DOI：10.19789/j.1004-9398.2025.04.007
文献引用：庄淑颖，赵慧．多体量子系统的真纠缠度量[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2025，46（4）：50-55. ZHUANG S Y，ZHAO H. Genuine entanglement measures in multipartite quantum systems [J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2025，46（4）：50-55.

多体量子系统的真纠缠度量*

庄淑颖，赵　慧**
（北京工业大学数学统计力学学院，北京　100124）

摘要：真多体纠缠度量是量子信息理论中重要的研究内容和前沿问题。本文基于并发度构造了多体任意维量子系统中的一种新的真纠缠度量。首先，在四体纯态所有可能的双可分并发度基础上，构造了四体真纠缠度量。若真多体纠缠度量可判别出$|GHZ\rangle$态比$|W\rangle$态更纠缠，则称其为恰当的真多体纠缠度量。然后，通过计算验证了给出的度量不仅是真多体纠缠度量，而且是恰当的真多体纠缠度量。最后，推广了四体真纠缠度量，给出了多体任意维系统中的真纠缠度量。通过实例分析阐述了构造的度量有较好的优越性，不仅可以区分更多的真纠缠，而且可以利用其构造出多种不同形式的真纠缠度量，一些文献的度量构造是本文度量形式的特例。

关键词：真多体纠缠；真多体纠缠度量；并发度
中图分类号：O413　　**文献标志码**：A

Genuine entanglement measures in multipartite quantum systems*

ZHUANG Shuying，ZHAO Hui**
（School of Mathematics，Statistics and Mechanics，Beijing University of Technology，Beijing　100124）

Abstract：Genuine multipartite entanglement measure is an important research content and frontier problem in quantum information theory. In this paper，genuine entanglement measure for arbitrary dimensional multipartite quantum systems is constructed based on concurrence. First，the four-partite genuine entanglement measure on the basis of all possible bipartitions concurrence of the four-partite pure state is constructed. If the genuine multipartite entanglement measure can distinguish that the state $|GHZ\rangle$ is more entangled than the state $|W\rangle$，it is called a proper genuine multipartite entanglement measure. The calculation verifies that the measure given by us is not only a genuine multipartite entanglement measure，but also a proper genuine multipartite entanglement measure. Finally，the four-partite genuine entanglement measure is generalized，and the genuine entanglement measure for the arbitrary dimensional multipartite system is given. By analyzing examples，it is demonstrated that the constructed measure has good advantages. It can not only distinguish more genuine entanglement，but also give many different forms of genuine entanglement measure. Some measure constructed in literature are special cases of the measure forms in this paper.

收稿日期：2024-04-01
*国家自然科学基金项目（12272011）
**通信作者：zhaohui@bjut.edu.cn

Keywords:genuine multipartite entanglement;genuine multipartite entanglement measure;concurrence
CLC:O413 **DC**:A

0 引 言

量子纠缠是现代量子技术不可或缺的基础。随着对量子纠缠理解的深入和相关技术的发展,其应用也越来越广泛,如量子计算[1]、量子密码学[2]、量子隐形传态[3]和量子通信[4]等。在执行各种量子任务时,真多体纠缠作为一类重要的资源,比非真多体纠缠可以有更显著的优势,如在量子多方密钥建立中,可信各方之间提取密钥的协议所输出的私有态必须是真多体纠缠态[5];在计量学任务中,多体纠缠态在线性干涉仪的相位估计方面比可分离态有更好的灵敏度,而研究发现只有输入态为真纠缠态时才可以获得相位估计的最大灵敏度[6]。因此,如何判别量子态是否真纠缠以及区别更多的真纠缠态具有重要研究意义。

