DOI:10.19789/j.1004-9398.2025.02.007
文献引用:张浩晨,韩明君,冯瑞龙.超音速FG石墨烯片增强梁的非线性静动态特性[J].首都师范大学学报(自然科学版),2025,46(2):43-51.
ZHANG H C, HAN M J, FENG R L. Nonlinear static and dynamic characteristics of functionally graded graphene platelets reinforced beam in supersonic flow [J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2025,46(2):43-51.

超音速FG石墨烯片增强梁的非线性静动态特性*

张浩晨, 韩明君**, 冯瑞龙

(兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要:为研究功能梯度石墨烯片增强复合材料(FG-GPLRC)梁在气动载荷和温度共同作用下的非线性静动态特性问题,基于经典梁理论和一阶活塞理论建立超音速流中功能梯度石墨烯片增强梁的非线性振动模型。考虑石墨烯片沿厚度方向呈现3种不同梯度分布(U-GPLRC、O-GPLRC和X-GPLRC),由哈密顿原理推导出FG-GPLRC增强梁气动弹性控制微分方程,利用Galerkin法,将其转化为非线性常微分方程,利用Routh-Hurwitz系统稳定性判据,将Hopf分岔化为非线性方程求根问题。通过参数研究,分析温度、石墨烯片质量分数、分布模式对FG-GPLRC增强梁气动弹性的稳定性影响,求解得出无量纲临界流速、临界频率和临界动压,最后通过数值计算进行FG-GPLRC增强梁气动弹性稳定性验证。结果表明:石墨烯片质量分数越大,增强效果越明显,X-GPLRC分布模式增强效果最佳。研究结果将为FG-GPLRC梁的设计优化提供理论参考依据。

关键词:石墨烯片;功能梯度;梁;气动弹性
中图分类号:O351 **文献标志码**:A

Nonlinear static and dynamic characteristics of functionally graded graphene platelets reinforced beam in supersonic flow*

ZHANG Haochen, HAN Mingjun**, FENG Ruilong

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu 730050)

Abstract: To investigate the nonlinear static and dynamic characteristics of functionally graded graphene platelets reinforced composite beam(FG-GPLRC)under the combined action of aerodynamic load and temperature. A nonlinear vibration model of functionally graded graphene platelets(GPL) reinforced beam in supersonic flow is established based on the classical beam theory and first-order piston theory. Firstly, considering that GPL presents three different gradient distributions(U-GPLRC, O-GPLRC and X-GPLRC) along the thickness direction, deriving the functional gradient graphene platelets reinforced beam aeroelastic control differential equation by applying Hamilton's principle. Secondly, using the Galliukin method, it is transformed into a nonlinear ordinary differential equation, and then the determination of the Hopf bifurcation is transformed into the root of the nonlinear equation using the stability criterion of the Routh-Hurwitz system. The effects of temperature, GPL mass fraction

收稿日期:2023-07-27
*国家自然科学基金项目(12062010)
**通信作者:hanmj5188@163.com

and distribution pattern on the stability of FG-GPLRC beam aeroelasticity were analyzed by parametric study. The solution yields dimensionless critical flow velocity, dimensionless critical frequency, and dimensionless dynamic pressure. Finally, the aeroelastic stability of the FG-GPLRC beam was verified by numerical calculations. the results show that the higher the mass fraction of gpl, the more significant the enhancement effect, and the x-gplrc distribution pattern has the best enhancement effect. the research results will provide theoretical reference for the design optimization of fg-gplrc beam.

Keywords: graphene platelets; functional graded; beam; aeroelasticity

CLC: O351 **DC**: A

0 引 言

超音速飞行器拥有高速度、高机动性、突防能力强和作战半径大等优势,现已成为各国争夺空间主动权的重要发展方向。其在高速飞行过程中面临的气动载荷和热载荷等多种严酷复合环境,对飞行器结构的稳定性有较大的影响。功能梯度材料(functionally gradient materials,FGM)是一种新型的智能化复合材料,具有机械强度高和耐高温等优点,应用广泛。石墨烯片(graphene platelets,GPL)质量密度低,具有优异的力学和热学等性能,是理想的增强材料[1]。与传统质密金属材料相比,GPL增强复合材料(graphene platelets reinforced composite,GPLRC)拥有杨氏模量高、断裂韧性强和拉伸强度大等优点。为提高FGM的力学和材料性能,对其进行GPL增强是进一步制备强轻结构的重要手段。总体来说,GPL增强FGM能大幅度提升高超音速飞行器的各项参数指标以及性能。在飞行器中存在许多诸如梁杆的桁架结构,其在超音速流等各种因素下会产生变形,对其进行GPL增强,能大大提高其力学性能,因此开展功能梯度石墨烯片增强复合材料(functionally graded graphene platelets reinforced composite beam,FG-GPLRC)梁的气动热弹性力学特性分析具有重要的研究意义。

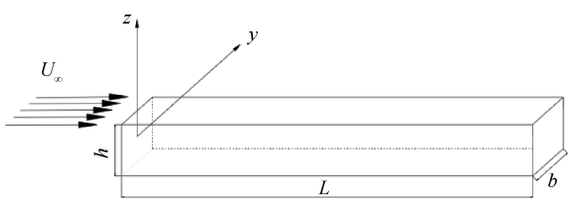
对于GPLRC以及梁的气动弹性方向,已有较多学者对其进行深入研究。Chandra等[2]经理论分析,证实GPL增强复合材料的固有频率远高于不含GPL增强的复合材料;Song等[3]得到GPL增强FGM简支板的固有频率和动态挠度响应,通过数值分析,揭示GPL增强不同的分布、质量分数、几何形状和尺寸对GPL增强FGM复合材料板的自由和受迫振动的影响;Feng等[4]表明GPL增强可以明显减小梁的非线性挠度,通过实验证明,当仅在基体中插入质量分数为0.5%和1.0%的GPL时,梁的最大挠度减轻13.7%和26.1%;Chen等[5]利用Timoshenko梁理论对GPL增强多孔复合材料梁的非线性振动和后屈曲特性进行研究,结果表明少量GPL的加入,即可显著增强梁的刚度,其非线性振动和后屈曲性能受GPL分布模式和内部孔隙的影响;Tam等[6]在考虑开边裂纹的情况下,对FG-GPLRC梁的非线性弯曲进行研究,结果表明X-GPLRC分布最能增强梁的抗弯变形能力,GPL质量分数越大,其挠度越小,但梁挠度会随着温度的升高而增大;Li等[7]对超声速流动中的夹层梁进行气动弹性分析和研究,结果表明夹层梁的临界颤振气动压力高于相同质量、长度和宽度的各向同性梁。对于超音速流中梁板结构的颤振问题,Galerkin法是普遍采用的一种方法,先将控制方程在空间域上离散,将控制方程转化为常微分方程,最后进行相应的颤振问题计算。Dowell[8]利用Galerkin法对二维和三维板的极限环振荡问题进行研究,得出板质量比、面内载荷和长宽比对板颤振的影响规律,为板颤振疲劳寿命的评估提供了依据;Qian等[9]利用Galerkin法对超声速流中Timoshenko梁的颤振机理进行研究,并利用Routh-Hurwitz准则,解析得到稳定性条件;周凯等[10]对多孔功能梯度梁进行气动热弹性研究,分析约束条件、孔隙率和温度等多种参数对多孔功能梯度梁的非线性动力学特性的影响规律;Lin等[11]对GPL增强功能梯度多层复合材料板的振动、屈曲和气动弹性进行研究,讨论GPL质量分数和分布模式等对其振动和气动弹性性能的影响,表明少量的GPL增强对复合板结构的性能有显著的增强作用。

