DOI:10.19789/j.1004-9398.2025.02.006
文献引用:巩星田,杨树伟.巧用边界曲线的参数方程计算二重积分[J].首都师范大学学报(自然科学版),2025,46(2):38-42+67. GONG X T, YANG S W. Calculating the double integrals by using parametric equations of boundary curves[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2025,46(2):38-42+67.

巧用边界曲线的参数方程计算二重积分*

巩星田[1**]，杨树伟[2]

(1. 兰州工商学院数学教学部，甘肃　兰州　730101；
2. 兰州理工大学理学院，甘肃　兰州　730050)

摘要:为研究二重积分的计算方法,利用积分区域边界曲线的参数方程提出一个将矩形区域对应到积分区域D上的映射,在此映射下提出并证明了将直角坐标系下二重积分转化为参数坐标下二重积分的计算公式。通过一些算例验证了该理论应用的一般性与有效性。

关键词:二重积分;边界曲线;参数方程;坐标变换
中图分类号:O172.2　　**文献标志码**:A

Calculating the double integrals by using parametric equations of boundary curves*

GONG Xingtian[1**], YANG Shuwei[2]

(1. Teaching Department of Mathematics, Lanzhou Technology and Business College, Lanzhou Gansu　730101; 2. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu　730050)

Abstract: To calculate the double integral, a mapping is proposed with the rectangular region to the integral region D using the parametric equation of the boundary curve of the integral region. Then a formula is proposed and proved for converting the double integral in the cartesian coordinate system into the double integral in parametric coordinates. Finally, the generality and validity of the application of the theory are demonstrated by some examples.

Keywords: double integral; boundary curves; parametric equation; coordinate transformation
CLC: O172.2　　**DC**: A

0　引　言

积分学在物理学、几何学、天文学和经济学等领域的发展中起着重要作用,同时也在高等数学的教学中占据重要地位。在高等数学的教学中,二重积分是多元积分学的基础,也是困扰学生的一个难点。故而如何快速、简便地计算二重积分是值得人们探讨的问题。目前来说二重积分的计算主要有以下几种情况:(1)将重积分降维处理后求解,即先确定积分区域的边界,后选择恰当的积分次序将二重积分转化为累次积分的计算[1-5];(2)根据积分区域的对称性、被积函数的奇偶性和重积分相关性质等来化简积分再求解[6-10];(3)利用分部积分法计算二重积分[11-13];(4)结合被积函数和积分区域的特点选

收稿日期:2023-05-29
*甘肃省教育厅高等学校创新基金项目(2023B-403)
**通信作者:tianshui1009@163.com

择恰当的变量代换来求解[14-18]。李萍等[16]提出利用变量代换求解二重积分,但变量代换取决于被积函数的简化及积分区域的界定,故而需要具体问题具体分析;张文丽和张安玲[17]提出当积分区域规则时采用线性变换,当为不规则变形的四边形时采用非线性变换,随后再根据被积函数寻找变量变换公式求解;林伟等[18]提出了4种特殊的非圆弧扇形环域上二重积分的变换。可见,通过适当的坐标变换、选择合理的坐标系无疑对简化积分区域及化简被积函数进而计算二重积分具有十分重要的意义;而寻找将常见的简单区域(如矩形)对应到积分区域上的一般性映射更是能将二重积分的计算方法上升到理论层面研究。同时,现阶段依然存在大量计算繁杂甚至是无法求解的二重积分问题迫切需要寻找新的解决办法。

本文先利用积分区域边界曲线的参数方程提出一个将矩形区域对应到积分区域上的映射,并在此映射下提出并证明了将直角坐标系下二重积分转化为参数坐标下二重积分的计算公式;随后通过一些算例证明了此变换不仅能够解决任何极坐标变换下可求解的二重积分,而且可以很好地解决部分直角坐标系和极坐标变换下无法求解的二重积分,从而论证了该方法的一般性和有效性。

1　坐标变换

设二元函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,考虑二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

