DOI:10.19789/j.1004-9398.2025.04.006

文献引用:郭栋,敖恩,王庆,等.几类单叶函数逆的Hermitian Toeplitz行列式[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,46(4):45-49. GUO D,AO E,WANG Q,et al. Hermitian Toeplitz determinants for the inverse of several univalent functions[J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2025,46(4):45-49.

几类单叶函数逆的Hermitian Toeplitz行列式*

郭 栋[1**],敖 恩[2],王 庆[1],李宗涛[3]

(1. 扬州市职业大学数学科学学院,江苏 扬州 225009;2. 赤峰学院数学与计算机科学学院,内蒙古 赤峰 024000;3. 广州民航职业技术学院人文社科学院,广东 广州 510403)

摘要:令A表示单位圆盘$\Delta=\{z:|z|<1\}$内具有形式$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$的解析函数类。文章研究了单位圆盘$\Delta$内的函数类:

$$S^*=\left\{f\left|\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0,(f\in A,z\in\Delta)\right.\right\},K=\left\{f\left|\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0,(f\in A,z\in\Delta)\right.\right\},$$

$$RT=\left\{f\left|\mathrm{Re}\left\{f'(z)\right\}>0,(f\in A,z\in\Delta)\right.\right\},T=\left\{f\left|\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}>0,(f\in A,z\in\Delta)\right.\right\}$$

的逆函数f^{-1}的二阶、三阶Hermitian Toeplitz行列式$|\boldsymbol{T}_{2,1}(f^{-1})|$、$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|$,得到了其上界估计。

关键词:Hermitian Toeplitz矩阵;单叶函数;逆函数

中图分类号:O174.5 **文献标志码**:A

Hermitian Toeplitz determinants for the inverse of several univalent functions*

GUO Dong[1**], AO En[2], WANG Qing[1], LI Zongtao[3]

(1. School of Mathematical Sciences, Yangzhou Polytechnic College, Yangzhou Jiangsu 225009;
2. College of Mathematics and Computer Science, Chifeng University, Inner Mongolia 024000;
3. Faculty of Humanities and Social Sciences, Guangzhou Civil Aviation College, Guangzhou Guangdong 510403)

Abstract: Let A denote the class of functions f of form $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, which are analytic in the unit disk $\Delta=\{z:|z|<1\}$. Let S^*(K, RT and T resp.) denote the class of functions $f\in A$ such that $\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0$ ($\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$, $\mathrm{Re}\left\{f'(z)\right\}>0$ and $\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}>0$ resp.) in Δ. In the present paper, we determine the sharp bounds for $|\boldsymbol{T}_{2,1}(f^{-1})|$, $|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|$ for functions f in the classes S^*, K, RT and T.

收稿日期:2023-04-19

*内蒙古自治区自然科学基金项目(2020MS01010);安徽省高校自然科学研究项目(KJ2020ZD74,KJ2020A0993);广州民航职业技术学院项目(22x0418)

**通信作者:gd791217@163.com

Keywords: Hermitian Toeplitz matrix; univalent functions; inverse function.
CLC: O174.5 **DC**: A

0 引 言

令A表示$\Delta=\{z:|z|<1\}$内具有

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \tag{1}$$

的解析函数类。S表示A中的单叶函数族,用S^*和K分别表示为$\mathrm{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\}>0$和$\mathrm{Re}\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}>0$的函数类。每个具有形式(1)的单叶函数$f$都存在逆函数$f^{-1}$为

$$f^{-1}(w)=w-a_2w^2+(2a_2^2-a_3)w^3+\cdots=w+t_2w^2+t_3w^3+\cdots。 \tag{2}$$

Thomas和Halim[1]引入了关于f的对称Toeplitz行列式为

$$\boldsymbol{T}_q(n)=\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_n \end{vmatrix}\ (n\geqslant 1,q\geqslant 1)。$$

参数n,q为一些特殊的数时可得到一些特殊的Toeplitz行列式,例如:

$$\boldsymbol{T}_2(2)=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{T}_2(3)=\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}_3(2)=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_3 & a_2 \end{vmatrix}。$$