目前,已有很多判别真多体纠缠的方法,如贝尔-类不等式[7-8]、纠缠见证[9-10]、相关张量范数[11-12]和真多体纠缠并发度[13-14]等。由于并发度具有良好的性质,近年来利用并发度构造真多体纠缠度量成为研究热点。2011年,任意维多体量子系统的真纠缠并发度被提出,即纯态所有可能的双可分并发度的最小值,经验证其可作为真多体纠缠度量[15];2017年,根据相关张量范数和真多体纠缠并发度之间关系的研究,检测三体系统的真纠缠准则及真多体纠缠并发度的下界被给出[16];2021年,一种新的真三体纠缠度量被提出,即以并发三角形面积的平方根作为真纠缠度量,但此度量在局部操作和经典通信下递增,故不满足定义良好的真多体纠缠度量的条件[17];2022年,纯态双可分并发度的几何平均值可作为真多体纠缠度量的方法被提出[18];同年,并发三角形被推广到任意维三体系统中,利用纠缠度量构成的三角形面积和四面体表面积来构造三体及四体的真纠缠度量的方法被提出,但这种度量在局部操作和经典通信下是否递增还未可知[19];2023年,并发三角形度量的方法被改进,并发三角形的几何平均面积可构成多体系统的真纠缠度量[20];随后,由并发度构成的并发四面体的体积来构造四体系统真纠缠度量的方法被提出,但这个度量推广到高维系统比较复杂[21]。

本文以并发度为基础来构造真多体纠缠度量。首先,根据并发度的性质构造四体纯态的真纠缠度量,并验证了此度量也是恰当的真纠缠度量,通过与其他纠缠度量的对比表明本文构造的度量可以区分更多的真纠缠态。然后,在四体纯态的基础上进行推广,构造任意维多体系统中的真纠缠度量。

1 基础知识

定义1 对于N体纯态$|\psi\rangle\in\mathcal{H}_1^{d_1}\otimes\mathcal{H}_2^{d_2}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N^{d_N}$,其在任意双分割$A|\bar{A}$下的并发度[22-23]为

$$C_{A|\bar{A}}\left(|\psi\rangle\right)=\sqrt{2\left[1-\mathrm{Tr}\left(\rho_A^2\right)\right]}=\sqrt{2\left[1-\mathrm{Tr}\left(\rho_{\bar{A}}^2\right)\right]},\quad(1)$$

式中:$\mathcal{H}^{d_f}$为d_f维的希尔伯特向量空间;A、$\bar{A}$为$|\psi\rangle$双分割后的2个子系统;$\rho_s=\mathrm{Tr}_t\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)$为子系统$s$的约化密度矩阵,$s\neq t\in\left\{A,\bar{A}\right\}$。

定义2 设H_f为d_f维的希尔伯特空间,若N体纯态$|\psi\rangle\in\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N$在$k$分割$A_1|A_2|\cdots|A_k(2\leqslant k\leqslant N)$下能写成$|\psi\rangle=|\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle\otimes\cdots\otimes|\psi_k\rangle$的形式,则称$|\psi\rangle$为$k$可分态。其中$A_i=\mathcal{H}_{j_1^i}\otimes\mathcal{H}_{j_2^i}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{j_{n_i}^i}$,$\bigcup_{i=1}^{k}\{j_1^i,j_2^i,\cdots j_{n_i}^i\}=\{1,2,\cdots N\}$,且$j_1^1\neq\cdots j_{n_1}^1\neq\cdots\neq j_1^k\neq\cdots\neq j_{n_k}^k$,$|\psi_i\rangle$是子系统$A_i$上的量子态。

定义3 若N体纯态$|\psi\rangle\in\mathcal{H}_1^{d_1}\otimes\mathcal{H}_2^{d_2}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N^{d_N}$能写成每个子系统上量子态的张量积,即$|\psi\rangle=|\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle\otimes\cdots\otimes|\psi_N\rangle$的形式,则称$|\psi\rangle$为全可分态,也称为完全乘积态。其中,$|\psi_i\rangle$是子系统$H_i^{d_i}$上的量子态。

定义4 若N体纯态$|\psi\rangle\in\mathcal{H}_1^{d_1}\otimes\mathcal{H}_2^{d_2}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N^{d_N}$在某双分割$A_1|A_2$下能写成$|\psi\rangle=|\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle$的形式,则称$|\psi\rangle$是双可分态。其中,$|\psi_i\rangle$是子系统$A_i$上的量子态。如果$|\psi\rangle$在所有双分割下都不是可分的,则称$|\psi\rangle$为真多体纠缠态。

定义5 任意维多体系统定义良好的真纠缠度量需满足以下3个条件:(a)所有双可分态和完全乘积态的度量值为0;(b)所有非双可分态的度量值>0;(c)度量在局域操作和经典通信下不增。