教材中对二重积分换元法提出如下定理[19-20]。

定理1　设函数$f(x,y)$在xOy平面上的闭区域D上连续,若变换

$$T: x=x(u,v),\ y=y(u,v),$$

将uOv平面上的闭区域$\prod$1对1地映射成xOy平面上的闭区域D,且满足:

(1)$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$在$\prod$内具有一阶连续偏导数;

(2)雅克比式$J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$, $(u,v)\in\Pi$。

则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\iint_\Pi f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v。 \tag{2}$$

由此,当被积函数不易或无法在直角坐标系下计算,或积分区域D的边界曲线不易在直角坐标系下表示而用极坐标方程表示更为简单时,便可采用极坐标变换下二重积分的计算。然而由于被积函数或积分区域的特殊性导致以上方法仍然无法求解时,又该如何解决呢?为此,本文提出利用区域D边界曲线的参数方程来计算二重积分。对于积分区域D,给出如下定义。

定义1　给定普通三角形ABC,若去掉其中一条边,然后用1条简单曲线连接2个端点所构成的闭区域,称之为曲边三角形,并将曲边所对的角称为曲边三角形的顶角。

依据顶角α的不同(图1),曲边三角形表现为如下4种情况:

(1)顶角$0<\alpha<\pi$,曲边三角形如图1(a)所示;

(2)顶角$\alpha=\pi$,曲边三角形如图1(b)所示,此时可看作2个曲边三角形的并;

(3)顶角$\pi<\alpha<2\pi$,曲边三角形如图1(c)所示;

(4)顶角$\alpha=2\pi$,曲边三角形如图1(d)所示,此时可看作若干个曲边三角形的并。

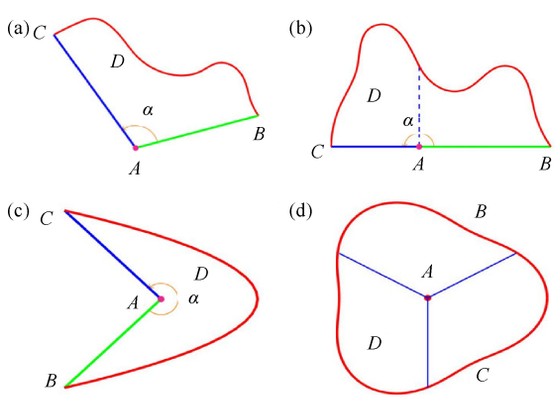


图1　不同顶角α的曲边三角形表现

(a)$0<\alpha<\pi$;(b)$\alpha=\pi$;(c)$\pi<\alpha<2\pi$;(d)$\alpha=2\pi$

平面上的任一闭区域D,总可以将其看做若干个曲边三角形的并,这样一来,曲边三角形就构成平面闭区域的基本单元。为计算曲边三角形区域上的二重积分,需要先将曲边三角形参数化表示。

给定积分区域D,其为曲边三角形ABC,顶点为A,曲边为BC(图1),假设曲边BC的参数方程为

$$\Gamma: \boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t)),\quad t\in[a,b]\subseteq[0,2\pi]。 \tag{3}$$

设$0\leqslant\eta\leqslant 1$,作映射

$$\boldsymbol{p}(\eta,t)=\boldsymbol{A}+\eta(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{A}), \tag{4}$$

则其将矩形区域$\Pi=[0,1]\times[a,b]$映射为闭区域

D。若积分区域D的顶点A与坐标原点O重合,此时映射可简化为$\boldsymbol{p}(\eta,t)=\eta\boldsymbol{x}(t)$,即

$$\boldsymbol{p}:\begin{cases}x=x(\eta,t)=\eta x_1(t),\\ y=y(\eta,t)=\eta x_2(t),\end{cases}\quad(\eta,t)\in\Pi,\qquad(5)$$

称这种变换为边界收缩变换,对应的Jacobian式为

$$J(\eta,t)=\eta\big(x_1(t)x_2'(t)-x_1'(t)x_2(t)\big)。\qquad(6)$$

依据定理1,边界收缩变换是一种二重积分换元法,可以得到下面的结论。

定理2　设式(6)中$J(\eta,t)\neq0$,当参数$t\in[a,b]\subset[0,2\pi]$时(如图1(a~c)),边界收缩变换式(5)为一对一映射,且可得二重积分换元法公式