目前,对FG-GPLRC梁研究大多是进行自由振动、屈曲及非线性振动特性分析,对使用GPL增强的FGM梁气动弹性研究较少[12]。本文基于经典梁理论和一阶活塞理论,考虑GPL沿厚度方向呈现3种

不同梯度分布,由哈密顿原理推导出FG-GPLRC梁动力学控制方程,利用Galerkin法研究不同参数对FG-GPLRC梁气动弹性的影响,并通过数值计算对其进行验证。

1　模型描述

建立在超音速流中FG-GPLRC梁的模型如图1所示。梁长、宽和高分别为L、b和h,梁两端简支,设x、y和z轴分别沿梁轴线、宽度以及厚度方向,原点位于梁左侧几何面中心。假设温度在厚度方向均匀分布,温度变化为T,在梁上表面存在沿x方向上的超音速流,流速为U_∞,空气密度为ρ_∞,马赫数为M_∞。



注:U_∞为流速;L、b和h分别为梁长、宽和高。

图1　功能梯度材料(FGM)石墨烯片(GPL)增强梁模型

研究3种不同梯度分布模式FG-GPLRC梁,每种分布模式第k层的质量分数$g_{\mathrm{GPL}}^{(k)}$为[13]:

$$\mathrm{U-GPLRC}:\ g_{\mathrm{GPL}}^{(k)}=g_{\mathrm{GPL}}^{*},$$

$$\mathrm{X-GPLRC}:\ g_{\mathrm{GPL}}^{(k)}=\frac{4g_{\mathrm{GPL}}^{*}\left[1/2+\left|k-(N_{\mathrm{L}}+1)/2\right|\right]}{2+N_{\mathrm{L}}},$$

$$\mathrm{O-GPLRC}:\ g_{\mathrm{GPL}}^{(k)}=\frac{4g_{\mathrm{GPL}}^{*}\left[(N_{\mathrm{L}}+1)/2-\left|k-(N_{\mathrm{L}}+1)/2\right|\right]}{2+N_{\mathrm{L}}},$$

式中:U-GPLRC、O-GPLRC和X-GPLRC分别表示GPL均匀分布、从梁几何中面向上下表面逐渐减少和从梁几何中面向上下表面逐渐增多;k=1,2,3,…,N_{L},N_{L}为梁的总层数;g_{GPL}^{*}为GPL质量分数;$g_{\mathrm{GPL}}^{(k)}$为第k层梁中GPL质量分数。

GPL各层弹性模量可由Halpin-Tsai微观力学模型得到[14]

$$E_{\mathrm{C}}^{(k)}=\left(\frac{3}{8}\frac{1+\xi_{\mathrm{L}}\eta_{\mathrm{L}}V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}}{1-\eta_{\mathrm{L}}V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}}+\frac{5}{8}\frac{1+\xi_{\mathrm{W}}\eta_{\mathrm{W}}V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}}{1-\eta_{\mathrm{W}}V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}}\right)E_{\mathrm{M}},\quad(1)$$

式中:E_{M}为聚合物基体的弹性模量;$E_{\mathrm{C}}^{(k)}$为梁第k层聚合物的弹性模量;$V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}$表示第k层的体积分数。其中:

$$\eta_{\mathrm{L}}=\frac{(E_{\mathrm{GPL}}/E_{\mathrm{M}})-1}{(E_{\mathrm{GPL}}/E_{\mathrm{M}})+\xi_{\mathrm{L}}},\eta_{\mathrm{W}}=\frac{(E_{\mathrm{GPL}}/E_{\mathrm{M}})-1}{(E_{\mathrm{GPL}}/E_{\mathrm{M}})+\xi_{\mathrm{W}}},\quad(2)$$

$$\xi_{\mathrm{L}}=2\left(\frac{l_{\mathrm{GPL}}}{h_{\mathrm{GPL}}}\right),\xi_{\mathrm{W}}=2\left(\frac{b_{\mathrm{GPL}}}{h_{\mathrm{GPL}}}\right),\quad(3)$$

式中:ξ_{L}和ξ_{W}为GPL的几何参数;E_{GPL}为GPL的弹性模量,GPL的长、宽和高分别为l_{GPL}、b_{GPL}和h_{GPL}。

FG-GPLRC梁第k层体积分数($V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}$)为

$$V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}=\frac{g_{\mathrm{GPL}}^{(k)}}{g_{\mathrm{GPL}}^{(k)}+(\rho_{\mathrm{GPL}}/\rho_{\mathrm{M}})(1-g_{\mathrm{GPL}}^{(k)})},\quad(4)$$

式中:ρ_{M}和ρ_{GPL}表示基体和GPL的密度。FG-GPLRC梁的泊松比($\nu_{\mathrm{C}}^{(k)}$)、密度($\rho_{\mathrm{C}}^{(k)}$)和热膨胀系数($\alpha_{\mathrm{C}}^{(k)}$)可由混合定律得到[15]:

$$\begin{cases}\nu_{\mathrm{C}}^{(k)}=\nu_{\mathrm{GPL}}V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}+\nu_{\mathrm{M}}(1-V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}),\\ \rho_{\mathrm{C}}^{(k)}=\rho_{\mathrm{GPL}}V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}+\rho_{\mathrm{M}}(1-V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}),\\ \alpha_{\mathrm{C}}^{(k)}=\alpha_{\mathrm{GPL}}V_{\mathrm{GPL}}^{(k)}+\alpha_{\mathrm{M}}(1-V_{\mathrm{GPL}}^{(k)})。\end{cases}\quad(5)$$

