DOI：10.19789/j.1004-9398.2025.03.005
文献引用：向胡月，杨明月，孙青．具有腔支持的一维自旋轨道耦合的三维费米气体的超辐射研究［J］．首都师范大学学报（自然科学版），2025，46（3）：30-34. XIANG H Y，YANG M Y，SUN Q. Superradiation of three dimensional Fermi gases with one dimensional spin orbit coupling supported by a cavity［J］. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2025，46（3）：30-34.

具有腔支持的一维自旋轨道耦合的三维费米气体的超辐射研究*

向胡月，杨明月，孙　青**

（首都师范大学物理系，北京　100048）

摘要：基于平均场理论的方法系统地研究了腔支持的一维自旋轨道耦合的三维费米气体的超辐射转变。研究显示，自旋轨道耦合的引入会明显改变费米气体的超辐射转变行为。由自旋轨道耦合导致的单粒子能谱改变与泡利不相容原理的共同作用，系统的超辐射临界点会随着自旋轨道耦合强度的增大而增大，即自旋轨道耦合不利于超辐射的发生。进一步分析了原子光失谐的影响，得到了不考虑原子间相互作用时系统的基态相图，讨论了化学势、超辐射序参量、平均光子数和原子极化等实验可观测量在超辐射转变前后的演化特点。结果表明，自旋轨道耦合提供了一种调控费米气体超辐射行为的有效途径，有助于腔与费米子耦合系统的非平衡多体态的进一步研究。

关键词：费米气体；超辐射；自旋轨道耦合
中图分类号：O469　　**文献标志码**：A

Superradiation of three dimensional Fermi gases with one dimensional spin orbit coupling supported by a cavity*

XIANG Huyue，YANG Mingyue，SUN Qing**

（Department of Physics，Capital Normal University，Beijing　100048）

Abstract：Based on the method of mean field theory，the superradiation transition of a cavity supported three-dimensional Fermi gas coupled with a one dimensional spin-orbit-coupling（SOC）is systematically studied. The superradiation transition behavior of Fermi gas is obviously changed by the introduction of SOC. Due to the interplay between the single-particle energy spectrum change caused by SOC and Pauli exclusion principle，the superradiation threshod of the system will increase with the increase of SOC intensity，meaning that SOC tends to suppress the occurrence of superradiation. The effect of atom-light detuning is further analyzed，and the ground state phase diagram of the system without considering the interaction between atoms is obtained. The evolution characteristics of chemical potential，superradiation order parameters，average photon number and atomic polarization of observable measurements before and after the superradiation transition are discussed. The results show that the SOC provides an effective way to manipulate the superradiant behavior of Fermi gas，which is also helpful for the further study on the non-equilibrium many-body states of the cavity and fermion coupling system.

Keywords：Fermi gas；superradiation；spin-orbit coupling
CLC：O469　　**DC**：A

收稿日期：2023-03-16
*国家自然科学基金项目（11875195）
**通信作者：sunqing@cnu.edu.cn

0　引　言

因具有很强的可调控性和很高的纯净度,超冷原子系统长期以来是研究多体量子模型的重要实现平台[1]。随着Feshbach共振[2]、光晶格[3]等实验技术的日益成熟,为研究超冷原子系统中的多体量子效应、新奇物相以及光与物质的相互作用等创设了有利条件。基于此,一个重要的交叉前沿方向是光学微腔和超冷原子气体耦合系统的研究。目前该方向的主要研究内容为原子系综的超辐射转变,可以用著名的Dicke模型描述[4-6],即二能级原子系综在一定条件下可以产生集体效应——同步的吸收和发射光子。Dicke模型及其所描述的超辐射转变近年来被推广到带耗散的情况[7],并通过玻色-爱因斯坦凝聚体(Bose-Einstein condensate,BEC)耦合到光学腔中得到有效地实现[8-10]。基于BEC与空腔耦合,研究者证实了很多有趣的物理效应,如超固体[11-12]、原子之间诱导的长程相互作用[13-14]以及具有涌现$U(1)$对称性的多模超辐射[15-16]等。这些实验和理论进展补充了腔与冷原子耦合系统的超辐射动力学这一重要研究内容。

