说,对只包含至多1个loop的连通代数A:(1)A含强零张量因子当且仅当其箭图顶点数≥2,也当且仅当A的箭图不是loop;(2)A无弱零张量因子,则其维数无限。

关键词:箭图表示;张量;零张量因子;维数
中图分类号:O153.3;O151.26;O151.23 **文献标志码**:A

The zero tensor-divisors of $\Bbbk$-algebras*

LIN Xia[1], LI Changyuan[2**], LIU Yuzhe[1], ZHAO Wei[3]

(1. Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou 550025; 2. School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048; 3. School of Mathematics, Aba Teachers University, Wenchuan Sichuan 623002)

Abstract: Let A be a $\Bbbk$-algebra defined over a field $\Bbbk$. This paper consider the two questions: If the tensor $M\otimes_A N$ on A is zero, under what situation is either $M=0$ or $N=0$? If the element, say $m\otimes n$, in $M\otimes_A N$ is zero, under what situation is either $m=0$ or $n=0$? This study introduces strong/weak zero-tensor-divisors in this paper and provide a solution of the above questions by quiver methods. To be precise, assume that A is a connected algebra whose quiver contains at most one loop, then have the results as follows: (1) A has strong zero-tensor-divisors, the number of vertices of its quiver is greater than or equal to 2, the quiver of A is not a loop. (2) If A does not have weak zero-tensor-divisors then its dimension is infinite.

Keywords: quiver representations; tensors; zero-tensor-divisors; dimensions
CLC: O153.3; O151.26; O151.23 **DC**: A

0 引 言

张量是多线性代数中的核心概念,最初指的是环的张量,其最早可以追溯到Frobenius对群表示的研究。张量(尤其是代数以及模的张量)在数学、应用数学乃至物理等领域的研究中占据极其重要的

收稿日期:2023-10-06
*国家自然科学基金项目(12061001,12171207);四川省科技厅2023年中央引导地方科技发展项目(23ZYZYTS0335);贵州大学引进人才科研启动基金项目(贵大人基合字(2022)53号,(2022)65号)
**通信作者:2210502106@cnu.edu.cn

地位,因此张量总是受到广泛关注。令A是环,右A-模M和左A-模N的张量$M \otimes_A N$本质上是Abel群$M \times N$的一种商群,特别地,当M和N还分别具有左A'-模和右A''-模结构时(这里A'和A''也是有限维代数),那么$M \otimes_A N$自然具有左A'右A''-双模结构,因此自然地看作左$A''^{\mathrm{op}} \otimes_{\Bbbk} A'$-模或者右$A'' \otimes_{\Bbbk} A'^{\mathrm{op}}$-模,其中$A''^{\mathrm{op}} \otimes_{\Bbbk} A'$和$A'' \otimes_{\Bbbk} A'^{\mathrm{op}}$是环的张量,也称张量环。对张量环上的模展开系统性的研究是环与代数领域中的重要内容,包括张量代数的箭图表示[1]、Clebsch-Gordon问题[2-5]、表示型问题[6-7]和代数的同调/Hochschild同调性质[8-12]等。

众所周知,当A是交换环时,A上的左/右模自然地看成A上的左A右A-双模(并常常简称为A-模)。此时,在同构意义下,A-模的张量具有交换性,即$M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$。但对于$M \otimes_A N$中的元素$m \otimes n$而言,通常不满足$m \otimes n = n \otimes m$。另一方面,将$A$视为定义在自身上的$A$-模时,有$A \otimes_A A \cong A$,该同构由$x \otimes y \mapsto xy$自然给出,即$A \otimes_A A$中的张量乘法由$A$上的乘法给出。从该角度来看,张量乘法是一种广义的乘法,且当A是无零因子环时,$A \otimes_A A$中的元素$m \otimes n$=0当且仅当$m = 0$或$n = 0$。然而,对定义在A上的一般的张量积$M \otimes_A N$中:

• $m \otimes n = 0$未必能导出$m = 0$或$n = 0$(例如本文的例1(1))。

• 类似地,$M \otimes_A N = 0$未必能导出$M = 0$或$N = 0$。

于是,可以提出如下问题:

问题1 当环A满足什么条件时,对A上的任意右A-模M和左A-模N,$M \otimes_A N$中的元素$m \otimes n = 0$蕴含$m = 0$或$n = 0$?

问题2 当环A满足什么条件时,对A上的任意右A-模M和左A-模N,$M \otimes_A N = 0$蕴含$M = 0$或$N = 0$?

本文将在A是$\Bbbk$-代数的情形下,回答上面问题。并且,为叙述方便,本文定义:环A的强零张量因子是非零左A-模N(分别地,右A-模M)使得存在非零右A-模M(分别地,非零左A-模N)满足$M \otimes_A N = 0$;环A的弱零张量因子是非零左A-模N(分别地,右A-模M)中的非零元素n(分别地,非零元素m)使得存在非零右A-模M(分别地,非零左A-模N)中的非零元素m(分别地,非零元素n)满足$m \otimes n = 0$(见定义1,定义2)。此外,本文自此开始,总是做出如下约定:$A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$是域$\Bbbk$上的基代数(basic algebra,即对$A$的完全本原正交幂等元组$\{e_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$,始终有$e_i A \cong e_j A, \forall i \neq j$);箭图$\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$是有限连通箭图,其中$\mathfrak{s}, \mathfrak{t}: \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_0$将箭向$a$映射分别为$a$的起点和终点;$\mathcal{I}$是admissible理想;所考虑的$A$上的模均是有限生成模,且对$Q$上的箭向$a$,$b$,其复合在$\mathfrak{t}(a) = \mathfrak{s}(b)$的情形下记作$ab$。

本文主要结果如下:

定理 设$\Bbbk$-代数$A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$非单,其箭图连通且只包含至多1个loop。

(1) 如果A是有限维代数,则下面论述等价:

(a) A是含强零张量因子代数;