Toeplitz行列式是Hankel行列式的一种特殊情形,最近许多作者研究了某些函数类的Toeplitz行列式的上界[2-6]。

f由式(1)给出,Hartman和Wintner[7]引入了f的Hermitian Toeplitz矩阵定义为

$$\boldsymbol{T}_{q,n}(f)=\begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ \bar{a}_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n+q-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{n+q-1} & \bar{a}_{n+q-2} & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

$$q,n\in\{1,2,3,\cdots\},$$

其中$\bar{a}_k=\overline{a_k}$。令$|\boldsymbol{T}_{q,n}(f)|$表示$\boldsymbol{T}_{q,n}(f)$的行列式,则二阶、三阶Hermitian Toeplitz行列式分别为:

$$|\boldsymbol{T}_{2,1}(f)|=1-|a_2|^2, \tag{3}$$

$$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f)|=\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ \bar{a}_2 & 1 & a_2 \\ \bar{a}_3 & \bar{a}_2 & 1 \end{vmatrix}=2\mathrm{Re}(a_2^2\bar{a}_3)-2|a_2|^2-|a_3|^2+1。 \tag{4}$$

Hermitian Toeplitz矩阵是一种重要的结构矩阵。在自动控制理论、震动理论、非线性规划、动态分析、结构设计、结构力学、固体力学、生物学和电学等众多领域中有重要的应用。近2年来,部分作者[8-11]研究了A中一些子类的Hermitian Toeplitz行列式,但研究单叶函数逆函数Hermitian Toeplitz行列式未见。参考文献[11]的方法,作者研究了S^*、K及下面2类单叶函数的逆函数的Hermitian Toeplitz行列式,丰富了单叶函数的理论。

1 定义及引理

定义1[12] 若$f(z)\in A$且满足$\mathrm{Re}\{f'(z)\}>0$,则称$f\in RT$。

定义2[13] 若$f(z)\in A$且满足$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}>0$,则称$f\in T$。

若$f\in RT$,f^{-1}为其逆函数,Krishna等[12]研究了逆函数的二、三阶Hankel行列式,给出本文需要的结论:$|t_2|\leqslant 1$,$|t_3|\leqslant\frac{4}{3}$,$|t_3-t_2^2|\leqslant\frac{2}{3}$;Shoikhet[14]研究的单参数连续半群的产生器,函数类T在解析函数半群理论中起着基本作用;Kowalczyk等[13]研究了函数类T的三阶Hankel行列式,得到精确的上界估计。最近几年国外作者研究了星像函数类S^*和凸像函数类K的三阶Hankel行列式、Toeplitz行列式和Hermitian Toeplitz行列式[15-20]。

用P表示单位圆内的正实部函数的全体,其形式为

$$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots。 \tag{5}$$

引理1[21] 设$p\in P$,由式(5)给出,则有$|p_n|\leqslant 2$ $(n\geqslant 1)$。

引理2[22] 设$p\in P$,由式(5)给出,则有

$$|p_2-\frac{\mu}{2}p_1^2|\leqslant\max\{2,2|\mu-1|\}=\begin{cases}2, & 0\leqslant\mu\leqslant 2,\\ 2|\mu-1|, & \text{其他}。\end{cases}$$

2 主要结果及证明

定理1 假设$f\in RT$,f^{-1}是f的逆函数由式(2)给出,则有

$$0\leqslant|\boldsymbol{T}_{2,1}(f^{-1})|\leqslant 1,\ -\frac{4}{9}\leqslant|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant 1,$$

上下界都是精确的。

证明　因为$f\in RT$, 则存在$p(z)$满足$f'(z)=p(z)$。即

$$1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots=1+p_1z+p_2z^2+\cdots,$$

