DOI:10.19789/j.1004-9398.2025.04.010
文献引用:熊敏,刘伟明.关于常微分方程的习题课设计:以一阶微分方程的初等解法为例[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,46(4):71-75. XIONG M,LIU W M. Exercise lesson teaching on the ordinary differential equation:an example of the elementary solution of the first order differential equation[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2025,46(4):71-75.

关于常微分方程的习题课设计:以一阶微分方程的初等解法为例*

熊 敏,刘伟明**

(湖北师范大学数学与统计学院,湖北 黄石 435002)

摘要:为提高学生学习常微分方程的积极性,激发学生的学习兴趣,本文通过回顾一阶微分方程的初等解法,并结合例子强化和拓展练习来设计一阶微分方程的初等解法的习题课。通过这一设计,可以提升学生对初等解法的掌握程度,帮助学生理解解题技巧和各题之间的联系。

关键词:常微分方程;习题课;初等解法
中图分类号:G642.0 **文献标志码**:A

Exercise lesson teaching on the ordinary differential equation: an example of the elementary solution of the first order differential equation

XIONG Min, LIU Weiming**

(College of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi Hubei 435002)

Abstract: In order to improve the students' enthusiasm in learning ordinary differential equation and stimulate students' interest in learning, this paper presents the design of exercise lesson on "the elementary solution of the first order differential equation" by recalling the elementary solution of the first order differential equation and combining with examples to strengthen and expand the exercises. The exercise lesson design can enhance the degree of mastery of the elementary solution and help students understand the connection between these exercises.

Keywords: ordinary differential equations; exercise lesson; elementary solutions
CLC: G642.0 **DC**: A

0 引 言

常微分方程是以高等代数、数学分析为基础的课程,具有理论性与应用性强的特点,对学生形成数学思维和数学思想有重要意义[1-3]。常微分方程课程既是数学专业本科生的一门必修基础课,又是该学科本身近代发展方向的重要基础,贯穿于多学科领域,如化学、物理、经济、生物和工程等学科[4-6]。同时,常微分方程与生产生活紧密联系,现实生活和科学技术中很多现象都可以用一般的常微分方

收稿日期:2023-04-26
*湖北省一流本科课程资助项目(鄂教高函[2022]16号);湖北省教学研究项目"基于一流课程建设和师范生培养的教学模式深度创新与实践"(2023380)
**通信作者:whu.027@163.com

程来描述,如人口预测、放射性物质的衰变和古迹年代的鉴别等[7]。

常微分方程课程包含了许多定理的推导,学习难度较高,为了更好地理解这些定理的推导,学生必须熟悉一些数学分析和高等代数等课程的相关知识[8-10]。而求解常微分方程是课程讲授的重点,这要求学生需要学习一阶微分方程的初等解法,结合方程的特点选取一种或多种方法求解。这些要求增加了学生学习常微分方程课程的难度。王卿文等[11]以实对称矩阵正交相似定理的应用为例设计了习题课,引领学生逐步思考,轻松发现实对称矩阵正交相似对角化的应用;张淑琴和王洁[12]提出了线性代数习题课的教学改革需要注意的问题;王守峰和杨义川[13]给出了一个关于矩阵秩的习题课的教学设计,通过习题课的设计帮助学生理解这部分习题的解题技巧和各题之间的联系;严文利[14]和尹正[15]从不同的角度设计了正定二次型的习题课;王文等[16]对实变函数习题课的教学进行了探讨,启发学生在学习过程中要深层次地理解并应用学习的知识;高文华[17]从理论上探讨了高等数学习题课教学应注意的问题;倪柏竹[18]提出以微视频的线上教学方式代替或补充线下习题课教学,探索了线上习题微课的教学设计,并以一类硕士研究生入学试题为例,介绍了习题微课的教学方案设计与教学实践;熊昀暄[19]对高等数学习题课"问题链"教学模式进行了探究;杨刘和汪忠志[20]结合多年的教学实践,就如何上好数学分析习题课谈了几点体会。然而,目前尚无有关常微分方程习题课设计的研究。本文拟通过一阶微分方程的初等解法习题课帮助学生总结、巩固和加深对初等解法的理解及其应用,以提高学生的抽象思维能力、逻辑推理能力及运算技巧能力等数学能力。

1 一阶微分方程的初等解法的回顾

一阶微分方程的初等解法,就是把微分方程的求解问题化为积分问题,其解的表达式由初等函数或超越函数表示。能够使用这种方法求解的方程是有限的,但却能反映实际问题中的相当一部分微分方程。因此让学生掌握使用初等解法求解这类微分方程是有意义的。

习题课开始前,教师先引导学生回顾本章学过的几种微分方程的具体形式,再通过提问的方式,引发学生思考如何求解这些方程:(1)变量分离方程及其求解方法;(2)齐次微分方程及其求解方法;(3)形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