一个定义良好的真纠缠度量至少需满足条件(a),(b)和(c),有的文献还要求满足凸性和局域幺正变换下不变等条件[15],所以条件(a),(b)和(c)并不是真纠缠度量的充要条件。但很多文献[17-21]只考虑满足这3个条件的真纠缠度量,在本文中,也仅在这3个条件下讨论真纠缠度量。

定义6 若满足条件(a),(b)和(c)的真纠缠度量还满足如下条件:可判别出$|GHZ\rangle$态比$|W\rangle$态更纠缠,则称其为恰当的真纠缠度量[17]。

在三方隐形传态中,$|GHZ\rangle$态可以准确地传送任意单量子比特态,而$|W\rangle$态的能力相对较差[24],在这种意义下,称$|GHZ\rangle$态比$|W\rangle$态更纠缠。若$|GHZ\rangle$态的纠缠度量值大于$|W\rangle$态的纠缠度量值,则说明$|GHZ\rangle$态比$|W\rangle$态更纠缠。

2 四体纯态的真纠缠度量

首先,构造四体纯态的真纠缠度量。对于四体纯态$|\psi\rangle\in H_1^{d_1}\otimes H_2^{d_2}\otimes H_3^{d_3}\otimes H_4^{d_4}$,存在1对3、2对2这2类双分割,记$C_{i|\bar{i}}\in\left\{C_{1|234},C_{2|134},C_{3|124},C_{4|123}\right\}$,$C_{ij|\overline{ij}}\in\left\{C_{12|34},C_{13|24},C_{14|23}\right\}$分别为这2类双分割下的并发度,其中,$i\neq j\in\{1,2,3,4\}$表示$|\psi\rangle$的子系统,$\bar{k}$表示$k$关于$\{1,2,3,4\}$的补集。

并发度具有如下性质:当量子态为可分态时其值为0,为纠缠态时其值>0,且在局域操作和经典通信下不增。因此,基于这3条性质,能以四体纯态$|\psi\rangle$所有可能的双可分并发度作为函数的自变量来构造四体真纠缠度量,简记$f\left(C_{1|234},C_{2|134},\cdots,C_{13|24},C_{14|23}\right)$为$f\left(|\psi\rangle\right)$。由于纯态$|\psi\rangle$的并发度在局域操作和经典通信下不增,故只要$f\left(|\psi\rangle\right)$关于并发度$C_{i|\bar{i}}$、$C_{ij|\overline{ij}}$为增函数,即$f\left(|\psi\rangle\right)$满足在局域操作和经典通信下不增。由此可得如下定理。

定理1 对于任意四体纯态$|\psi\rangle\in\mathcal{H}_1^{d_1}\otimes\mathcal{H}_2^{d_2}\otimes\mathcal{H}_3^{d_3}\otimes\mathcal{H}_4^{d_4}$,$|\psi\rangle$的真纠缠度量$f\left(|\psi\rangle\right)$需满足以下3个条件,其中,$f\left(|\psi\rangle\right)$为以并发度$C_{i|\bar{i}}$、$C_{ij|\overline{ij}}$为自变量的函数:

(i) 当$|\psi\rangle$为双可分态和完全乘积态时,$f\left(|\psi\rangle\right)=0$;

(ii) 当$|\psi\rangle$为非双可分态时,$f\left(|\psi\rangle\right)>0$;

(iii) $\dfrac{\partial f\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{i|\bar{i}}}\geqslant 0,\dfrac{\partial f\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{ij|\overline{ij}}}\geqslant 0$。

根据定理1,可以构造一些四体真纠缠度量。

定理2 设$|\psi\rangle$为任意四体纯态,则

$$g\left(|\psi\rangle\right)=\frac{e^{\prod C_{i|\bar{i}}\prod C_{ij|\overline{ij}}}-1}{e-1} \tag{2}$$

为$|\psi\rangle$的真多体纠缠度量,式中$\prod\cdot$表示连乘运算。

证明

首先,证明$|\psi\rangle$为真纠缠态的充要条件是$g\left(|\psi\rangle\right)>0$。

若$g\left(|\psi\rangle\right)>0$,则$e^{\prod C_{i|\bar{i}}\prod C_{ij|\overline{ij}}}>1$,即$\prod\prod C_{i|\bar{i}}\prod\prod C_{ij|\overline{ij}}>0$,故$|\psi\rangle$的所有双可分并发度满足:$C_{i|\bar{i}}>0$且$C_{ij|\overline{ij}}>0$,所以$|\psi\rangle$是真纠缠态。