2　基本方程的推导

假定温度场是准定常的,u和w为沿梁x和z轴的位移,基于Von-Kármán变形理论和经典梁理论,应变位移关系可表示为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}。\quad(6)$$

应力-应变关系可表示为

$$\sigma_x^{(k)}=\frac{E_{\mathrm{C}}^{(k)}}{1-\nu_{\mathrm{C}}^{(k)^2}}\varepsilon_x-N_T^k,\quad(7)$$

式中$N_T^k=\dfrac{E_{\mathrm{C}}^{(k)}}{1-\nu_{\mathrm{C}}^{(k)}}\alpha T$。

非线性经典梁控制方程由Hamilton原理得出:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\Delta q_a&=0,\end{aligned}\quad(8)$$

式中:$I_1=\int_A\rho(z)\mathrm{d}A$,$\Delta q_a$、$M_x$和$N_x$为气动力、弯矩和梁截面上的轴力,表示如下:

$$\Delta q_a=-\frac{2q_\infty}{\beta_0}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{M_\infty^2-2}{M_\infty^2-1}\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial w}{\partial t}\right),\quad(9)$$

$$N_x=\int_A\sigma_x\mathrm{d}A=A_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-N_T,\quad(10)$$

$$M_x=\int_A z\sigma_x\mathrm{d}A=-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad(11)$$

$$\left\{A_{11},\ D_{11}\right\}=\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{L}}}\frac{E_{\mathrm{C}}^{(k)}}{1-\nu_{\mathrm{C}}^{(k)^2}}\left\{\frac{h}{N_{\mathrm{L}}},\ \frac{z_{k+1}^3-z_k^3}{3}\right\},\quad(12)$$

式中:$N_T=\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{L}}}\dfrac{E_{\mathrm{C}}^{(k)}h}{1-\nu_{\mathrm{C}}^{(k)}}\alpha T$为温度应力;$A_{11}$和$D_{11}$为梁的拉压刚度和弯曲刚度。

由于FG-GPLRC梁的边界为两端简支,则其所对应的边界条件为$u|_{x=0,L}=0$,则式(8)采用位移形式可表示为:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{A_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-N_T\right\}=0, \tag{13}$$

$$-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left\{A_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-N_T\right\}-I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\Delta q_a=0。 \tag{14}$$

对式(13)积分二次得

$$A_{11}\left[u+\frac{1}{2}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]-\int_L N_T\mathrm{d}x=B_1x+B_2, \tag{15}$$

代入边界条件得

$$B_1=\frac{A_{11}}{2L}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x-N_T,\ B_2=0, \tag{16}$$

将其带入式(14)得

$$-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left\{\frac{A_{11}}{2L}\int_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x-N_T\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\Delta q_a=0, \tag{17}$$

式中:$q_\infty=\rho_\infty U_\infty^2/2$为来流动压;$\beta_0=\sqrt{M_\infty{}^2-1}$为Prandtl-Glauert因子。

对式(17)进行无量纲化处理,其中x的一阶、二阶和四阶导数用$\bar{w}'$、$\bar{w}''$和$\bar{w}^{(4)}$表示,对时间t的一阶和二阶导数用$\dot{\bar{w}}$和$\ddot{\bar{w}}$表示,FG-GPLRC梁无量纲微分方程为

$$\bar{w}^{(4)}-e_1\left[\int_0^1(\bar{w}')^2\mathrm{d}\bar{x}-R_T\right]\bar{w}''+e_2\ddot{\bar{w}}+p_1\bar{w}'+p_2\dot{\bar{w}}=0, \tag{18}$$

式中:$\bar{w}=\frac{w}{h}$;$\bar{x}=\frac{x}{L}$;$\tau=\frac{t}{T}$;$e_1=\frac{A_{11}h^2}{2D_{11}}$;$R_T=\frac{N_TL^2}{D_{11}}$;$e_2=\frac{I_1L^4}{D_{11}T^2}$。

气动刚度系数(p_1)和气动阻尼系数(p_2)为

$$p_1=\frac{L^3\rho_\infty U_\infty^2}{D_{11}\sqrt{M_\infty^2-1}},p_2=\frac{L^2\rho_\infty U_\infty(M_\infty^2-2)}{\sqrt{I_1D_{11}}\ (M_\infty^2-1)^{\frac{3}{2}}}。 \tag{19}$$

在$x=0,1$处,FG-GPLRC梁的无量纲边界条件为

$$\bar{w}(0,\tau)=\bar{w}(1,\tau)=0,\frac{\partial^2\bar{w}(0,\tau)}{\partial\bar{x}^2}=\frac{\partial^2\bar{w}(1,\tau)}{\partial\bar{x}^2}=0。 \tag{20}$$

3 静态分岔和屈曲问题的求解

FG-GPLRC梁在超音速流中受到气动热影响后,会发生静气动弹性变形。在两端简支的情况下,为研究该变形,去除式(18)的强迫项、阻尼项和时间相关项,且$\bar{w}(\bar{x},\tau)$用$\Phi(\bar{x})$表示,表达式为

$$\Phi^{(4)}-\left[\frac{A_{11}h^2}{2D_{11}}\int_0^1(\Phi')^2\mathrm{d}\bar{x}-\frac{N_TL^2}{D_{11}}\right]\Phi''=0。 \tag{21}$$

FG-GPLRC梁边界条件为

$$\Phi|_{x=0,1}=0,\Phi''|_{x=0,1}=0。 \tag{22}$$

令$Q=\frac{N_TL^2}{D_{11}}$,$\Gamma=\frac{A_{11}h^2}{2D_{11}}\int_0^1(\Phi')^2\mathrm{d}\bar{x}$,$\lambda^2=\frac{N_TL^2}{D_{11}}-\frac{A_{11}h^2}{2D_{11}}\int_0^1(\Phi')^2\mathrm{d}\bar{x}$,$\lambda$为无量纲临界屈曲载荷的特征值,代入式(22)得

$$\Phi^{(4)}+\lambda^2\Phi''=0。 \tag{23}$$

通解为

$$\Phi(\bar{x})=c_1\sin(\lambda\bar{x})+c_2\cos(\lambda\bar{x})+c_3\bar{x}+c_4。 \tag{24}$$