则有

$$a_2=\frac{p_1}{2},a_3=\frac{p_2}{3}。\tag{6}$$

由式(2和6)得

$$t_2=-\frac{p_1}{2},\qquad t_3=\frac{3p_1^2-2p_2}{6},$$

因$|t_2|\leqslant 1$,则由式(3)得$0\leqslant|T_{2,1}(f^{-1})|\leqslant 1$。

当$f^{-1}(w)=\frac{w}{1-w}$时,左边等号成立;当$f^{-1}(w)=w$时,右边等号成立。由文献[12]知$|t_3-t_2^2|\leqslant\frac{2}{3}$,则有

$$|t_2|^4+|t_3|^2-2\mathrm{Re}(t_2^2\overline{t_3})=|t_3-t_2^2|^2\leqslant\frac{4}{9}。$$

所以$2\mathrm{Re}(t_2^2\overline{t_3})\geqslant|t_2|^4+|t_3|^2-\frac{4}{9}$。由式(4)得,

$$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\geqslant(|t_2|^2-1)^2-\frac{4}{9}\geqslant-\frac{4}{9},$$

极值函数为$f^{-1}(w)=\frac{3w+2w^2}{3-w}=w+w^2+\frac{1}{3}w^3+\cdots$。

下面估计$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|$的上界。由于$\mathrm{Re}(t_2^2\overline{t_3})\leqslant|t_2|^2|t_3|$, 所以

$$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant-|t_3|^2+2|t_2|^2|t_3|-2|t_2|^2+1。\tag{7}$$

令$|t_3|=x\in[0,\frac{4}{3}]$,$|t_2|=y\in[0,1]$, 则有

$$|T_{3,1}(f^{-1})|\leqslant-x^2+2y^2x-2y^2+1=\Phi(x,y)。\tag{8}$$

令$\begin{cases}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-2x+2y^2=0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=4xy-4y=0,\end{cases}$得可能的极值点$(0,0)\notin(0,\frac{4}{3})\times(0,1)$和$(1,1)\notin(0,\frac{4}{3})\times(0,1)$, 所以最大值只能出现在边界线上。

当$x=0$时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant\Phi(0,y)=-2y^2+1\leqslant 1$。

当$x=\frac{4}{3}$时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant\Phi(\frac{4}{3},y)=\frac{2}{3}y^2-\frac{7}{9}\leqslant\Phi(\frac{4}{3},1)=-\frac{1}{9}$。

当$y=0$时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant\Phi(x,0)=-x^2+1\leqslant 1$。

当$y=1$时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant\Phi(x,1)=-(x-1)^2\leqslant 0$。

所以$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant 1$,极值函数为$f^{-1}(w)=w$。

定理2　假设$f\in T$,f^{-1}是f的逆函数由式(2)给出,则有

$$-3\leqslant|\boldsymbol{T}_{2,1}(f^{-1})|\leqslant 1,\ -4\leqslant|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant 9,$$

上下界都是精确的。

证明　因为$f\in T$, 则存在$p(z)$满足$\frac{f(z)}{z}=p(z)$, 即

$$1+a_2z+a_3z^2+\cdots=1+p_1z+p_2z^2+\cdots。$$

则有

$$a_2=p_1,a_3=p_2。\tag{9}$$

由式(2和9)得

$$t_2=-p_1,t_3=2p_1^2-p_2。\tag{10}$$

由引理1、2和式(10)得

$|t_2|\leqslant 2,|t_3|=|p_2-2p_1^2|\leqslant 6,|t_3-t_2^2|=|p_2-p_1^2|\leqslant 2$。

由$|t_2|\leqslant 2$和式(3)得

$$-3\leqslant|\boldsymbol{T}_{2,1}(f^{-1})|\leqslant 1。$$

当$f^{-1}(w)=\frac{w}{1-2w}$时,左边等号成立;当$f^{-1}(w)=w$时,右边等号成立。由$|t_3-t_2^2|\leqslant 2$, 则

$$|t_2|^4+|t_3|^2-2\mathrm{Re}(t_2^2\overline{t_3})=|t_3-t_2^2|^2\leqslant 4,$$

所以,$2\mathrm{Re}(t_2^2\overline{t_3})\geqslant|t_2|^4+|t_3|^2-4$。

由式(4)得

$$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\geqslant(|t_2|^2-1)^2-4\geqslant-4。$$