虽然目前腔与冷原子耦合实验主要集中在玻色子上,但研究人员对探索超冷费米子与光学腔耦合产生的新物理现象的兴趣浓厚。与玻色子不同,费米子遵循泡利不相容原理,2个具有弱吸引相互作用的费米子可以形成超导的库珀对。通过将超冷费米子耦合到高精密光学腔中,会出现许多新奇的物理现象,如费米表面嵌套导致的超辐射增强效应[17]、新奇的量子相[18-20]、光学晶格中的超冷费米原子之间长程相互作用诱导的非常规配对[21-23]等。特别是费米气体和空腔的结合还可以用来产生腔支持的自旋-轨道耦合[24-27],诱导出奇异的拓扑超辐射相[21]。一般来说,自旋轨道耦合的引入会显著改变体系的单粒子能谱和多体行为,可以预期体系的超辐射转变也会发生重要的改变。

本文主要研究具有腔支持的一维自旋轨道耦合(spin-orbit-coupling,SOC)的三维费米气体模型,与之前的研究[26,28]相比,本文引入了腔支持的一维SOC并考虑Dicke模型的原子-光耦合,以此探究SOC对费米气体超辐射的影响。具体来说,研究了具有腔支持的一维SOC的三维费米气体的Dicke超辐射相变。研究显示,由于SOC带来的2支非简并单粒子能谱与泡利不相容原理的共同作用,SOC的引入会不利于费米气体超辐射转变的发生,表现为超辐射临界点随SOC的增强而变大,这一行为也可以通过原子-光失谐进行调制,为进一步考虑原子间相互作用的影响打下基础。

1　模　型

为了研究光腔中具有Dicke模型耦合的一维SOC费米气体超辐射,考虑有N个二分量费米子置于体积为V、频率为ω_{C}的光学腔中,费米子的2个内部态通过双光子拉曼过程与腔模耦合,双光子过程的动量转移可以在费米子上产生有效的一维SOC,该系统的哈密顿量在动量空间可以写为:

$$\boldsymbol{H}=\sum_{k\sigma}\boldsymbol{H}_0\hat{c}_{k\sigma}^{\dagger}\hat{c}_{k\sigma}+\frac{g\left(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}\right)}{\sqrt{N}}\left(\hat{c}_{k\uparrow}^{\dagger}\hat{c}_{k\downarrow}+\hat{c}_{k\downarrow}^{\dagger}\hat{c}_{k\uparrow}\right)+\omega_{\mathrm{L}}\hat{a}^{\dagger}\hat{a},\tag{1}$$

$$\boldsymbol{H}_0=\varepsilon_k-\mu+\lambda k_z\boldsymbol{\sigma}_x+\frac{\delta}{2}\boldsymbol{\sigma}_z,\tag{2}$$

式中:第1项$\boldsymbol{H}_0$描述处于自旋$\boldsymbol{\sigma}=\uparrow$,$\downarrow$态的原子哈密顿量,其中$\varepsilon_k=\dfrac{k^2}{2m}$为原子动能量,$\mu$是化学势,$\boldsymbol{\sigma}_z$和$\boldsymbol{\sigma}_x$为泡利矩阵,$\lambda=\dfrac{k_0}{m}$为自旋轨道耦合强度,其中$k_0$表示双光子过程中的动量转移;$\hat{c}_{k\sigma}^{\dagger}$和$\hat{c}_{k\sigma}$是原子的产生和湮灭算符;$\hat{a}^{\dagger}$和$\hat{a}$是光子的产生和湮灭算符;$\delta$表示自旋向上态$\left|\uparrow\right\rangle$和自旋向下态$\left|\downarrow\right\rangle$之间的能量差,即双光子失谐;第2项描述的是原子-光耦合项,耦合强度为g;第3项是光子的能量,其中$\omega_{\mathrm{L}}=\omega_{\mathrm{C}}-\omega_{\mathrm{R}}$是2束激光的频率差,记$\epsilon_k=\varepsilon_k-\mu(\hbar=1)$。

为了得到系统的平均场基态,把腔场算符用期望值代替,即$\langle a\rangle=\alpha$,然后引入$\hat{\psi}_{k\sigma}=\begin{pmatrix}\hat{c}_{k,\uparrow}\\ \hat{c}_{k,\downarrow}^{\dagger}\end{pmatrix}$,将哈密顿量写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\sum_k\hat{\psi}_{k,\sigma}^{\dagger}\boldsymbol{M}\hat{\psi}_{k\sigma}+\sum_k\epsilon_k+\omega_{\mathrm{L}}|\alpha|^2,\tag{3}$$

式中

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\epsilon_k+\lambda k_z+\dfrac{\delta}{2} & \dfrac{g\left(\alpha^*+\alpha\right)}{\sqrt{N}}\\ \dfrac{g\left(\alpha^*+\alpha\right)}{\sqrt{N}} & \epsilon_k-\lambda k_z-\dfrac{\delta}{2}\end{pmatrix}。\tag{4}$$