代入FG-GPLRC梁边界条件,得

$$\begin{cases}c_2+c_4=0,\\ c_1\sin\lambda+c_2\cos\lambda+c_3+c_4=0,\\ \lambda^2c_2=0,\\ \lambda^2c_2\cos\lambda+\lambda^2c_1\sin\lambda=0。\end{cases} \tag{25}$$

式(24)中,$\Phi(\bar{x})$具有非零解的充要条件是方程(25)的系数行列式为0,得到的解为

$$c\sin\lambda=0或\lambda=m\pi(m=1,2,3,\cdots), \tag{26}$$

取$\lambda=m\pi(m=1,2,3,\cdots)$,得到其屈曲构型为$\Phi(x)=c\sin(m\pi\bar{x})$,将其代入关于$\lambda$表达式得

$$\Phi=\pm\frac{2}{\lambda h}\sqrt{(Q-\lambda^2)\frac{D_{11}}{A_{11}}}\sin(\lambda\bar{x})。 \tag{27}$$

为保证本文理论推导和求解结果正确性,将本文FG-GPLRC梁退化对照,并取文献[16]中参数进行计算。取未进行FG-GPLRC梁的参数$E=78.55$ GPa,$v=0.3$,$L=0.5$ m,$h=0.002$ m。此时$D_{11}=\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}$,$A_{11}=\frac{Eh}{1-v^2}$,代入式(27)得到表1数据。

表1 无石墨烯增强梁前三阶无量纲临界屈曲载荷与文献[15]对比

分布模式	文献数据[15]	本文数据
一阶	π^2	9.859 6
二阶	$4\pi^2$	39.438 4
三阶	$9\pi^2$	88.736 4

为进一步研究温度对FG-GPLRC梁的影响,由式(27)得

$$\Phi = \pm\frac{2}{\lambda h}\sqrt{\frac{hL^2F_{11}\alpha T - D_{11}\lambda^2}{A_{11}}}\sin\left(\lambda\bar{x}\right), \quad (28)$$

式中:$F_{11}=\sum_{k=1}^{N_L}\frac{E_C^{(k)}}{1-\nu_C^{(k)}}$为温度应力系数;$T$为无量纲临界屈曲温度。

本文采取算例进行分析,FG-GPLRC梁总层数N_L=10,L = 0.1 m,h = 0.01 m。FG-GPLRC梁的参量分别为$\rho_C^{(k)}$=1.23 g/cm^3,E_C=3 Gpa,$\nu_C^{(k)}$=0.34,$\alpha_C^{(k)}$=60 × 10^{-6} K^{-1};GPL的参量分别为ρ_{GPL}=1.062 3 g/cm^3,E_{GPL}=1.01 Tpa,ν_{GPL}=0.186,α_{GPL}=5 × 10^{-6} K^{-1}。如无特别说明,GPL的质量分数g_{GPL}^* = 0.3%,长度、宽度和厚度分别为l_{GPL} = 2.5 μm、b_{GPL} = 1.5 μm和h_{GPL} = 1.5 nm[17]。取梁1/4长度处进行分析,梁在温度影响下的前三阶屈曲构型静态分岔值和变化如表2和图2所示。

表2　前三阶无量纲临界屈曲构型不同分布模式下静态分岔值

分布模式	无石墨烯增强	U-GPLRC	O-GPLRC	X-GPLRC
一阶	10.3	10.3	8.2	12.4
二阶	40.9	41.1	32.8	49.5
三阶	92.1	92.4	73.8	111.1

由表2数据和图2可知:进行GPL增强会增大FG梁的F_{11}和D_{11},且变化明显,进行GPL增强会减小FG梁的$\alpha_C^{(k)}$,但效果不明显;T与$\alpha_C^{(k)}$、F_{11}成反比,与D_{11}成正比;O-GPLRC相较于GPL质量分数为0时,F_{11}起主导作用,石墨烯增强反而降低了梁的无量纲临界屈曲温度T;对于U-GPLRC和X-GPLRC,D_{11}起主导作用,加入GPL会显著增强梁的D_{11},抵消$\alpha_C^{(k)}$和F_{11}的影响,此2种分布模式均可增强梁的无量纲临界屈曲温度T。因此,O-GPLRC要先于U-GPLRC发生屈曲,出现分岔;而X-GPLRC分布D_{11}增强效果最大,最后发生屈曲。

4　Galerkin法求解振动问题

4.1　方程处理

简支边界位移函数表示为正弦函数的线性组合

$$\bar{w}(\bar{x},t)=\sum_i^n q_i(\tau)\sin(i\pi\bar{x}), \quad (29)$$

取二阶Galerkin截断方程,则$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}q_1(\tau)\\q_2(\tau)\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1(\bar{x})\\\varphi_2(\bar{x})\end{pmatrix}$,$\bar{w}(\bar{x},\tau)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}$,代入式(18)得

$$[\boldsymbol{\varphi}^4]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}-[e_1\int_0^1([\boldsymbol{\varphi}']^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q})^2\,\mathrm{d}\bar{x}-R_T][\boldsymbol{\varphi}'']^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+e_2\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{q}}+p_1[\boldsymbol{\varphi}']^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}+p_2\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}=0, \quad (30)$$

式(30)等号左右两端各项左乘$\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1(\bar{x})\\\varphi_2(\bar{x})\end{pmatrix}$,且在气动弦长[0,1]上积分得:

$$e_2\begin{pmatrix}\ddot{q}_1\\\ddot{q}_2\end{pmatrix}+p_2\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\pi^4-R_T\pi^2 & -\frac{8}{3}p_1\\\frac{8}{3}p_1 & 16\pi^4-4R_T\pi^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}+e_1\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=0, \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\pi^4q_1^3+2\pi^4q_1q_2^2\\2\pi^4q_1^2q_2+8\pi^4q_2^3\end{pmatrix}。 \quad (32)$$

令$\dot{q}_1=q_3$,$\dot{q}_2=q_4$,则$\ddot{q}_1=\dot{q}_3$,$\ddot{q}_2=\dot{q}_4$。则梁控制方程化为四维一阶非线性常微分方程组

$$\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\dot{q}_3\\\dot{q}_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}\times\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{e_1}{e_2}(1/2\pi^4q_1^3+2\pi^4q_1q_2^2)\\\frac{e_1}{e_2}(2\pi^4q_1^2q_2+8\pi^4q_2^3)\end{pmatrix}, \quad (33)$$