(b) $\#Q_0 \geqslant 2$(对集合S,记号$\#S$表示它的元素个数);

(c) Q或者包含一个loop为真子箭图,或者不含loop。

(2) 如果A是无弱零张量因子代数,则A是无限维代数。

主定理(1)在A是非单的有限维代数,其箭图连通且只包含1个loop的情形下,对问题2进行了回答。主定理(2)则指出,有限维代数A总含有弱零张量因子,这意味着在有限维代数的情形下完全否定了问题1。需要指出的是,非单的无弱零张量因子代数是存在的,见例5。

1 零张量因子

1.1 模的张量

给定环R和定义在R上的右R-模$M_R = M$与左R-模${}_R N = N$。M和N的R-张量是一个由Abel群$M \otimes_R N$和R-双线性函数$T: M \times N \to M \otimes_R N$构成的二元组$(M \otimes_R N, f)$,使得对任意给定的Abel群$G$和任意给定的$R$-双线性函数$\tilde{T}: M \times N \to G$,总存在唯一的$\mathbb{Z}$-模同态$f: M \otimes_R N \to G$使得$fT = \tilde{T}$。

张量运算满足双线性,因此,若$M = \langle m_i | i \in I \rangle$,$N = \langle n_j | j \in J \rangle$,则$M \otimes_R N$中的任意元素$m \otimes n$(不失一般性地,设$m = \sum_{i \in I} m_i r_i$,$n = \sum_{j \in J} s_j n_j$,其中,$r_i, s_j \in R$)总可以展开为

$$m \otimes n = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} m_i r_i \otimes s_j n_j = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} m_i \otimes r_i s_j n_j \overset{r_i s_j n_j = n'_{ij}}{====} \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} m_i \otimes n'_{ij},$$

即 $M \otimes {}_R N$ 中的元素总形如 $\sum_{i=1}^{t} m_i \otimes n_i$，其中 $m_1, \cdots, m_t \in M, n_1, \cdots, n_t \in N$。

例 1　(1)对张量 $M \otimes {}_R N$ 中的元素 $m \otimes n$ 而言，$m \otimes n = 0$ 无法推出 $m = 0$ 或 $n = 0$。例如取 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbb{k} & \mathbb{k} \\ 0 & \mathbb{k} \end{pmatrix}$ 是域 $\mathbb{k}$ 上的 2×2 的上三角矩阵代数，易见，在同构意义下，R 上有3个不可分解右 $\boldsymbol{R}$-模

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{k} & \mathbb{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{k} \end{pmatrix} \cong \boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{M}_1/\boldsymbol{M}_2$$

以及3个不可分解左 R-模

$$\begin{pmatrix} \mathbb{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \boldsymbol{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{k} \\ 0 & \mathbb{k} \end{pmatrix}, \boldsymbol{N}_2/\boldsymbol{N}_1。$$

考虑 $\boldsymbol{M}_1/\boldsymbol{M}_2 \otimes_R \boldsymbol{N}_2/\boldsymbol{N}_1$。注意 $\boldsymbol{M}_1/\boldsymbol{M}_2$ 和 $\boldsymbol{N}_2/\boldsymbol{N}_1$ 中的元素分别是形如 $\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{M}_2$ 和 $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & v \end{pmatrix} + \boldsymbol{N}_1$ 和的陪集，于是 $\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & v \end{pmatrix} + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{N}_1$。注意，作为集合，$\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{M}_1/\boldsymbol{M}_2 \otimes_R \boldsymbol{N}_2/\boldsymbol{N}_1$（作为 $\mathbb{k}$-向量空间）中的零向量 $\boldsymbol{0}_{M_1/M_2 \otimes_R N_2/N_1}$，且 $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{0}$。因此，上式等于 $\begin{pmatrix} 0 & xu + yv \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}_{M_1/M_2 \otimes_R N_2/N_1}$。然而，在 $\boldsymbol{M}_1/\boldsymbol{M}_2$ 和 $\boldsymbol{N}_2/\boldsymbol{N}_1$ 中，m 和 n 都不是零元素。

(2)注意(1)中的 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的任意性，可知 $\boldsymbol{M}_1/\boldsymbol{M}_2 \otimes_R \boldsymbol{N}_2/\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{0}$。

1.2　零张量因子

本节引入零张量因子的概念。

定义 1　设 R 是环。如果存在有限生成右 R-模 $M = M_R \neq 0$ 和有限生成左 R-模 $N = {}_R N \neq 0$，使得 $M \otimes {}_R N = 0$，则称 M 和 N 是环 R 的强零张量因子(strong zero-tensor-divisor)。如果环 R 没有强零张量因子(即对任意的有限生成右 R-模 M 和左 R-模 N，$M \otimes {}_R N = 0$ 蕴含 $M = 0$ 或者 $N = 0$)，则称 R 是无强零张量因子环；反之称为含强零张量因子环。

注记　文献[1]第2章的命题 2.45 给出了张量的具体构造方式。

例 2　(1)域是无强零张量因子环。考虑域 $\mathbb{F}$ 上的任意2个有限生成 $\mathbb{F}$-模 V 和 W，有 $\mathbb{F}$-线性同构 $V \cong \mathbb{F}^v$ 以及 $W \cong \mathbb{F}^w$，其中 $v, w \in \mathbb{N}_+$。于是 $V \otimes_{\mathbb{F}} W \cong \mathbb{F}^{vw}$。显然，$V \otimes_{\mathbb{F}} W = 0$ 当且仅当 $vw = 0$，所以 $V = 0$ 或 $W = 0$。

(2)类似于(1)，可以证明无零因子环一定是无强零张量因子环。

定义 2　设 R 是环。如果存在有限生成右 R-模 $M = M_R \neq 0$ 和有限生成左 R-模 $N = {}_R N \neq 0$，使得存在 M, N 中的非零元素 m, n，有 $m \otimes n \in M \otimes {}_R N$ 等于0，则称 M 和 N 是环 R 的弱零张量因子(weak zero-tensor-divisor)。如果环 R 没有弱零张量因子(即对任意的有限生成右 R-模 M 和左 R-模 N，如果 $m \otimes n \in M \otimes {}_R N = 0$，则 $m = 0$ 或者 $n = 0$)，则称 R 是无弱零张量因子环；反之称为含弱零张量因子环。