的方程及其求解方法;(4)一阶线性微分方程及其求解方法;(5)伯努利方程及其求解方法;(6)恰当微分方程及其求解方法,积分因子。

2 习题课的教学设计

为了让学生更好地运用初等解法求解上述6类方程,教师应选取一些经典的例题进行讲解,举1个例子,同时由这个例子再引伸出剩下9个例子,通过例题讲解,锻炼学生举一反三的发散思维能力。

例1 求解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+3y}{3x+2y}$。

分析 引导学生观察方程的结构,确定求解这类方程的方法。

解 将方程改为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2+3\left(\frac{y}{x}\right)}{3+2\left(\frac{y}{x}\right)}$,这是齐次方程,作变换$u=\frac{y}{x}$,代入方程得到

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2+3u}{3+2u},$$

可整理为$\frac{3+2u}{2-2u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ $(u\neq\pm1)$,两边积分,得$\frac{1+u}{(1-u)^5}=cx^4$。代回原变量,得原方程通解$x+y=c(x-y)^5$。

此外,$u=\pm1$也是方程的解。即$y=\pm x$都是方程的解,又$y=-x$包含在上述通解之中,则原方程的通解为$x+y=c(x-y)^5$(C为任意常数),且$y=x$也是原方程的解。

教师可把方程进行细微的修改,让学生思考是否还可以用上题的方法求解这类方程。

例2 求解方程

$(2x+3y-7)\mathrm{d}x-(3x+2y-8)\mathrm{d}y=0$。

分析:方程表现的形式产生了变化,同时,方程多了2项"-7"和"-8"。这时,再引导学生思考如何求解这类方程。

解 将方程改写为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+3y-7}{3x+2y-8}$,

这是一个可化为齐次的方程。

解方程组

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 7 = 0, \\ 3\alpha + 2\beta - 8 = 0, \end{cases}$$

得$\alpha = 2, \beta = 1$。

令$x=\xi+2, y=\eta+1$,代入方程得$\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \dfrac{2\xi+3\eta}{3\xi+2\eta}$。由例1知,方程通解为$\xi + \eta = c(\xi - \eta)^5$($c$为任意常数),且$\eta = \xi$也是方程的解。代回原变量,得原方程的通解为

$$x+y-3=c(x-y-1)^5(c\text{为任意常数}),$$

且$x=y+1$也是原方程的解。

对例2方程进行修改,得到以下例题。

例3　求解方程

$$(2x + 3y - 7)\mathrm{d}x - (4x + 6y - 8)\mathrm{d}y = 0。$$

分析　这里的"$2x + 3y$"和"$4x + 6y$"是呈倍数关系,这样的好规律,相对于例2,是否可以简化求解过程呢?继续让学生思考。

解　令$z = 2x + 3y$,代入方程得$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{7z - 37}{2z - 8}$。将变量分离得

$$\frac{2z - 8}{7z - 37}\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\left(z \neq \frac{37}{7}\right)。$$

两边积分得$\dfrac{2}{7}z + \dfrac{18}{49}\ln\left|z - \dfrac{37}{7}\right| = x + c_1$。

代回原变量,得方程通解

$$2x + 3y - \frac{37}{7} = c\mathrm{e}^{\frac{7}{6}x - \frac{7}{3}y}(c\text{为任意常数})。$$

此外,$z = \dfrac{37}{7}$是解。即$2x + 3y = \dfrac{37}{7}$是原方程的解,但其被包含在通解之中。

例2方程里面的x、y都是一次的,如果改为二次,可以设置如下例题。

例4　求解方程

$$x\left(2x^2 + 3y^2 - 7\right)\mathrm{d}x - y\left(3x^2 + 2y^2 - 8\right)\mathrm{d}y = 0。$$

分析　要求学生观察方程的具体结构,相比例2的方程,这里把x、y改为了二次,引导学生思考,求解方法是否还会一样?

解　将方程改写为$\dfrac{2y\mathrm{d}y}{2x\mathrm{d}x} = \dfrac{2x^2 + 3y^2 - 7}{3x^2 + 2y^2 - 8}$,即

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2x^2 + 3y^2 - 7}{3x^2 + 2y^2 - 8}。$$

令$x^2 = u, y^2 = v$,代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u + 3v - 7}{3u + 2v - 8}。$$

这是一个可化为齐次的方程,由例2得方程的通解为$u + v - 3 = c(u - v - 1)^5$($c$为任意常数),且$u = v + 1$也是原方程的解。

代回原变量,得原方程的通解为

$$x^2 + y^2 - 3 = c\left(x^2 - y^2 - 1\right)^5(c\text{为任意常数}),$$

且$x^2 = y^2 + 1$也是原方程的解。

将例2的方程变形,可得如下例题。

例5　求解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{3y - 7}{3x + 2y - 8}\right)^2$。