若$g\left(|\psi\rangle\right)=0$,则$e^{\prod C_{i|\bar{i}}\prod C_{ij|\overline{ij}}}=1$,即$\prod\prod C_{i|\bar{i}}\prod\prod C_{ij|\overline{ij}}=0$,故一定存在某个双可分并发度$C_{i|\bar{i}}=0$或$C_{ij|\overline{ij}}=0$,不妨假设$C_{1|234}=0$,故$|\psi\rangle=\rho_1\otimes\rho_{234}$,所以$|\psi\rangle$不是真纠缠态。

其次,对任意的$C_{i|\bar{i}}\in\left\{C_{1|234},C_{2|134},C_{3|124},C_{4|123}\right\}$,

$$\frac{\partial g\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{i|\bar{i}}}=\frac{\prod\limits_{k\neq i}C_{k|\bar{k}}\prod\prod C_{kl|\overline{kl}}}{e-1}e^{\prod C_{k|\bar{k}}\prod C_{kl|\overline{kl}}}\geqslant 0, \tag{3}$$

对任意$C_{ij|\overline{ij}}\in\left\{C_{12|34},C_{13|24},C_{14|23}\right\}$,

$$\frac{\partial g\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{ij|\overline{ij}}}=\frac{\prod C_{k|\bar{k}}\prod\limits_{kl\neq ij}C_{kl|\overline{kl}}}{e-1}e^{\prod C_{k|\bar{k}}\prod C_{kl|\overline{kl}}}\geqslant 0。 \tag{4}$$

综上,$g\left(|\psi\rangle\right)$满足定理1中的3个条件,故为四体纯态的真纠缠度量。

类似地,还可以得到

$$h\left(|\psi\rangle\right)=\frac{\left(\prod C_{i|\bar{i}}\prod C_{ij|\overline{ij}}\right)^2}{2} \tag{5}$$

也是四体纯态的真纠缠度量。

在定理1证明过程中,利用并发度在局域操作和经典通信下不增的性质,证明了$g\left(|\psi\rangle\right)$和$h\left(|\psi\rangle\right)$也满足在局域操作和经典通信下不增。下面通过一个具体的例子说明量子态经过局域操作和经典通信操作后真纠缠度量值不增。对$\mathcal{H}_1^2\otimes\mathcal{H}_2^2\otimes\mathcal{H}_3^2\otimes\mathcal{H}_4^2$中的四体纯态$|GHZ\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|0000\rangle+|1111\rangle\right)$直接实施局域操作和经典通信作用,根据文献[25-26],可以选取局域操作和经典通信算子$\boldsymbol{\Lambda}=$

$\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}$,其中,$\boldsymbol{I}$为二阶单位矩阵,$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$。经计算可得,$g\left(\boldsymbol{A}\left(|\mathrm{GHZ}\rangle\right)\right)=g\left(|\mathrm{GHZ}\rangle\right)=1$,$h\left(\boldsymbol{A}\left(|\mathrm{GHZ}\rangle\right)\right)=h\left(|\mathrm{GHZ}\rangle\right)=0.5$,这说明真纠缠度量$g\left(|\psi\rangle\right)$、$h\left(|\psi\rangle\right)$确实是在局域操作和经典通信下是不增的。

通过对比发现,其他文献里的一些真纠缠度量均是以纯态所有双可分的并发度为自变量的函数,如在文献[18]中给出的真纠缠度量$\mathcal{G}\left(|\psi\rangle\right)$为

$$\mathcal{G}\left(|\psi\rangle\right)=\sqrt[c(\alpha)]{\mathcal{P}\left(|\psi\rangle\right)},\tag{6}$$

式中:α表示四体纯态$|\psi\rangle$所有可能的双可分构成的集合;$c(\alpha)$表示α中元素的个数;$\mathcal{P}\left(|\psi\rangle\right)$是$|\psi\rangle$的所有可能的双可分并发度的乘积。文献[20]中给出的真纠缠度量$\mathcal{F}_4\left(|\psi\rangle\right)$为

$$\mathcal{F}_4\left(|\psi\rangle\right)=\left(\prod\nolimits_{i,j\in\{1,2,3,4\}}F_{ij}\right)^{\frac{1}{P_4^1P_3^1}},\tag{7}$$