例 3　(1)取 R 是例1(1)中给定的上三角矩阵代数。在例1(1)中在非零右 R-模 M_1/M_2 和非零左 R-模 N_2/N_1 中构造了2个非零元素，其张量为零，由此可知 R 是含弱零张量因子环。在例1(2)中进一步指出了构造具备任意性，从而得到 $M_1/M_2 \otimes {}_R N_2/N_1 = 0$。由此可见 R 也是含强零张量因子环。

(2)无弱零张量因子环是无零因子环。事实上，反设无弱零张量因子环 R 含有零因子 $r_1 \neq 0$ 和 $r_2 \neq 0$，则 R 作为自身上的右-R 模和左 R-模时，有 $0 = r_1 \otimes r_2 \in R \otimes {}_R R$。然而，同构 $\sigma: R \otimes {}_R R \xrightarrow{\cong} R$，$\sigma(r \otimes r') = rr'$ 指出 $0 = \sigma(r_1 \otimes r_2) = r_1 r_2$。这就构造了非零右-$R$ 模 R_R 和非零左 R-模 ${}_R R$，使得 $R \otimes {}_R R$ 中有弱零张量因子，进而与假设矛盾。

命题 1　含强零张量因子环一定是含弱零张量因子环。

证明　设 R 是含是强零因子环，则存在有限生成右 R-模 $M = M_R \neq 0$ 和有限生成左 R-模 $N = {}_R N \neq 0$，使得 $M \otimes {}_R N = 0$。由 $M \neq 0$ 和 $N \neq 0$ 可知存在 $0 \neq m \in M$ 和 $0 \neq n \in N$，使得 $m \otimes n \in M \otimes {}_R N = 0$，即 $m \otimes n = 0$。这说明 R 是含弱零张量因子环。

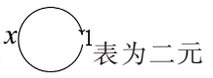
注记　事实上，根据例4和例2(2)，可知无弱零张量因子环是无强零张量因子环。该结论是命题1的逆否命题。

命题 2　设 $\mathbb{k}$ 是域，$R = \mathbb{k}[x]$ 是 $\mathbb{k}$ 上的一元多项式环。

(1)R 是含弱零张量因子环。

(2)进一步地，如果 $\mathbb{k}$ 是代数闭域，则 R 是无强零张量因子环。

证明　本证明中令 $\mathbb{k}$ 是域，并令 $R = \mathbb{k}[x]$ 是 $\mathbb{k}$ 上的一元多项式环。则任意有限生成的 R-模 V 是有

限维$\Bbbk$-向量空间,其可以通过箭图表为二元组$(V\cong {}_{\Bbbk}\Bbbk^m,\boldsymbol{\Phi}_x\in \mathrm{Mat}_m(\Bbbk))$,其中,记号"$\cong {}_{\Bbbk}$"表示作为$\Bbbk$-向量空间的同构,$\mathrm{Mat}_m(\Bbbk)$表示域$\Bbbk$上的$m$阶方阵构成的全矩阵环,右$R$-作用$\Bbbk^m\times R\to\Bbbk^m$由$\boldsymbol{v}\cdot x:=\boldsymbol{\Phi}_x(\boldsymbol{v})$给出。

(1)考虑二元组$(\Bbbk^m,\boldsymbol{J}_m(\lambda))$和$(\Bbbk^n,\boldsymbol{J}_n(\mu))$,其中,$\boldsymbol{J}_t(\lambda)$表示$t\times t$的特征值$\lambda$的Jordan块(假定是上Jordan块),且$m\geqslant n$。则$\boldsymbol{J}_m(\lambda)$有(极小的)零化多项式$\mathrm{m}_{\boldsymbol{J}_m(\lambda)}(x)=(x-\lambda)^m$。由$m\geqslant n$可知$\mathrm{m}_{\boldsymbol{J}_m(\lambda)}(x)$不是$\boldsymbol{J}_n(\mu)$的零化多项式。因此,对$\mathrm{m}_{\boldsymbol{J}_m(\lambda)}(x)\in R$以及任意的$0\neq w\in\Bbbk^n$,有$\boldsymbol{0}\neq \mathrm{m}_{\boldsymbol{J}_m(\lambda)}(x)\cdot\boldsymbol{w}=\mathrm{m}_{\boldsymbol{J}_m(\lambda)}(\boldsymbol{J}_n(\mu))\cdot(\boldsymbol{w})\in\Bbbk^n$。任取$0\neq v\in\Bbbk^m$,得

$$\boldsymbol{v}\otimes(\mathrm{m}_{\boldsymbol{J}_m(\lambda)}\cdot\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{m}_{\boldsymbol{J}_m(\lambda)})\otimes\boldsymbol{w}=$$
$$(\mathrm{m}_{\boldsymbol{J}_m(\lambda)}(\boldsymbol{J}_m(\lambda))\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w}=0\otimes\boldsymbol{w}=0。$$

这样构造了R的弱零张量因子$0\neq v\in\Bbbk^m$和$0\neq \mathrm{m}_{\boldsymbol{J}_m(\lambda)}(x)\cdot\boldsymbol{w}\in\Bbbk^n$。

(2)当$\Bbbk$是代数闭域时,注意任意$m\times m$的矩阵$\boldsymbol{\Phi}\in\mathrm{Mat}_m(\Bbbk)$可以相似于Jordan标准型,因此有限生成的不可分解R-模对应的箭图表示总是形如$(\Bbbk^m,\boldsymbol{J}_m(\lambda))$。任取2个非零箭图表示$(k^m,\boldsymbol{J}_m(\lambda))$和$(\Bbbk^n,\boldsymbol{J}_n(\mu))$,其给定了2个不可分解$R$-模$k^m$和$k^n$。下面证明$\Bbbk^m\otimes_R\Bbbk^n\neq 0$。