分析　这里方程的右边是整体的平方,而括号里面的分式的形式相比例2却简化了许多,那么求解方法是否也会简化很多呢?激发学生进一步的思考。

解　令$v = 3y - 7, u = x - \dfrac{10}{9}$,代入原方程得

$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \left(\frac{v}{3u + \frac{2}{3}v}\right)^2,$$

这是齐次方程。作变换$z = \dfrac{v}{u}$,则方程化为

$$\frac{z}{3} + \frac{u}{3}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \left(\frac{z}{3 + \frac{2}{3}z}\right)^2。$$

将变量分离得

$$\frac{\left(\frac{2}{3}z + 3\right)^2}{z\left(\frac{4}{9}z^2 + z + 9\right)}\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}u}{u}(z \neq 0),$$

两边积分化简得

$$\int\left(\frac{1}{z} + \frac{3}{\frac{4}{9}z^2 + z + 9}\right)\mathrm{d}z = -\int\frac{\mathrm{d}u}{u}。$$

则

$$\ln|z| + \frac{6}{\sqrt{15}}\arctan\frac{\frac{8}{9}z + 1}{\sqrt{15}} = -\ln|u| + C_1,$$

将变量代回,即得原方程的解。

例6　求解方程

$$(2x + 3y - 7)\mathrm{d}x + (3x + 2y - 8)\mathrm{d}y = 0。$$

分析　相比例2,方程也就变了一个符号,但采用的方法却有天壤之别。引导学生回忆全微分方程的概念和求解这类方程的方法。

解 这里

$M(x,y)=2x+3y-7, N(x,y)=3x+2y-8$,

所以$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=3$。这是一个全微分方程,取$x_0=0, y_0=0$,得

$$u(x,y)=\int_0^x M(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^y N(x,y)\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^x(2x+3y-7)\mathrm{d}x+\int_0^y(3x+2y-8)\mathrm{d}y=$$

$$x^2-7x+6xy+y^2-8y。$$

于是方程的通解为$x^2-7x+6xy+y^2-8y=C$。

例7 求解方程$\left(y-y^2-xy\right)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$。

分析 通过对比例2,让学生明白2个方程似乎没有本质上的区别,但继续沿用例2的方法却无法求解,这里引导学生化简此方程,变化后的方程就是熟知的伯努利方程。

解 原方程化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-x}{x}y-\frac{1}{x}y^2$。令$z=y^{-1}$,代入以上方程,化简得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x-1}{x}z+\frac{1}{x}。$$

对应的齐次线性方程$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x-1}{x}z$的通解$z=c\frac{\mathrm{e}^x}{x}$。

利用常数变易法,设$z=c(x)\frac{\mathrm{e}^x}{x}$,可求得

$$c(x)=-\mathrm{e}^{-x}+\tilde{c}。$$

因此,原方程的通解为

$$y^{-1}=\left(-\mathrm{e}^{-x}+\tilde{c}\right)\frac{\mathrm{e}^x}{x}=\tilde{c}\frac{\mathrm{e}^x}{x}-\frac{1}{x}。$$

即$y=\frac{x}{\tilde{c}\mathrm{e}^x-1}$。此外,$y=0$也是解。

将例7方程中的y^2改为1,$-x$改为x,得到以下例题。

例8 求解方程$(y-1-xy)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$。

分析 引导学生用之前例题的方法逐个求解,发现都行不通,似乎方程的结构进行了微小的改变,却带来了巨大的困难。事实上并非如此,这时要求学生回忆恰当微分方程及积分因子的具体内容,逐步提示学生求解。

解 $M(x,y)=y-1-xy, N(x,y)=x$,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=1-x, \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=1。$$

所以$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=-1$,则方程的积分因子为

$$u(x)=\mathrm{e}^{\int -1\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-x}。$$

用e^{-x}乘原方程两端,得到

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)+\mathrm{d}\left(xy\mathrm{e}^{-x}\right)=0,$$

所以$1+xy=c\mathrm{e}^x$。

将例8的方程变形,可得如下例题。

例9 求解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy+1-y}{x}$。

分析 例8和例9的2个方程的形式其实是可以互化的,然而对例9的方程再次化简,让学生得出其是一阶非齐次线性方程,形式不同,用的方法也可以不同,让学生明白,有时候改变一下方程的形式,方法或许可以更简单。

解 将原方程化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-1}{x}y+\frac{1}{x}$,这是一个非齐次线性方程,对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-1}{x}y,$$