极值函数为$f^{-1}(w)=\frac{w+2w^2}{1+w}=w+w^2-w^3+\cdots$,

$$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant-x^2+2y^2x-2y^2+1=\Phi(x,y),$$

其中$x=|t_3|\in[0,6]$,$y=|t_2|\in[0,2]$。由定理1的证明过程知Φ在闭域$[0,6]\times[0,2]$的内部存在可能的极值点$(1,1)$且$\Phi(1,1)=0$。

当$x=0$时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant\Phi(0,y)=-2y^2+1\leqslant 1$,

当$x=6$时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant\Phi(6,y)=10y^2-35\leqslant 5$;

当$y=0$时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant\Phi(x,0)=-x^2+1\leqslant 1$,

当$y=2$时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant\Phi(x,2)=-(x-4)^2+9\leqslant 9$。

所以$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant 9$。极值函数为$f^{-1}(w)=\frac{w}{1-2w}=w+2w^2+4w^3+\cdots$。

定理3　假设$f\in S^*$,f^{-1}是f的逆函数由式(2)给出,则有

$$-3\leqslant|\boldsymbol{T}_{2,1}(f^{-1})|\leqslant 1,\ -1\leqslant|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})|\leqslant 9,$$

上下界都是精确的。

证明　因为$f\in S^*$, 则存在$p(z)$满足

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=p(z)。$$

即$1+a_2z+(2a_3-a_2^2)z^2+\cdots=1+p_1z+p_2z^2+\cdots$,则有

$$a_2=p_1,a_3=\frac{p_2+p_1^2}{2}。\tag{11}$$

由式(2和11)得

$$t_2 = -p_1, t_3 = \frac{3p_1^2 - p_2}{2}, \tag{12}$$

由引理1、2和式(12)得

$$|t_2| \leqslant 2, |t_3| \leqslant 5, |t_3 - t_2^2| = \frac{1}{2}|p_2 - p_1^2| \leqslant 1,$$

由 $|t_2| \leqslant 2$ 和式(3)得 $-3 \leqslant |T_{2,1}(f^{-1})| \leqslant 1$。

当 $f^{-1}(w) = \frac{w}{1-2w}$ 时,左边等号成立;当 $f^{-1}(w) = w$ 时,右边等号成立。

由 $|t_3 - t_2^2| \leqslant 1$,则有 $|t_2|^4 + |t_3|^2 - 2\mathrm{Re}(t_2^2\overline{t_3}) = |t_3 - t_2^2|^2 \leqslant 1$,所以

$$2\mathrm{Re}(t_2^2\overline{t_3}) \geqslant |t_2|^4 + |t_3|^2 - 1。$$

由式(4)得

$$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \geqslant (|t_2|^2 - 1)^2 - 1 \geqslant -1,$$

极值函数为 $f^{-1}(w) = \frac{w+w^2-w^3}{1-w^2} = w + w^2 + w^4 + \cdots$,

$$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant -x^2 + 2y^2x - 2y^2 + 1 = \Phi(x,y),$$

其中 $x = |t_3| \in [0,5]$, $y = |t_2| \in [0,2]$。由定理1的证明过程知 Φ 在闭域 $[0,5]\times[0,2]$ 的内部存在可能的极值点(1,1)且 $\Phi(1,1) = 0$。

当 $x=0$ 时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant \Phi(0,y) = -2y^2+1 \leqslant 1$,

当 $x=5$ 时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant \Phi(5,y) = 8y^2-24 \leqslant 8$;

当 $y=0$ 时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant \Phi(x,0) = -x^2+1 \leqslant 1$,

当 $y=2$ 时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant \Phi(x,2) = -(4-x)^2+9 \leqslant 9$。

所以 $|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant 9$。极值函数为 $f^{-1}(w) = \frac{w}{1-2w} = w + 2w^2 + 4w^3 + \cdots$。