将哈密顿量对角化得到

$$\boldsymbol{H}=\sum_{k,\sigma=\uparrow\downarrow}E_{k\pm}\hat{\psi}_{k,\sigma}^{\dagger}\hat{\psi}_{k\sigma}+\omega_{\mathrm{L}}|\alpha|^2,\tag{5}$$

式中$\hat{\psi}_{k\sigma}$是Bogliubov准粒子,相应的准粒子谱为

$$E_{k\pm}=\epsilon_k\pm\Lambda_k,\tag{6}$$

$$\Lambda_k=\sqrt{\left(\lambda k_z+\frac{\delta}{2}\right)^2+\frac{g^2\left(\alpha^*+\alpha\right)^2}{N}}。\tag{7}$$

利用对角化哈密顿量式(5),可以得到体系的自由能

$$F=-T\sum_{k\pm}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\beta E_{k\pm}}\right)+\omega_{\mathrm{L}}|\alpha|^2+N\mu。\tag{8}$$

对自由能求极值,可以得到光子概率幅方程(描述超辐射转变的序参数)

$$0=\frac{\partial F}{\partial\alpha}=\frac{1}{N}\sum_k\frac{g^2}{2\Lambda_k}\left[\tanh\left(\frac{E_{k+}}{2T}\right)-\tanh\left(\frac{E_{k-}}{2T}\right)\right]-\omega_{\mathrm{L}}\tag{9}$$

和原子数方程

$$N=\frac{\partial F}{\partial\mu}=\sum_k\left\{1-\left[\tanh\left(\frac{E_{k+}}{2T}\right)+\tanh\left(\frac{E_{k-}}{2T}\right)\right]\right\}。\tag{10}$$

系统的平均场基态原则上可以通过自洽求解上述2个方程得到。本文将主要针对零温度下原子-光共振和非共振耦合2种情况具体分析SOC对超辐射转变的重要影响。

2　结果与分析

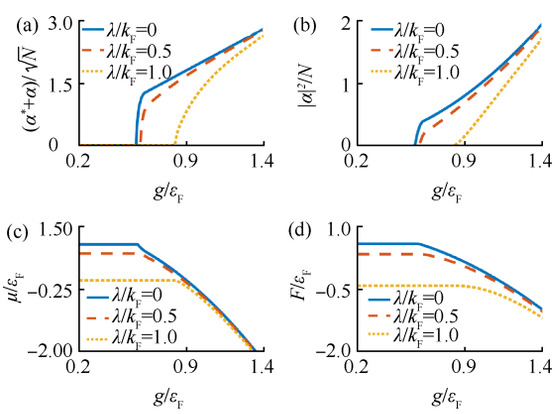
2.1　共振耦合$\delta=0$

首先考虑$T=0$时共振耦合的情况,即原子-光失谐量$\delta=0$,不失一般性固定光场频率$\omega_{\mathrm{L}}/\epsilon_{\mathrm{F}}=1$。通过自洽求解式(9和10),可以得到超辐射序参量($\frac{\left(\alpha^*+\alpha\right)}{\sqrt{N}}$)、化学势($\mu$)、平均光子数($\frac{|\alpha|^2}{N}$)和自由能($F$)随原子-光耦合强度($g$)变化曲线,如图1所示。随着$g$增大到某个临界值($g_{\mathrm{c}}$)时,$\frac{\left(\alpha^*+\alpha\right)}{\sqrt{N}}$由零转变为非零的值,这意味着系统发生了超辐射相变(图1(a))。此时,腔内开始出现$\frac{|\alpha|^2}{N}$的建立,且$\frac{|\alpha|^2}{N}$随g增大而快速增大(图1(b))。这一转变也可以从μ和F随g的演化曲线得到,如图1(c和d)所示,在发生超辐射转变之前,μ和F均保持常数,但在跨越临界点后二者均随g增加连续减小,这也表明超辐射转变为连续相变。