式中:$F_{ij}=\left[\frac{16}{3}Q_{ij}\left(Q_{ij}-C_{i|\bar{i}}\right)\left(Q_{ij}-C_{j|\bar{j}}\right)\left(Q_{ij}-C_{ij|\overline{ij}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$,$Q_{ij}=\frac{1}{2}\left(C_{i|\bar{i}}+C_{j|\bar{j}}+C_{ij|\overline{ij}}\right)$,$P_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$,$C_{i|\bar{i}}$、$C_{j|\bar{j}}$、$C_{ij|\overline{ij}}$均为$|\psi\rangle$的并发度。

因此,式(6)和(7)均是定理1构造的特例。

根据定义6,本文构造的真纠缠度量$g\left(|\psi\rangle\right)$、$h\left(|\psi\rangle\right)$也是恰当的真纠缠度量。对于四体纯态

$$|\mathrm{GHZ}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0000\rangle+|1111\rangle\right),\tag{8}$$

$$|W\rangle=\frac{1}{2}\left(|1000\rangle+|0100\rangle+|0010\rangle+|0001\rangle\right)。\tag{9}$$

由式(1、2和5)得:

$$g\left(|\mathrm{GHZ}\rangle\right)=1.000\,0,g\left(|W\rangle\right)=0.439\,4;$$
$$h\left(|\mathrm{GHZ}\rangle\right)=0.500\,0,h\left(|W\rangle\right)=0.158\,2。$$

显然,真纠缠度量$g\left(|\psi\rangle\right)$、$h\left(|\psi\rangle\right)$均可判别出$|\mathrm{GHZ}\rangle$比$|W\rangle$更纠缠,故$g\left(|\psi\rangle\right)$、$h\left(|\psi\rangle\right)$为恰当的真纠缠度量。

以四体纯态$|\varphi_A\rangle$、$|\varphi_B\rangle$、$|\varphi_C\rangle$和$|\varphi_D\rangle$为例,说明真纠缠度量$g\left(|\psi\rangle\right)$、$h\left(|\psi\rangle\right)$相比于其他度量而言,可以区分更多的真纠缠态。

例1

$$|\varphi_A\rangle=\frac{1}{2}\left(|0000\rangle+|1011\rangle+|1101\rangle+|1110\rangle\right),\tag{10}$$

$$|\varphi_B\rangle=\frac{1}{2}\left(|0000\rangle+|0101\rangle+|1000\rangle+|1110\rangle\right),\tag{11}$$

$$|\varphi_C\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(|0000\rangle+|1111\rangle+|0011\rangle+|0101\rangle+|0110\rangle\right),\tag{12}$$

$$|\varphi_D\rangle=\frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{5\sqrt{113}}{32}+\frac{51}{32}\right)+3}}\left[\sqrt{\frac{5\sqrt{113}}{32}+\frac{51}{32}}\left(|0000\rangle+|0101\rangle+|1010\rangle+|1111\rangle\right)+\left(\mathrm{i}|0001\rangle+|0110\rangle-\mathrm{i}|1011\rangle\right)\right],\tag{13}$$

式(13)中i满足$\mathrm{i}^2=-1$。

由式(1)、(2)和(5)得:

$$g\left(|\varphi_A\rangle\right)=1.370\,3,g\left(|\varphi_B\rangle\right)=0.621\,1,$$
$$g\left(|\varphi_C\rangle\right)=0.837\,9,g\left(|\varphi_D\rangle\right)=9.079\,7;$$
$$h\left(|\varphi_A\rangle\right)=0.732\,4,h\left(|\varphi_B\rangle\right)=0.263\,7,$$
$$h\left(|\varphi_C\rangle\right)=0.397\,8,h\left(|\varphi_D\rangle\right)=3.946\,6。$$

根据$g\left(|\varphi_A\rangle\right)$、$h\left(|\varphi_A\rangle\right)$的判别结果可知,$|\varphi_A\rangle$比$|\varphi_B\rangle$更纠缠,$|\varphi_D\rangle$比$|\varphi_C\rangle$更纠缠。而文献[15]中的$C_{\mathrm{GME}}\left(|\psi\rangle\right)$定义为

$$C_{\mathrm{GME}}\left(|\psi\rangle\right)=\min_{\gamma_t\in\gamma}\sqrt{2\left(1-\mathrm{Tr}\left(\rho_{A_{\gamma_t}}^2\right)\right)},\tag{14}$$