设$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m$是$\Bbbk^m$的标准正交基,$\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n$是$\Bbbk^n$的标准正交基。则有右$R$-模同构

$$\sigma\colon \Bbbk^m\xrightarrow{\cong_R}\sum_{i\leqslant m-1}\Bbbk x^i=\Bbbk\varepsilon_1+\Bbbk x+\cdots+\Bbbk x^{m-1},$$
$$\sum_{t=1}^m k_t\boldsymbol{e}_t\mapsto(\lambda k_1+k_2)\varepsilon_1+\cdots+(\lambda k_{m-1}+k_m)x^{m-2}+\lambda k_m x^{m-1}$$

以及左R-模同构

$$\tau\colon \Bbbk^n\xrightarrow{\cong_R}\sum_{j\leqslant n-1}\Bbbk x^j=\Bbbk\varepsilon_1+\Bbbk x+\cdots+\Bbbk x^{n-1},$$
$$\sum_{t=1}^n k_t\boldsymbol{f}_t\mapsto(\mu k_1+k_2)\varepsilon_1+\cdots+(\mu k_{n-1}+k_n)x^{n-2}+\mu k_n x^{n-1}。$$

于是,

$$\Bbbk^m\otimes_R\Bbbk^n\cong\left(\sum_{i\leqslant m-1}\Bbbk x^i\right)\otimes_R\left(\sum_{j\leqslant n-1}\Bbbk x^j\right)=$$
$$\sum_{\substack{i\leqslant m-1\\ j\leqslant n-1}}\Bbbk x^i\otimes x^j=\sum_{\substack{i\leqslant m-1\\ j\leqslant n-1}}\Bbbk x^{i+j}x\neq 0。$$

因此,对任意非零的有限生成R-模V和W,有形如$\Bbbk^m$和$\Bbbk^n$的非零直和项(其作为R-模,R-作用由Jordan块诱导),满足$\Bbbk^m\otimes_R\Bbbk^n\neq 0$,从而$V\otimes_R W$非零。

2　代数的零张量因子性

设$A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$是有限维的基本$k$-代数($\mathcal{Q}$是连通箭图,$\mathcal{I}$是admissible理想),$M_A$和${}_AN$分别是有限生成的右$A$-模和左$A$-模。则根据唯一分解定理,可设二者的完全直和分解分别为$M\cong\bigoplus_{i=1}^m M^{(i)}$和$N\cong\bigoplus_{j=1}^n N^{(j)}$。则

$$M\underset{A}{\otimes}N\cong\left(\bigoplus_{i=1}^m M^{(i)}\right)\underset{A}{\otimes}\left(\bigoplus_{j=1}^n N^{(j)}\right)\cong\bigoplus_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\left(M^{(i)}\underset{A}{\otimes}N^{(j)}\right)。$$

显见$M\underset{A}{\otimes}N=0$当且仅当$M^{(i)}\underset{A}{\otimes}N^{(j)}=0$。因此,对张量$M\underset{A}{\otimes}N$的研究,转变为对$A$上的右不可分解模和左不可分解模的张量的研究。本节对张量的讨论始假设为是对不可分解模的张量展开的。

2.1　有限维代数的含/无强零张量因子性

接下来给一个引理,该引理指出:在满足特定条件时,$(\mathcal{Q},\mathcal{I})$的子箭图$(\mathcal{Q}',\mathcal{I}'=0)$的表示可以自然地视为$(\mathcal{Q},\mathcal{I})$的表示。为此,先引入求和分量的概念。令$\sum_{i\in I}k_i\wp_i\in\mathcal{I}$是$\mathcal{I}$的一个生成元,其中,$I$是指标集,$k_i\in\Bbbk$,对任意$i,j\in I$,$\mathfrak{s}(\wp_i)=\mathfrak{s}(\wp_j)$和$\mathfrak{t}(\wp_i)=\mathfrak{t}(\wp_j)$成立。则$\sum_{i\in I}k_i\wp_i$的去系数求和分量(decoefficient component,简称求和分量)指的是其作为$k\mathcal{Q}$中向量时的非零求和项$k_i\wp_i$所对应的基向量$\wp_i$。

引理1　设有限维代数$A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$的箭图$\mathcal{Q}$包含$\mathbb{A}_n$型子箭图$\mathcal{Q}\backsimeq 1\xrightarrow{\alpha_1}2\xrightarrow{\alpha_2}\cdots\xrightarrow{\alpha_{n-1}}n$,使得对任意$\mathcal{I}$的生成元$\sum_{i\in I}k_i\wp_i$(其中$I$是指标集,且$\mathfrak{s}(\wp_i)=\mathfrak{s}(\wp_j)$和$\mathfrak{t}(\wp_i)=\mathfrak{t}(\wp_j)$对$i\neq j$始终成立),$\wp=\alpha_1\cdots\alpha_n$的任意子路径始终不是$\sum_{i\in I}k_i\wp_i$的求和分量。则存在$\Bbbk$-范畴的嵌入

$$_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}\colon\Bbbk\mathcal{Q}'-\mathrm{mod}\to A-\mathrm{mod}以及$$
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}\colon\mathrm{mod}-\Bbbk\mathcal{Q}'\to\mathrm{mod}-A,$$