式中

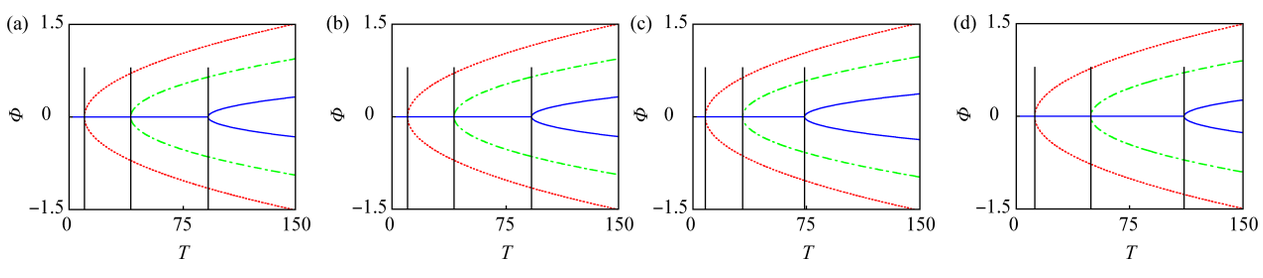


图2　不同分布模式前三阶屈曲构型静态分岔

(a)g_{GPL}^* = 0;(b)U-GPLRC;(c)O-GPLRC;(d)X-GPLRC

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{\pi^4-R_T\pi^2}{e_2} & \dfrac{8}{3e_2}p_1 & -\dfrac{1}{e_2}p_2 & 0 \\ -\dfrac{8}{3e_2}p_1 & -\dfrac{16\pi^4-4R_T\pi^2}{e_2} & 0 & -\dfrac{1}{e_2}p_2 \end{pmatrix}。\tag{34}$$

参考文献[18-20]由Routh-Hurwitz系统稳定性判据,将Hopf分岔化为非线性方程求根问题。式(33)的一个平衡点是$X_0(0,0,0,0)$,平衡点处Jacobi矩阵为$\boldsymbol{J}$,对应特征方程为$\det(\boldsymbol{J}-\chi\boldsymbol{I})=0$,展开得

$$a_0\chi^4+a_1\chi^3+a_2\chi^2+a_3\chi+a_4=0,\tag{35}$$

式中:$a_0=1$;$a_1=\dfrac{2p_2}{e_2}$;$a_2=\dfrac{17\pi^4e_2-5\pi^2e_2R_T+p_2^2}{e_2^2}$;$a_3=\dfrac{(17\pi^4-5\pi^2R_T)p_2}{e_2^2}$;$a_4=\dfrac{16\pi^8-20\pi^6R_T+4\pi^4R_T^2}{e_2^2}+\dfrac{64p_1^2}{9e_2^2}$。

各阶Hurwitz行列式为

$$\begin{cases} \Delta_1=a_1, \\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_3, \\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}=a_1a_2a_3-a_1^2a_4-a_3^2。 \end{cases}\tag{36}$$

当$M_\infty\gg0$,$\sqrt{M_\infty^2-1}=M_\infty$,代入式(19),则:

$$p_1^2=\frac{L^6\rho_\infty^2U_\infty^4}{D_{11}^2M_\infty^2},\tag{37}$$

$$p_2^2=\frac{L^4\rho_\infty^2U_\infty^2}{I_1D_{11}M_\infty^2}。\tag{38}$$

由$\Delta_3=0$,则:

$$U_{\mathrm{cr}}^2=\frac{9}{256}\frac{D_{11}}{I_1L^2}\left(\frac{17\pi^4-5\pi^2R_T}{e_2}\right)+\frac{9}{256}\frac{\pi^2D_{11}M_\infty}{\rho_\infty L^3}N,\tag{39}$$

$$N=\sqrt{\frac{\rho_\infty^2L^2}{(I_1M_\infty)^2}\left(\frac{17\pi^2-5R_T}{e_2}\right)^2+(80\pi^2-16R_T)^2}。\tag{40}$$

当$p_1=p_{1\mathrm{cr}}$时,有一对纯虚根$\pm\mathrm{i}\omega$,得

$$\omega^2=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}a_4。\tag{41}$$

令$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$,$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$,为矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征根$\mathrm{i}\omega$的左特征向量和右特征向量。由$\boldsymbol{XA}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{YA}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{XA}=1$得:

$$\boldsymbol{X}=e_3\begin{pmatrix} \dfrac{3e_2}{8p_1}\left[\left(\dfrac{16\pi^4-4R_T\pi^2}{e_2}\right)\left(\mathrm{i}\omega+\dfrac{p_2}{e_2}\right)+\mathrm{i}\omega\left(\mathrm{i}\omega+\dfrac{p_2}{e_2}\right)^2\right] \\ \mathrm{i}\omega+\dfrac{p_2}{e_2} \\ \dfrac{3e_2}{8p_1}\left[\left(\dfrac{16\pi^4-4R_T\pi^2}{e_2}\right)+\mathrm{i}\omega\left(\mathrm{i}\omega+\dfrac{p_2}{e_2}\right)\right] \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3e_2}{8p_1}\left[\left(\dfrac{\pi^4-R_T\pi^2}{e_2}\right)-\left(\omega^2+\dfrac{\mathrm{i}\omega p_2}{e_2}\right)\right] \\ \mathrm{i}\omega \\ \dfrac{3e_2}{8p_1}\left[\mathrm{i}\omega\left(\dfrac{\pi^4-R_T\pi^2}{e_2}\right)-\left(\mathrm{i}\omega^3+\omega^2\dfrac{p_2}{e_2}\right)\right] \end{pmatrix},\tag{42}$$

$$e_3=\frac{8p_1e_2}{3p_2\left(17\pi^4-5\pi^2R_T-(5e_2+1)\omega^2\right)+6\mathrm{i}\omega p_2^2}+\frac{8p_1e_2}{3\mathrm{i}\omega(33\pi^4e_2+\pi^4-9\pi^2e_2R_T-\pi^2R_T-3\omega^2e_2^2-\omega^2e_2)},\tag{43}$$

由$B=\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(p_1)}{\mathrm{d}p_1}\right|_{p_1=p_{1\mathrm{cr}}}$可知,在$p_1=p_{1\mathrm{cr}}$处,发生Hope分岔。