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Pi f(\eta x_1(t),\eta x_2(t))|J(\eta,t)|\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t。\qquad(7)$$

由于Π为矩形区域,进一步

$$\iint_\Pi f(\eta x_1(t),\eta x_2(t))|J(\eta,t)|\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t=\int_a^b\mathrm{d}t\int_0^1 f(\eta x_1(t),\eta x_2(t))|J(\eta,t)|\mathrm{d}\eta。\qquad(8)$$

当参数$t\in[0,2\pi]$时,此映射虽不是一对一的,但仍有如下结论。

定理3　设$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,边界曲线的参数方程(3)可微且$t\in[0,2\pi]$,若边界收缩变换式(5)下$x_1(t)x_2'(t)-x_1'(t)x_2(t)\neq0$,则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Pi f(\eta x_1(t),\eta x_2(t))|J(\eta,t)|\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t。\qquad(9)$$

证明　矩形区域Π和闭区域D如图2所示,对于区域D,Π为ηOt平面上的矩形区域$[0,1]\times[0,2\pi]$。设D_ε为区域D中除去以原点为中心,以$\varepsilon\boldsymbol{x}(t)$(这里$0<\varepsilon<1$)为边界的区域后的剩余区域,$D_\varepsilon'$为$D_\varepsilon$中除去中心角为$\varepsilon$的区域$AA'B'B$后所剩区域(见图3(a)),则在坐标变换式(5)下,D_ε'对应ηOt平面上的矩形区域$\Pi_\varepsilon=[\varepsilon,1]\times[0,2\pi-\varepsilon)$(见图3(b))。而在坐标变换式(5)下,$D_\varepsilon'$与$\Pi_\varepsilon$之间为一对一变换,且$\Pi_\varepsilon$上Jacobian式$J(\eta,t)=\eta\big(x_1(t)x_2'(t)-x_1'(t)x_2(t)\big)\neq0$。故由定理1得

$$\iint_{D_\varepsilon'}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Pi_\varepsilon}f(\eta x_1(t),\eta x_2(t))|J(\eta,t)|\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t。$$

又因为$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,令$\varepsilon\to0$,即得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Pi f(\eta x_1(t),\eta x_2(t))|J(\eta,t)|\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t。$$

由此可知,在边界收缩变换下计算二重积分,

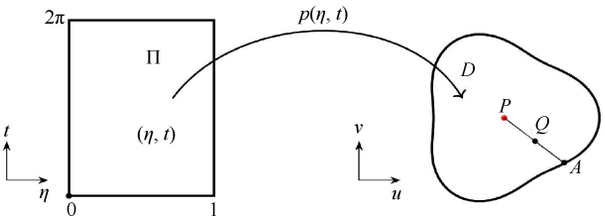


图2　矩形区域Π和闭区域D

只须将变量做相应地替换并把面积微元$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$换成$|J(\eta,t)|\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t$,由于$\Pi$为一矩形区域,故而可将式(9)化为累次积分

$$\iint_\Pi f(\eta x_1(t),\eta x_2(t))|J(\eta,t)|\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\int_0^1 f(\eta x_1(t),\eta x_2(t))|J(\eta,t)|\mathrm{d}\eta。\qquad(10)$$

注1　定理中假设了$x_1(t)x_2'(t)-x_1'(t)x_2(t)\neq0$。事实上,当其在区域$D$的个别点上等于零或只在一条线上等于零而在其他点上非零时,上述结论仍然成立。

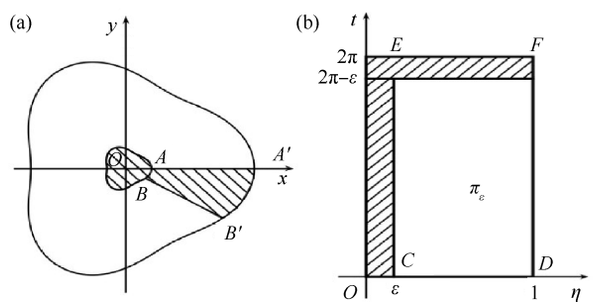


图3　不同积分区域示意
(a)积分区域D_ε';(b)积分区域Π_ε

2　算　例

例1　计算二重积分

$$\iint_D\exp(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中区域D是圆心在原点,半径为a的圆域。