该嵌入自然地将左/右$\Bbbk\mathcal{Q}'$-模视作左/右A-模。

证明　由假设可知对任意$1\leqslant\iota<\jmath\leqslant n$,$\mathcal{Q}'_{[\iota,\jmath]}=\iota\xrightarrow{\alpha_\iota}\cdots\xrightarrow{\alpha_{\jmath-1}}$上的路径$\wp_{[\iota,\jmath]}=\alpha_\iota\cdots\alpha_{\jmath-1}$不是$\mathcal{I}$的任何生成元的求和分量,因此对任意非零右$\Bbbk\mathcal{Q}'$-模$M$,定义$\hat{M}$是满足

$$\dim_{\Bbbk}\hat{M}\varepsilon_t=\begin{cases}\dim_{\Bbbk}M\varepsilon_t, & 如果t\in\mathbb{N}_{[\iota,\jmath]},\\ 0, & 其他情形,\end{cases}$$

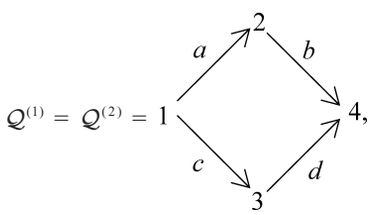
以及

$$\varphi_\alpha\colon\hat{M}\varepsilon_s\to\hat{M}\varepsilon_t,m\varepsilon_s\mapsto\varphi_\alpha(m\varepsilon_t)=$$
$$\begin{cases}\varphi_{\alpha_t}(m\varepsilon_t), & 如果\alpha=\alpha_t(\iota\leqslant t\leqslant\jmath),\\ 0, & 其他情形\end{cases}$$

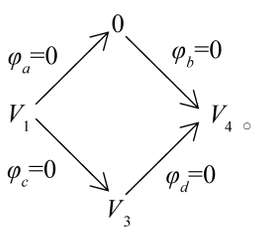
的$(\sharp\mathcal{Q}_0+\sharp\mathcal{Q}_1)$-元组$(\hat{M}\varepsilon_t,\alpha)_{t\in\mathcal{Q}_0,\alpha\in\mathcal{Q}_1}$,作为$\Bbbk$-向量空

间的直和 $\bigoplus\limits_{t\in\mathcal{Q}_0}\hat{M}\varepsilon_t=\bigoplus\limits_{t\leqslant t\leqslant}\hat{M}\varepsilon_t$（仍记作 $\hat{M}$）按上述条件自然诱导了一个右 $\Bbbk\mathcal{Q}$-作用 $\hat{M}\times k\mathcal{Q}\to\hat{M}$，于是 $\hat{M}$ 是一个右 $\Bbbk\mathcal{Q}$-模。对任意 $\sum_{i\in I}k_i\wp_i\in\mathcal{I}$，记 $\wp_i=\alpha_i^{(\ell_i)}\alpha_i^{(\ell_i-1)}\cdots\alpha_i^{(1)}$，$k$-线性映射 $\varphi_{\sum_{i\in I}k_i\wp_i}:=\sum_{i\in I}k_i\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i)}}\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i-1)}}\cdots\varphi_{\alpha_i^{(1)}}$ 为0。否则，存在某个指标集 I 以及该指标集的某个元素 i，使得 $\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i)}}\varphi_{\alpha_i^{(\ell_i-1)}}\cdots\varphi_{\alpha_i^{(1)}}:M\varepsilon_{\mathfrak{s}(\alpha_i^{(1)})}\to M\varepsilon_{\mathfrak{t}(\alpha_i^{(\ell_i)})}$ 非0，这意味着 $\wp_i$ 只能是 $\wp_{[i,J]}$ 的某条子路径。这与已知条件矛盾。因此右 $\Bbbk\mathcal{Q}$-作用 $\hat{M}\times\Bbbk\mathcal{Q}\to\hat{M}$ 同时也是右 A-作用 $\hat{M}\times A\to\hat{M}$。这就诱导了一个函子 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}$: mod－$\Bbbk\mathcal{Q}'\to$ mod－A，满足 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(M)=\hat{M}$。该函子自然地将 mod－$\Bbbk\mathcal{Q}'$ 视作了 mod－A 的一个满子范畴，因而是 $\Bbbk$-范畴之间的嵌入。对于左模情形的证明与右模情形的证明对偶。

例4　设 $A^{(i)}=k\mathcal{Q}^{(i)}/\mathcal{I}^{(i)}$，其中 $i=1,2$，



$\mathcal{I}^{(1)}=ab$，$\mathcal{I}^{(2)}=ab-cd$。对于 $A^{(1)}$，其箭图有一个 $\mathbb{A}_3$ 型子箭图 $\mathcal{Q}'=1\xrightarrow{c}3\xrightarrow{d}4$。对于任意右 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-模 M，设 M 对应的箭图表示为 $V_1\xrightarrow{\varphi_c}V_3\xrightarrow{\varphi_d}V_4$，其中 V_t 是 $\Bbbk$-向量空间，维数 $\dim V_t=\dim_{\Bbbk}M\varepsilon_t$（$t=1,3,4$）。则 M 自然地被看作右 $A^{(1)}$-模 $\hat{M}=V_1\oplus 0\oplus V_2\oplus V_4$，其对应的表示为



但是 M 不能被看作右 $A^{(2)}$-模，这是因为由 $A^{(2)}$ 的定义，可知 $ab-cd\in\mathcal{I}^{(2)}$，这蕴含了 $\varphi_b\varphi_a-\varphi_d\varphi_c=0$。然而对于 M 所诱导的向量空间 $\hat{M}$ 而言，右 $A^{(2)}$-作用未必能保证交换性 $\varphi_b\varphi_a=\varphi_d\varphi_c$。

引理2　设有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 包含 $\mathbb{A}_2$ 型子箭图。则 A 是含强零张量因子代数。