在参数$p_1=p_{1\mathrm{cr}}=\dfrac{L^3\rho_\infty}{D_{11}M_\infty}U_{\mathrm{cr}}^2$附近,纯虚根$\mathrm{i}\omega$可写为

$$\zeta_{1,2}(p_1)=\alpha(p_1)\pm\mathrm{i}\omega(p_1),\tag{44}$$

式中:$\alpha(p_1)=0$,$\omega(p_1)>0$,则$\boldsymbol{X}(p_1)\boldsymbol{A}(p_1)\boldsymbol{Y}(p_1)=\alpha(p_1)\pm\mathrm{i}\omega(p_1)$,得到

$$\alpha'(p_1)=\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{X}(p_{1\mathrm{cr}})\boldsymbol{A}(p_{1\mathrm{cr}})\boldsymbol{Y}(p_{1\mathrm{cr}})\right),\tag{45}$$

计算得到$\alpha'(p_1)$在$p_1=p_{1\mathrm{cr}}=\dfrac{L^3\rho_\infty}{D_{11}M_\infty}U_{\mathrm{cr}}^2\neq0$,发生Hopf分岔,且满足

$$\begin{aligned} &a_1>0,a_2>0,\cdots,a_n>0, \\ &\Delta_{n-1}=0,\Delta_i>0,\ (i=n-3,n-5,\cdots), \end{aligned}\tag{46}$$

在$U=U_{\mathrm{cr}}$时FG-GPLRC梁发生颤振。

4.2 数值算例

将本文FG-GPLRC梁退化对照,并取文献[21]中参数进行计算。取未添加FG-GPLRC梁参数$E=78.55\ \mathrm{GPa}$,$\nu=0.3$,$L=0.5\ \mathrm{m}$,$h=0.002\ \mathrm{m}$,$\rho_\infty=0.364\ \mathrm{kg/m^3}$,$M_\infty=5$。当$R_T=3\pi^2/4$时,得出表3中退化数据各阶Hurwitz行列式$\Delta_1$和$\Delta_2$、$D_{11}$、$U_{\mathrm{cr}}$、$p_{1\mathrm{cr}}$

和ω,与文献对应数据基本一致。

参考文献[22]中参数$\rho_\infty = 0.364\ \mathrm{kg/m^3}$,$M_\infty = 5$,$L = 0.3\ \mathrm{m}$,$h = 0.004\ \mathrm{m}$。得到在不同$R_T$和分布模式情况下梁系统随GPL质量分数增长时的$U_{cr}$和$\omega$。图3所示当$R_T$为$\pi^2/4$、$3\pi^2/4$和$5\pi^2/4$时,随GPL质量分数改变,$U_{cr}$变化情况。当FG-GPLRC梁发生颤振时,GPL的g^*_{GPL}和U_{cr}之间几乎呈线性正相关;当GPL质量分数固定时,X-GPLRC中U_{cr}增强效果最大,U-GPLRC次之,O-GPLRC较差,此现象说明将GPL加入到靠近梁的上下表面位置,同时远离中面位置对梁的D_{11}增强效果最明显,从而最能增强其U_{cr};当GPL质量分数不变且同种分布情况下,随R_T增加,U_{cr}逐渐减小。

GPL质量分数和分布模式对ω影响极小,根据所得公式,ω主要与ρ_C、R_T有关,质量分数和分布模式改变,对FG-GPLRC梁D_{11}影响较大,但对于ρ_C影响甚微。不同R_T和分布模式下D_{11}、ρ_C和ω如图4所示,GPL密度与基体密度相近,质量分数和分布模式的改变,对FG-GPLRC梁密度影响较小。R_T对ω影响较大,随着R_T增加,ω逐渐减小。

4.3　稳定性验证及分析

3种不同分布情况下,p_{1cr}变化极小,因为p_{1cr}是由式(37)和(39)得出,消去了弯曲刚度的影响,3种分布的不同仅通过梁密度体现,而梁密度改变甚微,导致3种分布的无量纲动压差别极小,但依旧是X-GPLRC优于U-GPLRC优于O-GPLRC。

超音速流中FG-GPLRC梁系统于平衡点$X_0(0,0,0,0)$处发生Hopf分岔,即在p_1到达p_{1cr}时开始颤振。当$p_1<p_{1cr}$时,超音速流中FG-GPLRC梁在平衡点处于稳定状态;当$p_1>p_{1cr}$时,在平衡点处于不稳定状态。当为X-GPLRC分布,$g^*_{GPL} = 0.3\%$时,计算得出不同R_T对应下平衡点处Jacobi矩阵特征值,以验证该结论。

当FG-GPLRC梁中的GPL分布模式为X-GPLRC,$g^*_{GPL} = 0.3\%$,$p_1 = 233$时,初值取(0.005, 0.005, 0.010, 0.100),得到不同R_T情况如表4和图5所示。可

表3　无量纲临界流速等数据与文献对比

数据验证	Δ_1	Δ_2	D_{11}	U_{cr}	p_{1cr}	ω
文献[21]数据	2.512 48	1 645.57	57.546	1 219.02	234.99	25.561 3
本文数据	2.502 76	1 619.04	57.546	1 214.30	233.17	25.403 4

注:Δ_1和Δ_2为Hurwitz行列式;D_{11}为弯曲刚度;U_{cr}为无量纲临界流速;p_{1cr}为无量纲临界动压;ω为无量纲临界。

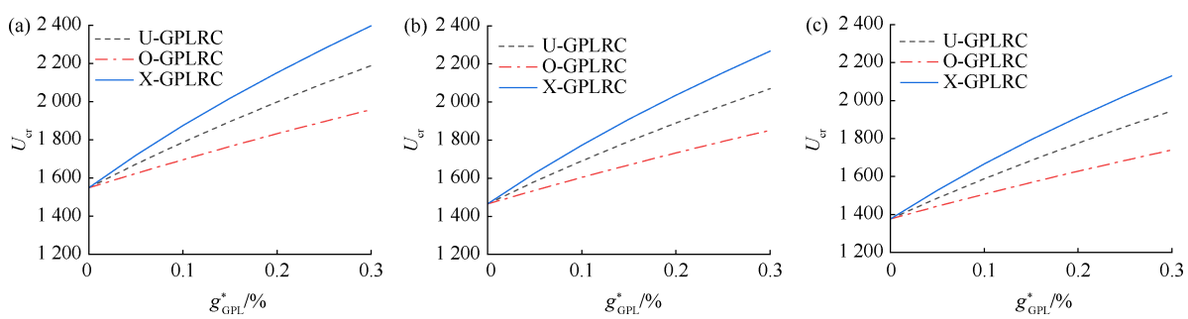


图3　不同无量纲热载荷(R_T)和分布模式下无量纲临界流速(U_{cr})