定理4 假设 $f \in K$, f^{-1} 是 f 的逆函数由式(2)给出,则有

$$0 \leqslant |\boldsymbol{T}_{2,1}(f^{-1})| \leqslant 1, \ -\frac{1}{9} \leqslant |T_{3,1}(f^{-1})| \leqslant 1,$$

上下界都是精确的。

证明 因为 $f \in C$,则存在 $p(z)$ 满足

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = p(z),$$

即 $1+2a_2z+(6a_3-4a_2^2)z^2+\cdots = 1+p_1z+p_2z^2+\cdots$。则有

$$a_2 = \frac{p_1}{2}, a_3 = \frac{p_2 + p_1^2}{6}, \tag{13}$$

由式(2和13)得

$$t_2 = -\frac{p_1}{2}, t_3 = \frac{2p_1^2 - p_2}{6}, \tag{14}$$

由引理1、2和式(12)得

$$|t_2| \leqslant 1, |t_3| \leqslant 1, |t_3 - t_2^2| = \frac{1}{6}|p_2 - \frac{1}{2}p_1^2| \leqslant \frac{1}{3},$$

由 $|t_2| \leqslant 1$ 和式(3)得,$0 \leqslant |\boldsymbol{T}_{2,1}(f^{-1})| \leqslant 1$。

当 $f^{-1}(w) = \frac{w}{1-w}$ 时,左边等号成立;当 $f^{-1}(w) = w$ 时,右边等号成立。由 $|t_3 - t_2^2| \leqslant \frac{1}{3}$,则有

$$|t_2|^4 + |t_3|^2 - 2\mathrm{Re}(t_2^2\overline{t_3}) = |t_3 - t_2^2|^2 \leqslant \frac{1}{9},$$

所以,$2\mathrm{Re}(t_2^2\overline{t_3}) \geqslant |t_2|^4 + |t_3|^2 - \frac{1}{9}$。

由式(4)得

$$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \geqslant (|t_2|^2 - 1)^2 - \frac{1}{9} \geqslant -\frac{1}{9},$$

极值函数为 $f^{-1}(w) = \frac{3w+w^2}{3-2w} = w + w^2 + \frac{2}{3}w^3 + \cdots$,

$$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant -x^2 + 2y^2x - 2y^2 + 1 = \Phi(x,y),$$

其中 $x \in |t_3| = [0,1]$, $y = |t_2| \in [0,1]$。由定理1的证明过程知 Φ 在闭域 $[0,1]\times[0,1]$ 的内部无极值点,则最大值在边界线上取得。

当 $x=0$ 时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant \Phi(0,y) = 2y^2 - 1 \leqslant 1$,

当 $x=1$ 时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant \Phi(1,y) = 0$,

当 $y=0$ 时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant \Phi(x,0) = -x^2+1 \leqslant 1$;

当 $y=1$ 时,$|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant \Phi(x,1) = -(1-x)^2 \leqslant 0$。

所以 $|\boldsymbol{T}_{3,1}(f^{-1})| \leqslant 1$。极值函数为 $f^{-1}(w) = w$。

3 结束语

最近几年研究单叶函数的Hermitian Toeplitz行列式 $|T_{3,1}(f)|$ 的上下界成为几何函数论的一个热点问题,研究方法有2种:第1种方法是利用正实部函数的系数 $p_1 = 2\zeta_1$, $p_2 = 2\zeta_1^2 + 2(1-|\zeta_1|^2)\zeta_2$(其中 $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\Delta} = \{z: |z| \leqslant 1\}$)归为一个三元函数的最值;第2种是利用文献[11]的方法归为一个待求二元函数的最值。2种不同的方法所得的 $|T_{3,1}(f)|$ 的上下界哪个更优,值得我们关注。

参 考 文 献

[1] THOMAS D K, HALIM S A. Toeplitz matrices whose elements are the coefficients of starlike and close-to-convex functions [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2017, 40(4): 1781-1790.