其也是四体纯态$|\psi\rangle$的真纠缠度量,其中,$\gamma=\{\gamma_t\}=\{A_t|\bar{A}_t\}$表示$|\psi\rangle$的$i|\bar{i}$、$ij|\overline{ij}$2类所有可能的双分割构成的集合,通过计算可得:

$$C_{\mathrm{GME}}\left(|\varphi_A\rangle\right)=C_{\mathrm{GME}}\left(|\varphi_B\rangle\right)=0.866\,0,$$
$$C_{\mathrm{GME}}\left(|\varphi_C\rangle\right)=C_{\mathrm{GME}}\left(|\varphi_D\rangle\right)=0.800\,0。$$

可见,由于$|\varphi_A\rangle$与$|\varphi_B\rangle$、$|\varphi_C\rangle$与$|\varphi_D\rangle$这2组量子态并发度的最小值相同,故C_{GME}不能区分其真纠缠情况;而本文的度量综合考虑了所有的双可分并发度,所以相比于C_{GME}能够区分更多的真纠缠态。

3　多体纯态的真纠缠度量

对于任意N体纯态$|\psi\rangle\in\mathcal{H}_1^{d_1}\otimes\mathcal{H}_2^{d_2}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N^{d_N}$,最多有$\left[\frac{N}{2}\right]$类双可分,其中,$N\in\{3,4,5,\cdots\}$,$[\cdot]$表示向下取整。

记N体纯态$|\psi\rangle$所有可能的双可分并发度为

$C_{i_1}=C_{i_1|\overline{i_1}}\left(|\psi\rangle\right)$, $C_{i_1i_2}=C_{i_1i_2|\overline{i_1i_2}}\left(|\psi\rangle\right)$, $C_{i_1\tilde{i}_3}=C_{i_1\tilde{i}_3|\overline{i_1\tilde{i}_3}}\left(|\psi\rangle\right)$, $\cdots$, $C_{i_1\tilde{i}_{[N/2]}}=C_{i_1\tilde{i}_{[N/2]}|\overline{i_1\tilde{i}_{[N/2]}}}\left(|\psi\rangle\right)$, 其中, $\tilde{i}_n=i_2i_3\cdots i_n$, $i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{[N/2]}\in\{1,2,\cdots,N\}$, $\overline{k}$ 表示 k 关于 $\{1,2,\cdots N\}$ 的补集, C_{i_1}、$C_{i_1i_2}$、$C_{i_1\tilde{i}_3}\cdots C_{i_1\tilde{i}_{[N/2]}}$ 均由式(1)计算。

基于四体纯态的真纠缠度量的构造,将N体纯态所有可能的双可分的并发度作为函数自变量来构造N体纯态的真纠缠度量,简记$f\left(C_{i_1},C_{i_1i_2},C_{i_1\tilde{i}_3}\cdots,C_{i_1\tilde{i}_{[N/2]}}\right)$为$f\left(|\psi\rangle\right)$,同样地,类似定理1的分析,可以得到以下定理。

定理3 对任意N体纯态$|\psi\rangle\in\mathcal{H}_1^{d_1}\otimes\mathcal{H}_2^{d_2}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_N^{d_N}$,$|\psi\rangle$的真纠缠度量$f\left(|\psi\rangle\right)$需满足以下3个条件,其中$f\left(|\psi\rangle\right)$以所有可能的双可分并发度为自变量。

(i) 当$|\psi\rangle$为双可分态和完全乘积态时,$f\left(|\psi\rangle\right)=0$;

(ii) 当$|\psi\rangle$为非双可分态时,$f\left(|\psi\rangle\right)>0$;

(iii) $\frac{\partial f\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{i_1}}\geqslant 0,\frac{\partial f\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{i_1i_2}}\geqslant 0,\cdots,\frac{\partial f\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{i_1\tilde{i}_{[N/2]}}}\geqslant 0$。