(a)$R_T=\pi^2/4$;(b)$R_T=3\pi^2/4$;(c)$R_T=5\pi^2/4$

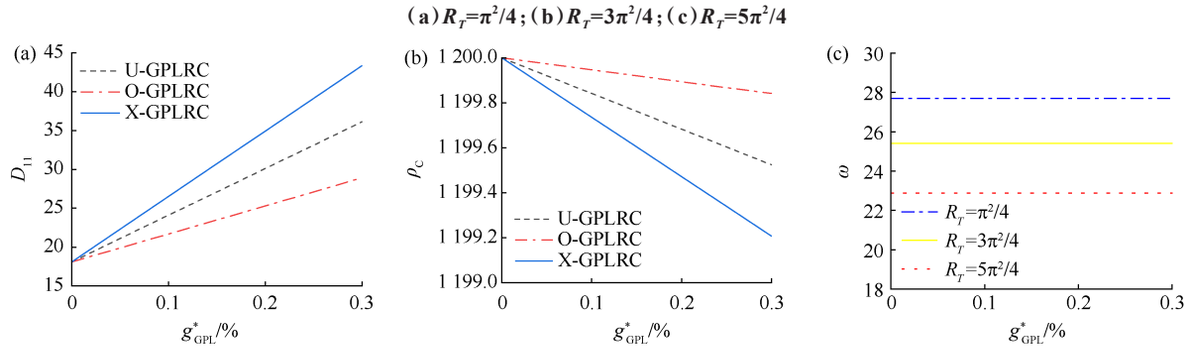


图4　不同分布模式下弯曲刚度(D_{11})、密度(ρ_C)和不同R_T的无量纲临界频率(ω)

(a)弯曲刚度;(b)密度;(c)无量纲临界频率

表4　X-GPLRC时的Jacobi矩阵的特征值

无量纲动压(p_{1cr})	$R_T=\pi^2/4$	$R_T=3\pi^2/4$	$R_T=5\pi^2/4$
205.639 983 0	0.544 5±34.528 5i	−0.515 1±30.601 6i	0±22.881 7i
	−0.544 5±18.476 6i	−0.515 1±18.806 5i	−0.967 6±22.881 7i
233.075 292 8	−0.544 5±32.797 1i	0±25.403 4i	5.706 2±23.699 3i
	−0.544 5±21.399 8i	−1.030 1±25.403 4i	−6.673 8±23.699 3i
260.510 603 8	0±27.696 5i	5.453 1±26.090 0i	8.237 8±24.482 8i
	−1.089 1±27.696 5i	−6.483 2±26.090 0i	−9.205 4±24.482 8i