用变量分离法得到其通解为$y=c\frac{\mathrm{e}^x}{x}$。

下面用常数变易法,将上式中的c看成关于x的待定函数$c(x)$,即$y=c(x)\frac{\mathrm{e}^x}{x}$。微分之,得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=c'(x)\frac{\mathrm{e}^x}{x}+c(x)\frac{\mathrm{e}^x x-\mathrm{e}^x}{x^2},$$

代入原方程,可求得

$$c(x)=-\mathrm{e}^{-x}+\tilde{c},$$

从而,原方程的通解为

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x}\tilde{c}-\frac{1}{x}(\tilde{c}为任意常数)。$$

例10 求解方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{xy+1-y}$。

分析 例10就是例9方程的倒置形式,但是,要让学生明白,有时不通过化简方程,往往是无法求解方程的,这里鼓励学生对调x与y的地位,发现求解方法。

解 对调x与y的地位,将原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy+1-y}{x}=\frac{x-1}{x}y+\frac{1}{x},$$

再用例9的方法。

上述几个例题表明,虽然方程彼此之间的结构差异并不大,然而在采取的求解方法上有的却大相径庭,甚至简单的改变一个符号,原方法却不再适用。通过引导学生对比观察这些方程结构之间的差异,来寻找相应的解题方法。这里例题的选取是由1个例题散射到9个例题,从简单到复杂。整个

过程就像是教师给出1个例题,让学生去创造出其他的例题,同时,鼓励学生通过观察、分析、探讨来找到解题的方法。

3　结束语

习题课可以使学生进一步地理解与巩固所学知识,是课堂教学的重要组成部分。选取题目的不同、讲授题目的前后次序不同,这些都会影响到学生对概念和方法的理解程度,进而产生的教学效果也会不同。在习题课的设计中,要及时有针对性的对学生的微表情进行反馈,选取例题的难度应循序渐进,应更能符合对知识点讲解的“一追到底”,从而培养学生的逻辑推理能力和分析综合能力。

参 考 文 献

[1] 张伟年.对本科“常微分方程”课程建设若干问题的思考[J].高等理科教育,2009(2):25-27.

[2] 林媛,刘伟明.基于课程思政背景的常微分方程课程教学改革研究[J].湖北师范大学学报(自然科学版),2021,41(2):108-112.

[3] 王晓,刘雄伟.《微分方程》课程研究型教学的探索与实践[J].高等教育研究学报,2013,36(2):27-30.

[4] 国忠金,孙丹.师范专业认证视角下常微分方程课程教学改革探索[J].科教导刊,2020(12):148-149.

[5] 刘倩.高等院校常微分方程教学模式创新与实践探索[J].科技风,2019(22):48.

[6] 杨晨.常微分方程教学改革探讨[J].长春师范大学学报(自然科学版),2014,33(6):167-169.

[7] 王高雄,周之铭,朱思铭,等.常微分方程[M].3版.北京:高等教育出版社,2006.

[8] 赵侯宇.常微分方程课程教学改革初探[J].黑龙江教育(高教研究与评估),2014(11):22-23.

[9] 何春花,郑群珍,姬利娜.常微分方程课程教学改革的探索与实践[J].河南教育学院学报(自然科学版),2014,23(2):68-69.

[10] 周宇虹,杜钧.常微分方程课程中案例教学的探索、实践与思考[J].大学数学,2013,29(4):119-122.

[11] 王卿文,刘龙生,张崇权.线性代数习题课设计-以实对称矩阵正交相似定理的应用为例[J].高等数学研究,2023,26(1):89-91.

[12] 张淑琴,王洁.关于线性代数习题课教学改革的思考[J].河南教育学院学报(自然科学版),2021,30(3):48-51.

[13] 王守峰,杨义川.矩阵的Frobenius不等式的证明及应用-关于矩阵秩的习题课的一个教学设计[J].高等数学研究,2022,25(4):93-95.

[14] 严文利.浅谈正定二次型的习题课设计[J].大学数学,2010,26(5):176-179.

[15] 尹正.正定二次型的习题课设计[J].科技风,2021(6):75-77.

[16] 王文,周辉,余静.师范认证背景下实变函数习题课的教学探讨,以集合可测的条件探讨及其应用为例[J].合肥师范学院学报,2021,39(3):71-72.

[17] 高文华.浅谈高等数学习题课教学[J].高等数学研究,2011,14(5):35-37.

[18] 倪柏竹.高等数学习题微课的设计与实践:以一类硕士研究生入学试题为例[J].课程教育研究,2020(48):21-22.

[19] 熊昀暄.高等数学习题课“问题链”教学模式探究[J].产业与科技论坛,2021,20(19):146-147.

[20] 杨刘,汪忠志.数学分析习题课教学研究与实践[J].安徽工业大学学报(社会科学版),2018,35(1):79-80.

(责任编辑:马田田)