证明　本证明将构造2个非零的不可分解模 $M=M_A\in\mathrm{ind}(A-\mathrm{mod})$ 以及 $N={}_AN\in\mathrm{ind}(\mathrm{mod}-A)$，使得 $M\otimes_A N=0$。记 $\mathcal{Q}$ 包含的 $\mathbb{A}_2$ 型子箭图为 $\mathcal{Q}'=v\xrightarrow{\alpha}w$。考虑右 $k\mathcal{Q}'$-内射模 $E(v)_{k\mathcal{Q}'}=\mathrm{Hom}_{\Bbbk}((k\mathcal{Q}')\varepsilon_v,\Bbbk)\cong\Bbbk\varepsilon_v$ 和左 $\Bbbk\mathcal{Q}'$-内射模 ${}_{\Bbbk\mathcal{Q}'}E(w)=\mathrm{Hom}_{\Bbbk}((\Bbbk\mathcal{Q}')\varepsilon_w,\Bbbk)\cong\Bbbk\varepsilon_w$。有

$$E(v)\otimes_{\Bbbk\mathcal{Q}'}E'(w)\cong\Bbbk\varepsilon_v\otimes_{\Bbbk\mathcal{Q}'}\Bbbk\varepsilon_w=\Bbbk(\varepsilon_v\otimes_{\Bbbk\mathcal{Q}'}\varepsilon_w)=0。$$

由引理1中的函子 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}$: mod－$\Bbbk\mathcal{Q}'\to$ mod－A 以及 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}$: $\Bbbk\mathcal{Q}'-\mathrm{mod}\to A-\mathrm{mod}$，构造了右 A-模 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))$ 和左 A-模 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$。由于 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}$ 和 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}$ 是嵌入，可知 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))$ 和 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$ 都是非零的。下面证明 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))\otimes_A\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))=0$。注意在 $\mathrm{ind}(A-\mathrm{mod})$ 中，${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$ 同构于 $v\in\mathcal{Q}_0$ 对应的单模 ${}_AS(v)$，即

$${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))\cong{}_AS(v)\cong{}_AP(v)/\mathrm{rad}({}_AP(v))\cong\Bbbk\varepsilon_v\oplus\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{t}(\rho)=v}}\Bbbk\wp\Big/\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{t}(\rho)=v}}\Bbbk\wp$$

（注意左 A-投射模 ${}_AP(v)=A\varepsilon_v$ 由以 v 结尾的路径决定）。

同理，

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))\cong S(w)\cong P(w)/\mathrm{rad}P(w)\cong\Bbbk\varepsilon_w\oplus\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{s}(\rho)=w}}\Bbbk\wp\Big/\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{s}(\rho)=w}}\Bbbk\wp$$

（注意右 A-投射模 $P(w)_A=\varepsilon_wA$ 由以 w 开始的路径决定）。

从而，作为 $\Bbbk$-向量空间而言，利用张量的运算性质，有如下同构：

$${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))\otimes_A\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))\cong{}_{\Bbbk}\Big(\Bbbk\varepsilon_v\oplus\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{t}(\rho)=v}}\Bbbk\wp\Big/\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{t}(\rho)=v}}\Bbbk\wp\Big)\otimes_A\Big(\Bbbk\varepsilon_w\oplus\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{s}(\rho)=w}}\Bbbk\wp\Big/\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{s}(\rho)=w}}\Bbbk\wp\Big)=$$

$$\Big(\Bbbk\varepsilon_v\oplus\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{t}(\rho)=v}}\Bbbk\wp\Big)\otimes_A\Big(\Bbbk\varepsilon_w\oplus\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{s}(\rho)=w}}\Bbbk\wp\Big)\Big/\Big\langle\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{t}(\rho)=v}}\Bbbk\wp,\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{s}(\rho)=w}}\Bbbk\wp\Big\rangle=$$

$$\Big(\Bbbk\varepsilon_v\otimes_A\Bbbk\varepsilon_w\Big)\Big/\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{t}(\rho)=v}}\Big\langle\Bbbk\wp,\bigoplus_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{s}(\rho)=w}}\Bbbk\wp\Big\rangle\cong$$

$${}_{\Bbbk}\Bbbk\varepsilon_v\otimes_A\Bbbk\varepsilon_w=0。$$

注意 $\bigoplus\limits_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{t}(\rho)=v}}(\Bbbk\wp\otimes\Bbbk\varepsilon_w)=0$，$\bigoplus\limits_{\substack{\rho\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{s}(\rho)=w}}(\Bbbk\varepsilon_v\otimes\Bbbk\wp)=0$ 以及 $\bigoplus\limits_{\substack{\rho_1,\rho_2\in\mathcal{Q}_{\geqslant 1}\\ \mathfrak{t}(\rho_1)=w,\ \mathfrak{t}(\rho_2)=v}}(\Bbbk\wp_1\otimes\Bbbk\wp_2)=0$。由此可见 A 有强零张量因子 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{emb}}(E(v))$ 和 ${}_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}(E'(w))$。

根据引理2，立刻得到下述推论。

推论1　设 $\mathcal{Q}$ 是连通箭图且包含至少2个顶点。则有限维代数 $A=k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是含强零张量因子代数。

证明　由箭图的连通性可知存在2个顶点 v 和 w，二者被某个箭向 α 相连。而 v、w 和 α 诱导了 $\mathcal{Q}$ 的 $\mathbb{A}_2$ 型子箭图，由引理2，可知推论成立。

引理3　设有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 包

含 loop $\mathcal{C}=$,且存在正整数 ω,使得 $\alpha^{\omega}\notin\mathcal{I}$。则存在 $\Bbbk$-范畴的嵌入

$$_{\mathrm{emb}}\boldsymbol{F}^{o}:\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle\text{ - mod}\to A\text{ - mod}\text{以及}$$

$$\boldsymbol{F}^{o}_{\mathrm{emb}}:\text{mod - }\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle\to\text{ mod - }A,$$