当$N=6$时,六体纯态存在1对5、2对4、3对3这3类可能的双分割,且每类分别有6、15、10种不同的双分割,根据定理3,下面给出六体纯态的真纠缠度量。

定理4 对于任意六体纯态$|\psi\rangle$,

$$w\left(|\psi\rangle\right)=\prod_{i_1=1}^{6}C_{i_1}\left(\prod_{i_1i_2}^{15}C_{i_1i_2}\right)^{3/2}\left(\prod_{i_1\tilde{i}_3}^{10}C_{i_1\tilde{i}_3}\right)^{5/3}\tag{15}$$

为六体纯态的真纠缠度量。

证明 因为$C_{i_1}\geqslant 0$、$C_{i_1i_2}\geqslant 0$、$C_{i_1\tilde{i}_3}\geqslant 0$,故$w\left(|\psi\rangle\right)\geqslant 0$。

首先,证明$|\psi\rangle$为真纠缠态的充要条件是$w\left(|\psi\rangle\right)>0$。

若$w\left(|\psi\rangle\right)>0$,则$C_{i_1}>0$、$C_{i_1i_2}>0$且$C_{i_1\tilde{i}_3}>0$,所以$|\psi\rangle$是真纠缠态。

若$w\left(|\psi\rangle\right)=0$,则一定存在某个双可分并发度$C_{i_1}=0$或$C_{i_1i_2}=0$或$C_{i_1\tilde{i}_3}=0$。不妨假设$C_{23|1456}=0$,故$|\psi\rangle=\rho_{23}\otimes\rho_{1456}$,所以$|\psi\rangle$不是真纠缠态。

其次,

$$\frac{\partial w\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{i_1}}=\prod_{k\neq i_1}C_k\left(\prod_{kl}^{15}C_{kl}\right)^{3/2}\left(\prod_{klr}^{10}C_{klr}\right)^{5/3}\geqslant 0,\tag{16}$$

$$\frac{\partial w\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{i_1i_2}}=\frac{3}{2}\prod_{kl\neq i_1i_2}C_{kl}\prod_{k=1}^{6}C_k\left(\prod_{kl}^{15}C_{kl}\right)^{1/2}\left(\prod_{klr}^{10}C_{klr}\right)^{5/3}\geqslant 0,\tag{17}$$

$$\frac{\partial w\left(|\psi\rangle\right)}{\partial C_{i_1\tilde{i}_3}}=\frac{5}{3}\prod_{klr\neq i_1\tilde{i}_3}C_{klr}\prod_{k=1}^{6}C_k\left(\prod_{kl}^{15}C_{kl}\right)^{3/2}\left(\prod_{klr}^{10}C_{klr}\right)^{2/3}\geqslant 0。\tag{18}$$

所以,$w\left(|\psi\rangle\right)$满足定理3中的3个条件,故为六体纯态$|\psi\rangle$的真多体纠缠度量。

最后,利用度量$w\left(|\psi\rangle\right)$考察六体纯态$|\varphi\rangle$是否为真纠缠态。

例2

$$|\varphi\rangle=\frac{1}{2}\left(|110011\rangle+|100001\rangle+|111011\rangle+|101001\rangle\right)。\tag{19}$$

经过计算可得$C_{13|2456}\left(|\varphi\rangle\right)=0$,故$W\left(|\varphi\rangle\right)=0$。这说明$|\varphi\rangle=|\varphi\rangle_{13}\otimes|\varphi\rangle_{2456}$。事实上,

$$|\varphi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle+|11\rangle\right)_{13}\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1011\rangle+|0001\rangle\right)_{2456},$$

所以$|\varphi\rangle$不是真多体纠缠态。

4 结 论

本文主要研究了任意维多体量子系统的真纠缠度量,并结合并发度的性质给出了真多体纠缠度量的一般形式及具体构造,通过对比显示其他文献的真纠缠度量是本文构造的特例,并且通过实例验证了度量可以区分更多的真多体纠缠态。主要研究结论为:(1)给出了利用并发度构造的四体量子系统的真纠缠度量需要满足的条件,并给出了具体构造方法,通过与其他文献的四体真纠缠度量对比表明,已有的一些度量是本文度量的特例,并且通过计算表明本文构造的度量可以区分更多的真纠缠态;(2)通过计算验证了构造的四体真纠缠度量也是恰当的真纠缠度量;(3)给出了以并发度为基础构造多体量子系统真纠缠度量满足的条件,并给出六体纯态的具体真纠缠度量构造,用实例验证此构造的正确性。