通过图1可以得到SOC强度λ取不同值的结果。随着SOC强度λ的增大,超辐射临界点也随之增大。为了更好地理解g_{c}与SOC强度λ的关系,对于$\delta=0$的情况,求得g_{c}的解析表达式为

$$g_{\mathrm{c}}=\begin{cases}\left[\dfrac{\sqrt{\mu+\lambda^2}^{\,3}-1-\omega_{\mathrm{L}}}{-\frac{3}{2}\sqrt{\mu+\lambda^2}-\frac{3\mu}{4\lambda}\ln\left[\frac{\sqrt{\mu+\lambda^2}+\lambda}{\sqrt{\mu+\lambda^2}-\lambda}\right]}\right]^{\frac{1}{2}}, & \mu>0,\\ \left[-\dfrac{1}{3}\dfrac{\left(2\lambda^2+\mu+\mu\lambda\right)\sqrt{\mu+\lambda^2}-2-2\omega_{\mathrm{L}}}{\sqrt{\mu+\lambda^2}-\frac{\mu}{\lambda}\ln\left[\frac{\left|\sqrt{-\mu}\right|}{\left|\sqrt{\mu+\lambda^2}+\lambda\right|}\right]}\right]^{\frac{1}{2}}, & \lambda^2<\mu\leqslant 0。\end{cases}\tag{11}$$

注意,当$\lambda=0$时,回到没有SOC的结果[5]。



注:λ为自旋轨道耦合强度。

图1　共振耦合$\delta=0$时不同参数随原子-光耦合强度(g)变化曲线

(a)超辐射序参量($\frac{\left(\alpha^*+\alpha\right)}{\sqrt{N}}$);(b)平均光子数($\frac{|\alpha|^2}{N}$);(c)化学势($\mu$);(d)自由能($F$)

结合式(11),可以得到在不同SOC强度λ的情况下,g_{c}和μ随SOC强度λ的关系,如图2所示。g_{c}随着SOC强度λ的增大而逐渐增大,相应的μ则逐渐减小。这表明,随着一维SOC的引入,单粒子能谱从2支简并的抛物线提升为非简并的2支(参考方程(6),取$\alpha=0$),此时,原子间有效的转变频率变大,使得g_{c}也随之变大,从而不利于超辐射的发生。

2.2　非共振耦合$\delta\neq0$

考虑$T=0$时,原子-光耦合偏离共振的情况,即$\delta\neq0$。类似于共振情形,通过自洽求解式(9和10),此时$\omega_{\mathrm{L}}/\epsilon_{\mathrm{F}}=1$,$\lambda/k_{\mathrm{F}}=1$,$\frac{\left(\alpha^*+\alpha\right)}{\sqrt{N}}$和$P$随$g$变化曲线如图3所示。对于不同的$\delta$,系统总会在某个$g_{\mathrm{c}}$处发生超辐射相变,相比于$\delta=0$的情形,$g_{\mathrm{c}}$随$\delta$增大

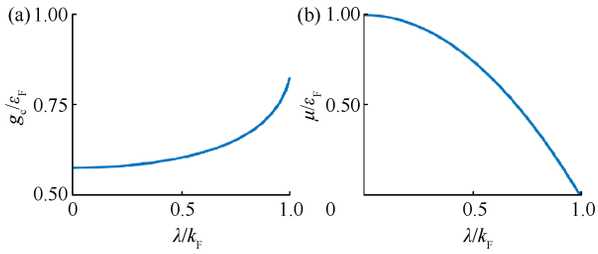


图 2　δ=0 时不同参数随 SOC 强度 λ 的变化曲线

(a)临界值(g_c);(b)μ

而增大,原因在于 δ 的增大会进一步增大原子不同自旋态间的转变频率。为了进一步刻画 δ 的影响,引入原子极化率 $(P)=\dfrac{N_\downarrow-N_\uparrow}{N_\uparrow+N_\downarrow}=\dfrac{\partial F}{\partial\delta}$。根据式(8)可求得

$$P=\sum_k\frac{\lambda k_z+\dfrac{\delta}{2}}{4\Lambda_k N}\left[\tanh\left(\frac{E_{k+}}{2T}\right)-\tanh\left(\frac{E_{k-}}{2T}\right)\right]。\quad(12)$$

由图 3(b)可知,对于给定的 SOC 强度,系统的 P 在超辐射转变发生前只与 δ 有关,并随 δ 增大而增大;发生超辐射转变后,由于超辐射光场耦合了原子的 2 个自旋态,P 随 g 增大而逐渐减小,并逐渐趋于 0。对于 $\delta=0$ 的情况,P 在超辐射转变发生前后始终保持为 0,这也是判断 δ 是否为 0 的重要特点。