该嵌入自然地将左/右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle$-模视作左/右 A -模。

证明　任意右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle$-模的箭图表示是二元组 (V,φ_{a}),其中 V 是 k-向量空间,右 $\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle$-作用由 k-线性变换 $\varphi_{a}\in\mathrm{End}_{k}V$ (其中,$\varphi_{a}^{\omega}=0$) 按照 $V\times\Bbbk\mathcal{C}/\langle\alpha^{\omega}\rangle\to V, v\alpha:=\varphi_{a}(v)$ 给出。取 $\hat{V}:=\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{Q}_{0}}V_{i}$,其中 $V_{i}=V$,如果 $i=1$;否则,即 $i\in\mathcal{Q}_{0}\setminus\{1\}$ 时,取 $V_{i}=0$。则 $(\hat{V},\widehat{\varphi_{a}})_{a\in\mathcal{Q}_{1}}$ 决定了 $\hat{V}$ 是一个右 A-模,其中,

$$\widehat{\varphi_{a}}=\begin{cases}\varphi_{\alpha}, & a=\alpha;\\ 0, & \text{其他情形。}\end{cases}$$

取 $\boldsymbol{F}^{o}_{\mathrm{emb}}(V)\cong\hat{V}$,则 $\boldsymbol{F}^{o}_{\mathrm{emb}}$ 自然地将每一个右 $\Bbbk\mathcal{C}/\alpha^{\omega}$-模看成了右 A-模,易见 $\boldsymbol{F}^{o}_{\mathrm{emb}}$ 诱导了一个 $\Bbbk$-范畴的嵌入。

注意上述证明无需讨论 α^{ω} 是否是 $\mathcal{I}$ 的生成元的求和分量。事实上,如果存在 $\sum_{i\in I}k_{i}\wp_{i}\in\mathcal{I}$ (其中 $\mathfrak{s}(\wp_{i})=\mathfrak{t}(\wp_{i})=1$),使得 $\alpha^{\omega}=\wp_{j}(j\in I)$,仍然考虑引理 3 的证明中所构造的 $(\hat{V},\widehat{\varphi_{a}})_{a\in\mathcal{Q}_{1}}$,此时 $\varphi_{\sum_{i\in I}k_{i}\wp_{i}}=\sum_{i\in I}k_{i}\varphi_{\wp_{i}}=0$ 是自然成立的,因此 $(\hat{V},\widehat{\varphi_{a}})_{a\in\mathcal{Q}_{1}}$ 仍是右 A-模。如果 α^{ω} 不是任何 $\mathcal{I}$ 的生成元的求和分量,则引理 3 成立的理由与引理 1 一致。特别地,以 $\omega=2$ 的情形作为 1 个例子:$\Bbbk\mathcal{C}/\alpha^{2}$ 上的不可分解右模只有单模 $S(1)$ 和投射-内射模 $P(1)\cong E(1)$。其对应地看成右 A-模,则分别是右 A-单模 $S(1)_{A}$ 和不可分解右 A-模 $\Bbbk\varepsilon_{1}+\Bbbk\alpha$。在这个观点下,引理 3 是明确的。

引理 4　设有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 是 loop。则 A 是无强零张量因子代数。

证明　设 $\mathcal{Q}=$,则 $A\cong\Bbbk[x]/\mathcal{I}$。因此任意左/右 A-模自然地也是左/右 $\Bbbk[x]$-模,即,存在 k-范畴的嵌入函子 $\boldsymbol{F}$: mod-$A\to$ mod-$\Bbbk[x]$。任取非零的有限生成右 A-模 M 和左 A-模 N,由 A 是交换代数,自然地有 $M\otimes_{A}N$ 也是右 A-模。加之 $\boldsymbol{F}$ 是嵌入,因此 $\boldsymbol{F}(M)\neq0$ 且 $\boldsymbol{F}(N)\neq0$。故根据命题 2,$\Bbbk[x]$ 是无强零张量因子环,于是得 $\boldsymbol{F}(M\otimes_{A}N)=\boldsymbol{F}(M)\otimes_{\Bbbk[x]}\boldsymbol{F}(N)\neq0$。再次利用 $\boldsymbol{F}$ 是嵌入,得 $M\otimes_{A}N\neq0$。

推论 2　设 $\mathcal{Q}$ 是包含 loop 的箭图(可以是非连通箭图)。则有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是无强零张量因子代数当且仅当 $\mathcal{Q}$ 自身是 loop。

证明　引理 4 给出了充分性"$\Leftarrow$",引理 2 给出了必要性"$\Rightarrow$"。

定理 1　设非单的有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图是连通箭图,且该箭图只包含至多 1 个 loop。则 A 是无强零张量因子代数当且仅当 A 同构于一元多项式环的商 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$(其中,$\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 都是 admissible 理想)。

证明　设 A 无强零张量因子,则由推论 1,A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 只含有一个顶点,记此顶点为 1。此时必有 $\mathcal{Q}=$。因此,$A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}\cong\Bbbk[x]/\mathcal{I}$,这里取 $\mathcal{J}=\mathcal{I}$。反之,若 $A\cong\Bbbk[x]/\mathcal{J}$,则由 $\mathcal{J}$ 是 admissible 理想,可知 A 的箭图是一个 loop。根据推论 2,A 没有强零张量因子。

2.2　有限维代数的含/无弱零张量因子性

本节将考虑代数的弱零张量因子。在 2.1 节中指出连通的有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图如果含有至多 1 个 loop,则 A 含强零张量因子当且仅当 A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 不是 loop(见定理 1)。因此,根据命题 1,立刻有下面结果。

推论 3　如果连通的有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的箭图 $\mathcal{Q}$ 不是 loop,A 必定含有弱零张量因子。

下面命题考虑了 A 的箭图 $\mathcal{Q}$ 是 loop 的情形,此时 A 同构于 $\Bbbk[x]$ 的商 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$,由 $\sharp\mathcal{Q}_{0}=1$ 可知 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 有唯一的不可分解投射左/右 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$-模 $P=\varepsilon_{1}A$。利用 P 指出此时的 A 依然含有弱零张量因子。

命题 3　有限维代数 $A=\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 是含弱零张量因子代数。注:此命题不要求域 $\Bbbk$ 是代数闭的。