[2] RADHIKA V, JAHANGIRII J M, SIVASUBRAMANIAN S, et al. Toeplitz matrices whose elements are coefficients of Bazilevič functions[J]. Open Mathematics, 2018, 16: 1161-1169.

[3] ALI M F, THOMAS D K, VASUDEVARAO A. Toeplitz determinants whose elements are the coefficients of

analytic and univalent functions [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2018, 97(2): 253-264.

[4] WAHID N H A A. MOHAMAD D. Toeplitz determinant for a subclass of titled starlike functions with respect to conjugate points [J]. Sains Malaysiana, 2021, 50(12): 3745-3751.

[5] TANG H, KHAN S, HUSSAIN S, et al. Hankel and toeplitz determinant for a subclass of multivalent q−starlike functions of order α [J]. Aims Mathematics, 2021, 6(6): 5421-5439.

[6] GUO D, LI Z T, TANG H, et al. Toeplitz determinants for the inverse of starlike functions connected with the sine function [J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2021, 41(2): 141-149.

[7] HARTMAN P, WINTNER A. The spectra of Toeplitz's matrices [J]. American Journal of Mathematics, 1954, 76, 867-882.

[8] CUDNA K, KWON O S, LECKO A, et al. The second and third-order Hermitian Toeplitz determinants for starlike and convex functions of α [J]. Boletin de la Sociedad Mathematica Mexicana, 2020, 26: 361-375.

[9] KOWALCZYK B, KWON O S, LECKO A, et al. The third-order Hermitian Toeplitz determinant for classes of functions convex in one direction [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2020, 43: 3143-3158.

[10] JASTRZEBSKI P, KOWALCZYK B, KWON O S, et al. Hermitian Toepliz determinants of the second and third-order for classes of close-to-star functions [J]. Revista De La Real Academia De Ciencias Exactas Fisicas Y Naturales Serie A-mate, 2020, 114(166): 1-14.

[11] KUMAR V, KUMAR S. Bounds on Hermitian-Toeplitz and Hankel determinants for strongly starlike functions [EB/OL]. [2023-04-10]. https://doi.org/10.1007/s40590-021-00362-y.

[12] KRISHNA D V, VENKATESWARLU B V, RAMREDDY T. The Hankel determinant for the inverse of a function whose derivative has a positive real part [J]. Matematychni Studii, 2014, 42(1): 54-60.

[13] KOWALCZYK B, LECKO A, LECKO M, et al. The sharp bound of the third Hankel determinant for some classes of analytic functions [J]. Bulletin of Korean Mathematical Society, 2018, 55(6): 1859-1868.

[14] SHOIKHET D. Rigidity and parametric embedding of semi-complete vector fields on the unit disk [J]. Milan Journal of Mathematics, 2016, 84(1): 159-202.

[15] ORHAN H, ZAPRAWA P. Third Hankel determinants for starlike and convex functions of order alpha [J]. Bulletin of Korean Mathematical Society, 2018, 55(1): 165-173.

[16] THOMAS D K, HALIM S A. Toeplitz matrices whose elements are the coefficents of starlike and close-to-convex functions [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2017, 40(4): 1781-1790.

[17] KOWALCZYK B, LECKO A, SIM Y J. The sharp bound of the Hankel determinant for starlike functions [J]. Forum Mathematicum, 2022, 34(5): 1249-1254.

[18] KOWALCZYK B, LECKO A. Second Hankel determinant of logarithmic coefficients of convex and starlikefunctions of order alpha [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2022, 45: 727-740.

[19] LECKO A, SMIAROWSKA B. Sharp bounds of the Hermitian Toeplitz determinants for some classes of close-to-convex functions [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2021, 44(5): 3391-3412.

[20] KUMAR V, CHO N E. Hermitian-Toeplitz determinants for functions with bounded turning [J]. Turkish Journal of Mathematics, 2021, 45: 2678-2687.

[21] POMMERENKE C H. Univalent functions [M]. Gottingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1975.

[22] ALI R M. Coefficient of the inverse of strongly starlike functions [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2003, 26: 63-71.

（责任编辑：马田田）