解　圆周的参数方程为

$$\begin{cases}x_1(t)=a\cos t,\\ x_2(t)=a\sin t,\end{cases}\quad0\leqslant t<2\pi,$$

作边界收缩变换

$$\begin{cases}x=\eta a\cos t,\quad 0\leqslant\eta\leqslant1,\\ y=\eta a\sin t,\quad 0\leqslant t<2\pi,\end{cases}$$

于是

$$\iint_D\exp(-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Pi\exp(-a^2\eta^2)a^2\eta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t=\pi(1-\exp(-a^2))。$$

例2　计算二重积分

$$\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

式中D是由x轴和半圆$y = \sqrt{2ax - x^2}$所围成的闭区域。

解　如图4(a)所示,半圆周的参数方程为

$$\begin{cases} x_1(t) = a + a\cos t, \\ x_2(t) = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi。$$

记$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [0,1]$,作变换$\boldsymbol{p}(\eta, t) = \eta\boldsymbol{x}(t)$,

$$\begin{cases} x = a\eta(1 + \cos t), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \\ y = a\eta\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$$

则其将矩形区域$\Pi = [0,1] \times [0,\pi]$映为积分区域$D$,且被积函数为$\sqrt{4a^2 - 2a^2\eta^2(1 + \cos t)}$, $J(\eta, t) = a^2\eta(1 + \cos t)$,故

$$\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}t \int_0^1 a^2\eta(1 + \cos t)\sqrt{4a^2 - 2a^2\eta^2(1 + \cos t)}\,\mathrm{d}\eta =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^{\pi}\left\{8a^3 - (\sqrt{2}\,a)^3(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}\right\}\mathrm{d}t = \frac{8}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)。$$

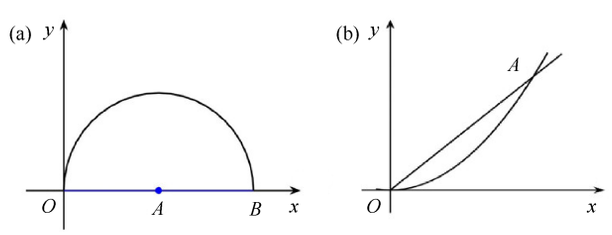


图4　积分区域D
(a)例2;(b)例3

不难看出,例1、例2在边界收缩变换下的2层积分限彼此没有依赖性,计算过程更加简单方便,由此说明边界收缩变换提供了一种计算二重积分的新途径。当然这2个例子也可以在极坐标变换下来计算。

例3　计算二重积分$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$。

解　积分区域如图4(b)所示,弧线OA满足参数方程

$$\begin{cases} x_1(t) = t, \\ x_2(t) = t^2, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

作变换

$$\begin{cases} x = \eta t, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \\ y = \eta t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

则此变换将矩形区域$\Pi = [0,1] \times [0,1]$映为积分区域D,且$J(\eta, t) = \eta t^2$,

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \iint_{\Pi} \frac{\sin(\eta t)}{\eta t}\eta t^2\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 t\sin(\eta t)\,\mathrm{d}\eta = \int_0^1 (1 - \cos t)\,\mathrm{d}t = 1 - \sin 1。$$

例3虽然在直角坐标系下也可以计算,但需要先交换积分次序后进行;相比之下,边界收缩变换下的计算方法更加快捷方便。

例4　计算二重积分

$$\iint_D \exp\left(\frac{y - x}{y + x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中区域D是x轴、y轴,以及$x + y = 2$所围成的三角形区域。

解　区域边界$x + y = 2$的参数方程为

$$\begin{cases} x_1(t) = t, \\ x_2(t) = 2 - t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2,$$