证明　首先,A 有唯一的不可分解投右/左 A-射模 $P=\varepsilon_{1}A\cong{}_{A}\sum\limits_{i=0}^{t-1}\Bbbk x^{i}\cong{}_{\Bbbk}A\varepsilon_{1}=A$。则张量 $\varepsilon_{1}A\otimes_{A}A\varepsilon_{1}$ 可通过如下同构约化为

$$\sigma:\varepsilon_{1}A\otimes_{A}A\varepsilon_{1}=A\otimes_{A}A\xrightarrow{\cong}A。$$

注意到 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 是主理想整环,所以存在 $f(x)=k_{2}x^{2}+k_{3}x^{3}+\cdots+k_{t}x^{t}\in\Bbbk[x]$ $(t\geqslant2)$,使得 $\mathcal{J}=f(x)$。所以 $f(x)$ 存在一个形如 $f(x)=x\varphi(x)$ 的分解,其中 $\varphi(x)$ 是域 $\Bbbk$ 上的 $t-1$ 次多项式。显然,在代数 $\Bbbk[x]/\mathcal{J}$ 中,$x\neq0$ 且 $\varphi(x)\neq0$,但 $f(x)=x\varphi(x)\in\mathcal{J}=\langle f(x)\rangle$。这就构造了张量 $\varepsilon_{1}A\otimes_{A}A\varepsilon_{1}$ 中的元素 $x\otimes\varphi(x)$,使得 $\sigma(x\otimes\varphi(x))=x\varphi(x)\overset{\text{在}\Bbbk[x]/\mathcal{J}\text{中}}{=\!=\!=\!=\!=}0$,进

而得到$x \otimes \varphi(x) \overset{在A中}{===} 0$。

由推论3和命题3，得到下面定理。

定理2　有限维代数总是含弱零张量因子代数。

3　主要结论

下面给出本文的主要结论。

定理3　设𝕜-代数$A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$非单，其箭图连通且只包含至多1个loop。

（1）如果A是有限维代数，则下面论述等价：

（a）A是含强零张量因子代数；

（b）$\sharp\mathcal{Q}_0 \geqslant 2$；

（c）$\mathcal{Q}$或者包含1个loop为真子箭图，或者不含loop。

（2）如果A是无弱零张量因子代数，则A是无限维代数。

证明　（1）（a）⇒（b）：反设A的箭图$\mathcal{Q}$只有一个顶点，则$\mathcal{Q}$只能是1个loop，根据定理1，A无强零张量因子，矛盾。（b）⇒（c）：由$\mathcal{Q}$包含至多1个loop可知此为显然的。（c）⇒（a）：如果$\mathcal{Q}$不含loop，或者$\mathcal{Q}$包含loop并以此loop为真子箭图，均可知$\mathcal{Q}$不是loop，自然地，在同构意义下，A不是形如$\Bbbk[x]/\mathcal{J}$形式的代数。根据定理1，可知A含强零张量因子。

（2）取定理2的逆否命题即可。

注意　非单且无弱零张量因子代数是存在的，见例5。

例5　考虑多项式环$A = \Bbbk[x_i | i \in \mathbb{N}]$，并任取多项式$f(x_1, \cdots, x_m) \in A$和$g(x_1, \cdots, x_n) \in A$使得

$$f(x_1,\cdots,x_m)g(x_1,\cdots,x_n) = 0,$$

则由𝕜是域可知A是无零因子环，进而有$f(x_1, \cdots, x_m) = 0$或者$g(x_1, \cdots, x_n) = 0$。注意对于一般的多项式环$R[x_i | 1 \leqslant i \leqslant n]$（$n \in \mathbb{N}$）（$R$是环），上式未必能使得$f(x_1, \cdots, x_m) = 0$或者$g(x_1, \cdots, x_n) = 0$。例如，取$R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$，$n = 2$，并令$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 + 3x_1x_2 \neq 0$，　$g(x_1, x_2) = 2x_1 \neq 0$。则$f(x_1, x_2)g(x_1, x_2) = 0$。

志谢　感谢张亚峰老师为本文提出的一些修改意见。

参 考 文 献

[1] HERSCHEND M. Tensor products on quiver representations [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2008, 1(212): 452-469.

[2] HERSCHEND M. Solution of the Clebsch-Gordan problem for Kronecker representations [D]. Uppsala: Uppsala University, 2003.

[3] HERSCHEND M. Solution to the Clebsch-Gordan problem for representations of quivers of type A_n [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2005, 4(5): 481-488.

[4] HERSCHEND M. Galois coverings and the Clebsch-Gordon problem for quiver representations [J]. Colloquium Mathematicum, 2007, 109(2): 193-215.

[5] MARTSINKOVSKY A, VLASSOV A. The representation ring of $k[x]$ [EB/OL]. [2023-9-29]. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16719927.

[6] 鲍炎红. 张量积代数与遗传代数表示理论中的箭图方法[D]. 合肥：安徽大学，2010.

[7] 刘雨喆，张亚峰. $\mathbb{A}$型代数的多重张量代数表示有限的充分必要条件[J]. 中国科学(数学)，2024，54(1)：25-38.

[8] BUCHWEITZ R O, GREEN E L, MADSEN D, et al. Finite hochschild cohomology without finite global dimension [J]. Mathematical research letters, 2005, 12: 805-816.

[9] HAPPEL D. Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras [EB/OL]. (2006-01-01) [2023-09-26]. https://doi.org/10.1007/BFb0084073.

[10] HU W, LUO X H, XIONG B L, et al. Gorenstein projective bimodules via monomorphism categories and filtration categories [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2019, 233(3): 1014-1039.

[11] HOCHSCHILD G. On the cohomology groups of an associative algebra [J]. Annals of Mathematics, 1945, 46: 58-67.

[12] MAHDOU N, TAMEKKANTE M. On Gorenstein global dimension of tensor product of algebras over a field [J]. Gulf Journal of Mathematics, 2015, 3: 30-37.

[13] ROTMAN J J. An introduction to homological algebra [M]. 2nd ed. New York: Springer, 2009.

（责任编辑：马田田）