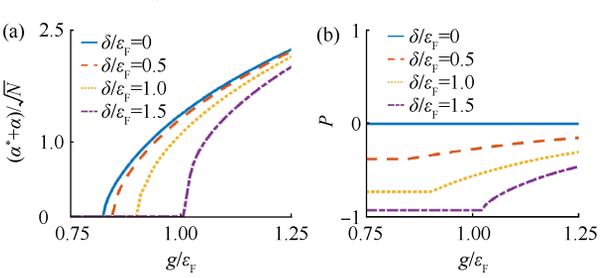


图 3　不同参数随 g 变化曲线

(a)$\dfrac{(\alpha^*+\alpha)}{\sqrt{N}}$;(b)原子极化率($P$)

进一步讨论 δ 对 $\dfrac{(\alpha^*+\alpha)}{\sqrt{N}}$ 和 P 的影响,此时 $\omega_L/\epsilon_F=1$, $\lambda/k_F=1$, 如图 4 所示。对于给定的 SOC 强度和 g,随着 δ 增大到某个 δ_c 时,$\dfrac{(\alpha^*+\alpha)}{\sqrt{N}}$ 由非零转变为零,体系超辐射消失。同时,P 随 δ 先均匀增加,在 δ_c 处于完全极化并保持不变。

结合上述结果,可以得到 $g-\delta$ 平面基态相图,此时 $\omega_L/\epsilon_F=1$, $\lambda/k_F=1$,如图 5 所示。在超辐射临界线(白色实线)以下,系统处于正常相,腔内平均光子数 $\dfrac{|\alpha|^2}{N}=0$;在临界线以上,系统处于超辐射相,

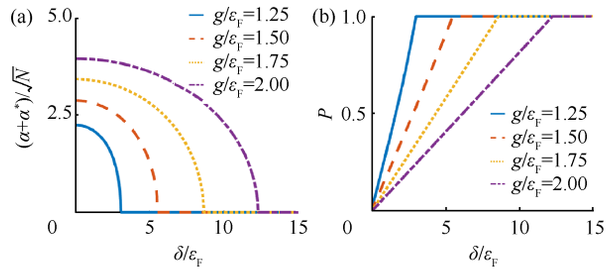
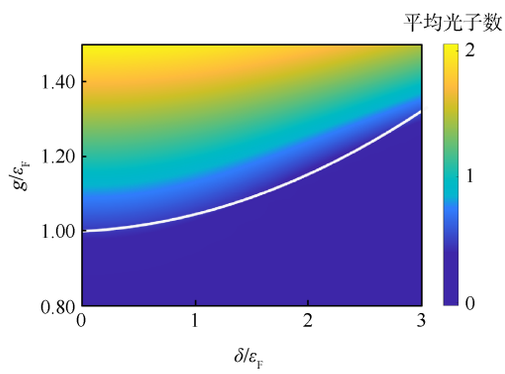


图 4　不同参数随 δ 变化曲线

(a)$\dfrac{(\alpha^*+\alpha)}{\sqrt{N}}$;(b)$P$

腔内平均光子数 $\dfrac{|\alpha|^2}{N}>0$。在实验上,腔内平均光子数可以比较方便地通过单光子技术进行测量,从而探测体系的超辐射转变。



注:白色实线为正常相与超辐射相的分界线。

图 5　$g-\delta$ 平面基态相

3　结束语

本文对具有腔支持的一维 SOC 的三维无相互作用费米气体的 Dicke 超辐射转变进行了研究。结果显示,由于一维 SOC 的引入导致的单粒子能谱改变,超辐射转变临界点变大,即 SOC 不利于费米超辐射的发生,而 δ 的增大会使得能谱变得不对称并增大原子转变频率,从而进一步提高发生超辐射转变所需的临界原子-光耦合强度。本文结果可以在目前的实验条件下进行观测,将有助于具有 SOC 的费米气体的超辐射物理和非平衡多体态的进一步研究,如考虑原子间相互作用时超流与超辐射的竞争与共存、高维 SOC 的影响等。

参 考 文 献

[1] BLOCH I, DALIBARD J, ZWERGER W. Many-body physics with ultracold gases[J]. Reviews of Modern Physics, 2007, 80(3): 885-964.

[2] CHENG C, GRIMM R, JULIENNE P, et al. Feshbach

resonances in ultracold gases[J]. Reviews of Modern Physics,2010,82(2):1225-1286.

[3] LEWENSTEIN M, SANPERA A, AHUFINGER V, et al. Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond[J]. Advances in Physics,2007,56(2):243-379.

[4] HEPP K,LIEB E H. On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the Dicke maser model[J]. Annals of Physics,1973,76(2):360-404.