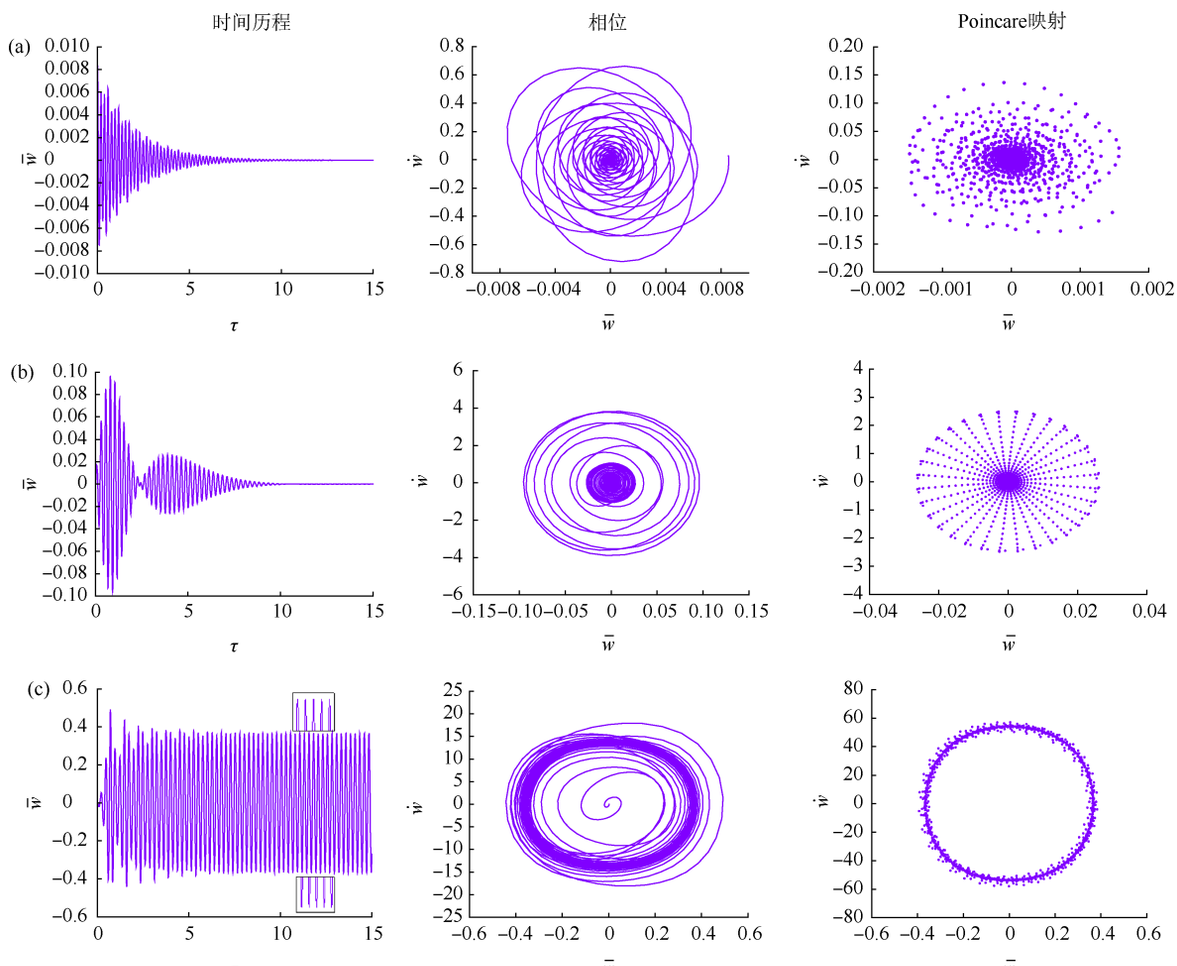


图5　不同R_T系统的时间历程、相位和Poincare映射

(a)$R_T=\pi^2/4$;(b)$R_T=3\pi^2/4$;(c)$R_T=5\pi^2/4$

验证:FG-GPLRC梁在p_1到达p_{1cr}时发生颤振,当$p_1<p_{1cr}$时,Jacobi矩阵的特征值全具有负实部,梁在平衡点是稳定的,平衡点的扰动在一段时间后会重新恢复平衡;当$p_1>p_{1cr}$时,一对复特征值具有负实部,另一对复特征值具有正实部,梁在平衡点是不稳定的,当受到任意扰动后,将会做稳定的极限环振荡运动[23]。R_T增大会使FG-GPLRC梁的p_{1cr}减小,在相同的p_1下,R_T增大会使梁振幅增大。

5　结　论

基于经典梁理论,对FG-GPLRC梁非线性静动态特性进行分析,通过数值算例讨论GPL不同分布模式梁的静态分岔和屈曲问题,讨论GPL质量分数、分布模式及R_T等参数改变对梁U_{cr}、ω和p_{1cr}的影响,通过数值计算对FG-GPLRC梁p_{1cr}进行验证,得出如下主要结论:(1)FG梁进行GPL增强,对降低梁的$\alpha_C^{(k)}$效果不明显;由于温度系数和弯曲刚度的影响,O-GPLRC

相较于未加入石墨烯增强时,反而使梁的无量纲临界屈曲温度降低,对于U-GPLRC和X-GPLRC,增强了梁系统的无量纲临界屈曲温度。(2)加入极低质量分数的GPL即可增大梁发生颤振时的U_{cr},且质量分数越大,增强效果越明显;当GPL质量分数固定时,采用X-GPLRC分布模式对U_{cr}增强效果最明显,即在靠近梁上下表面位置添加较多的GPL进行增强效果最好;随着R_T的增加,U_{cr}逐渐减小。(3)GPL质量分数和分布模式对ω、p_{1cr}影响甚微,R_T对其影响较大,随着R_T增大,梁的振幅逐渐增大,从而变得更不稳定,因此在工程实际中要着重考虑温度的影响。

参 考 文 献

[1] 王琳杰,黎亮,章定国,等.热环境下大范围运动功能梯度薄板的刚-柔耦合动力学特性[J].振动与冲击,2019,38(18):79-88.

[2] CHANDRA Y, CHOWDHURY R, SCARPA F, et al. Vibration frequency of graphene based composites: a multiscale approach [J]. Materials Science and Engineering B,2012,177(3):303-310.

[3] SONG M, KITIPORNCHAI S, YANG J. Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets [J]. Composite Structures,2017,159:579-588.

[4] FENG C, KITIPORNCHAI S, YANG J. Nonlinear bending of polymer nanocomposite beams reinforced with non-uniformly distributed graphene platelets (GPLs)[J]. Composites Part B (Engineering), 2017, 110:132-140.

[5] CHEN D, YANG J, KITIPORNCHAI S. Nonlinear vibration and postbuckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite beams [J]. Composites Science and Technology, 2017, 142: 235-245.

[6] TAM M, YANG Z, ZHAO S, et al. Nonlinear bending of elastically restrained functionally graded graphene nanoplatelet reinforced beams with an open edge crack [J]. Thin-Walled Structures,2020,156:106972.

[7] LI F, SONG Z, SUN C. Aeroelastic properties of sandwich beam with pyramidal lattice core considering geometric nonlinearity in the supersonic airflow [J]. Acta Mechanica Solida Sinica,2015,28(6):639-646.

[8] DOWELL E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate[J]. AIAA Journal,1966,4(7):1267-1275.

[9] QIAN Y J, YANG X D, ZHANG W, et al. Flutter mechanism of Timoshenko beams in supersonic flow [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2019, 32(4): 04019033.

[10] 周凯,倪臻,华宏星.一般约束边界下多孔FGM梁的非线性气动热弹性动力学特性研究[J].振动与冲击,2021,40(20):34-41.

[11] LIN H G, CAO D Q, XU Y Q. Vibration, buckling and aeroelastic analyses of functionally graded multilayer graphene-nanoplatelets-reinforced composite plates embedded in piezoelectric layers [J]. International Journal of Applied Mechanics,2018,10(3):1850023.

[12] 王壮壮,马连生.高阶剪切变形板理论下FG-GRC板的屈曲和弯曲分析[J].工程力学,2023,40(6):9-18.

[13] 张靖华,司成龙,马浩.石墨烯增强功能梯度梁自由振动的解析解[J].兰州理工大学学报,2023,49(2):49-55.

[14] GU X J, ZHANG W, ZHANG Y F. Nonlinear vibrations of rotating pretwisted composite blade reinforced by functionally graded graphene platelets under combined aerodynamic load and airflow in tip clearance [J]. Nonlinear Dynamics,2021,105(2):1503-1532.

[15] HEJAZI S M, ABTAHI S M, SAFAIE F. Investigation of thermal stress distribution in fiber-reinforced roller compacted concrete pavements[J]. Journal of Industrial Textiles,2016,45(5):896-914.

[16] 王广胜.超音速气流下壁板颤振的动力学响应[D].沈阳:沈阳航空航天大学,2014.

[17] YANG J, WU H, KITIPORNCHAI S. Buckling and postbuckling of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced composite beams [J]. Composite Structures,2017,161:111-118.

[18] 张继业,杨翊仁,曾京.Hopf分岔的代数判据及其在车辆动力学中的应用[J].力学学报,2000(5):596-605.

[19] 陈文成,陈国良.Hopf分枝的代数判据[J].应用数学学报,1992(2):251-259.

[20] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H, et al. Theory and applications of Hopf bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press,1981.

[21] 曹丽娜.超音速流中飞行器壁板的气动弹性稳定性研究[D].长春:吉林大学,2020.

[22] 杨智春,周建,谷迎松.超音速气流中受热曲壁板的非线性颤振特性[J].力学学报,2012,44(1):30-38.

[23] 韩明君,李金佩,王鹏.超音速流-热载作用下梯度多孔壁板的非线性振动特性分析[J].振动与冲击,2023,42(2):225-234.

(责任编辑:兰丽丽)