参 考 文 献

[1] GOTTESMAN D, CHUANG I L. Demonstrating the

viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations [J]. Nature, 1999,402(6760):390-393.
[2] EKERT A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem [J]. Physical Review Letters, 1991, 67(6): 661-663.
[3] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. Physical Review Letters,1993,70(13):1895-1899.
[4] BUHRMAN H, VAN DAM W, HOYER P, et al. Multiparty quantum communication complexity [J]. Physical Review A,1999,60(4):2737-2741.
[5] DAS S, BAUML S, WINCZEWSKI M, et al. Universal limitations on quantum key distribution over a network [J]. Physical Review X,2021,11(4):041016.
[6] TOTH G. Multipartite entanglement and high-precision metrology[J]. Physical Review A,2012,85(2):022322.
[7] SEEVINCK M, SVETLICHNY G. Bell-type inequalities for partial separability in *N*-particle systems and quantum mechanical violations [J]. Physical Review Letters,2002,89(6):060401.
[8] BANCAL J D, GISIN N, LIANG Y C, et al. Device-independent witnesses of genuine multipartite entanglement [J]. Physical Review Letters, 2001, 106(25):250404.
[9] JUNGNITSCH B, MORODER T, GUEHNE O. Entanglement witnesses for graph states: general theory and examples [J]. Physical Review A, 2011, 84(3): 032310.
[10] ELTSCHKA C, SIEWERT J. Quantifying entanglement resources [J]. Journal of Physics A (Mathematical and Theoretical),2014,47(42):424005.
[11] LI M, WANG J, FEI S M, et al. Quantum separability criteria for arbitrary-dimensional multipartite states [J]. Physical Review A,2014,89(2):022325.
[12] LI M, WANG Z, WANG J, et al. The norms of Bloch vectors and classification of four-qudits quantum states [J]. Europhysics Letters,2019,125(2):20006.
[13] CHEN Z H, MA Z H, CHEN J L, et al. Improved lower bounds on genuine-multipartite-entanglement concurrence [J]. Physical Review A, 2012, 85(6): 062320.
[14] HONG Y, GAO T, YAN F L. Measure of multipartite entanglement with computable lower bounds [J]. Physical Review A,2012,86(6):062323.
[15] MA Z H, CHEN Z H, CHEN J L, et al. Measure of genuine multipartite entanglement with computable lower bounds [J]. Physical Review A, 2011, 83(6): 062325.
[16] LI M, JIA L X, WANG J, et al. Measure and detection of genuine multipartite entanglement for tripartite systems [J]. Physical Review A,2017,96(5):052314.
[17] XIE S B, EBERLY J H. Triangle measure of tripartite entanglement [J]. Physical Review Letters, 2021, 127(4):040403.
[18] LI Y F, SHANG J W. Geometric mean of bipartite concurrences as a genuine multipartite entanglement measure [J]. Physical Review Research, 2022, 4(2): 023059.
[19] GUO Y, JIA Y P, LI X P, et al. Genuine multipartite entanglement measure [J]. Journal of Physics A (Mathematical and Theoretical),2022,55(14):145303.
[20] JIN Z X, TAO Y H, GUI Y T, et al. Concurrence triangle induced genuine multipartite entanglement measure [J]. Results in Physics,2023,44:106155.
[21] GUO M L, JIN Z X, LI B, et al. Tetrahedron genuine entanglement measure of four-qubit systems[J]. Journal of Physics A (Mathematical and Theoretical), 2023, 56(31):315302.
[22] ALBEVERIO S, FEI S M. A note on invariants and entanglements [J]. Journal of Optics B (Quantum and Semiclassical Optics),2001,3(4):223-227.
[23] CARVALHO A R R, MINTERT F, BUCHLEITNER A. Decoherence and multipartite entanglement[J]. Physical Review Letters,2004,93(23):230501.
[24] JOO J, PARK Y J, OH S, et al. Quantum teleportation via a *W* state [J]. New Journal of Physics, 2003, 5(1):136.
[25] NIELSEN M A. Conditions for a class of entanglement transformations [J]. Physical Review Letters, 1999, 83(2):436-439.
[26] DE VICENTE J I. Maximally entangled mixed states for a fixed spectrum do not always exist [J]. Physical Review Letters,2004,133(5):050202.

(责任编辑:兰丽丽)