[5] HEPP K,LIEB E H. Equilibrium statistical mechanics of matter interacting with the quantized radiation field[J]. Physical Review A,1973,8(5):2517-2525.

[6] WANG Y K, HIOE F T. Phase transition in the Dicke model of supperradiance[J]. Physical Review A,1973,7(3):831.

[7] DIMER F, ESTIENNE B, PARKINS A S, et al. Proposed realization of the Dicke-model quantum phase transition in an optical cavity QED system[J]. Physical Review A,2007,75(1):013804.

[8] BAUMANN K, GUERLIN C, BRENNECKE F, et al. Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity[J]. Nature,2010,464(7293):1301.

[9] NAGY D, SZIRMAI G, DOMOKOS P. Critical exponent of a quantum-noise-driven phase transition: the open-system Dicke model[J]. Physical Review A,2011,84(4):043637.

[10] BRENNECKE F, MOTTL R, BAUMANN K, et al. Real-time observation of fluctuations at the driven-dissipative Dicke phase transition[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences,2013,110(29):11763-11767.

[11] LEONARD J, MORALES A, ZUPANCIC P, et al. Supersolid formation in a quantum gas breaking a continuous translational symmetry[J]. Nature,2017,543(7643):87-90.

[12] MIVEHVAR F, OSTERMANN S, PIAZZA F, et al. Driven-dissipative supersolid in a ring cavity [J]. Physical Review Letters,2018,120(12):123601.

[13] KLINDER J, KESSLER H, BAKHTIARI M R, et al. Observation of a superradiant Mott insulator in the Dicke-Hubbard model [J]. Physical Review Letters,2015,115(23):230403.

[14] LANDIG R, HRUBY L, DOGRA N, et al. Quantum phases from competing short- and long-range interactions in an optical lattice[J]. Nature, 2016, 532(7600):476-479.

[15] LEONARD J, MORALES A, ZUPANCIC P, et al. Monitoring and manipulating Higgs and Goldstone modes in a supersolid quantum gas[J]. Science, 2017, 358(6369):1415-1418.

[16] WU Z G, CHEN Y, ZHAI H. Emergent symmetry at superradiance transition of a Bose condensate in two crossed beam cavities[J]. Science Bulletin,2018,63(9):542-547.

[17] CHEN Y, YU Z H, HUI Z. Superradiance of degenerate Fermi gases in a cavity[J]. Physical Review Letters,2014,112(14):143004.

[18] COLELLA E, CITRO R, BARSANTI M, et al. Quantum phases of spinful Fermi gases in optical cavities[J]. Physical Review B,2018,97(13):134502.

[19] FENG Y L, ZHANG K, FAN J T, et al. Quantum mixed phases of a two-dimensional polarized degenerate Fermi gas in an optical cavity[J]. Scientific Reports, 2017, 7:10568.

[20] COLELLA E, OSTERMANN S, NIEDEBZU W, et al. Antiferromagnetic self-ordering of a Fermi gas in a ring cavity[J]. New Journal of Physics,2019,21(4):043019.

[21] ZENS M, KRIMER D O, ROTTER S. Critical phenomena and nonlinear dynamics in a spin ensemble strongly coupled to a cavity II semiclassical-to-quantum boundary[J]. Physical Review A,2019,100(1):013856.

[22] SCHLAWIN F, JAKSCH D. Cavity-mediated unconventional pairing in ultracold fermionic atoms[J]. Physical Review Letters,2019,123(13):133601.

[23] ZHENG Z, WANG Z D. Cavity-induced Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superfluids of ultracold Fermi gases [J]. Physical Review A,2020,101(2):023612.

[24] YU D Y, PAN J S, LIU X J, et al. Topological superradiant state in Fermi gases with cavity induced spin-orbit coupling[J]. Frontiers of Physics, 2018, 13(1):136701.

[25] PAN J S, LIU X J, ZHANG W, et al. Topological superradiant states in a degenerate Fermi gas [J]. Physical Review Letters,2015,115(4):45303.

[26] DONG L, ZHU C Z, PU H. Photon-induced spin-orbit coupling in ultracold atoms inside optical cavity [J]. Atoms,2015,3(2):182-194.

[27] KROEZE R M, GUO Y D, LEV B L. Dynamical spin-orbit coupling of a quantum gas[J]. Physical Review Letters,2019,123(16):160404.

[28] YANG M Y, YIN H H, WEN L, et al. Dicke superradiance of a two-component Fermi gas coupled to a quantized light field[J]. Physical Review A,2021,104(5):053313.

(责任编辑:兰丽丽)