记$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$,作变换$\boldsymbol{p}(\eta, t) = \eta\boldsymbol{x}(t)$,

$$\begin{cases} x = \eta t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ y = \eta(2 - t), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \end{cases}$$

此变换将矩形区域$\Pi = [0,1] \times [0,2]$映为三角形区域D,且$J(\eta, t) = -2\eta$。因此,

$$\iint_D \exp\left(\frac{y - x}{y + x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}\eta \int_0^2 2\eta\exp(1 - t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}。$$

例5　计算积分

$$\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x + y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

式中D是顶点分别为$(0,0)$,$(1,0)$和$(0,1)$的三角形区域。

解　注意到

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \sqrt{\frac{xy}{x + y}} = 0,$$

因此该二重积分存在。

连接$(1,0)$和$(0,1)$,由线段的直角坐标方程$x + y = 1$可得其参数方程

$$\begin{cases} x_1(t) = t, \\ x_2(t) = 1 - t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

作坐标变换

$$\begin{cases} x = \eta t, \\ y = \eta(1 - t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant \eta \leqslant 1,$$

得$J(\eta, t) = -\eta$,且

$$\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x + y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 t\int_0^1 \eta\sqrt{\eta t(1 - t)}\,\mathrm{d}\eta =$$

$$\int_0^1 \sqrt{t(1 - t)}\,\mathrm{d}t \int_0^1 \eta^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\eta = \frac{\pi}{20}。$$

例6　计算积分

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中区域D由椭圆曲线$(x-y)^2+x^2=a^2(a>0)$所围成。

解　如图5(a),将边界曲线$(x-y)^2+x^2=a^2$转化为参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

作坐标变换

$$\begin{cases} x=\eta a\cos t, \\ y=\eta a(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant \eta\leqslant 1,$$

从而$J(\eta,t)=-a^2\eta$,且

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^4\int_0^{2\pi}\cos t(\cos t-\sin t)\,\mathrm{d}t\int_0^1\eta^3\,\mathrm{d}\eta=$$

$$\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\cos t(\cos t-\sin t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}a^4。$$

对于直角坐标系或极坐标系下不易求得以及无法直接计算的例4~6,通过边界收缩变换能够很好地解决,从而说明了此方法的一般性与有效性。

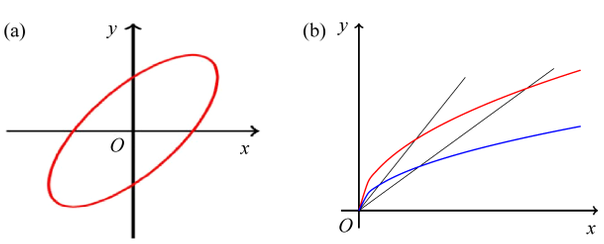


图5　积分区域D

(a)例6;(b)例7

例7　求抛物线$y^2=mx,y^2=nx$和直线$y=\alpha x,y=\beta x$所围区域D的面积S_D,这里$0<m<n,0<\alpha<\beta$。

解　积分区域D如图5(b)所示,抛物线$y^2=nx$的参数方程为

$$\begin{cases} x_1(t)=\dfrac{t^2}{n}, \\ x_2(t)=t。 \end{cases}$$

由$\begin{cases} y^2=nx, \\ y=\alpha x, \end{cases}$和$\begin{cases} y^2=nx, \\ y=\beta x, \end{cases}$分别联立求得参数$t$的变化范围$\dfrac{n}{\beta}\leqslant t\leqslant\dfrac{n}{\alpha}$。

记$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))\left(\dfrac{n}{\beta}\leqslant t\leqslant\dfrac{n}{\alpha}\right)$,作变换$\boldsymbol{p}(\eta,t)=\eta\boldsymbol{x}(t)$,$0<a\leqslant\eta\leqslant 1$,

$$\begin{cases} x=\eta\dfrac{t^2}{n}, & \dfrac{n}{\beta}\leqslant t\leqslant\dfrac{n}{\alpha}, \\ y=\eta t, & 0<a\leqslant\eta\leqslant 1, \end{cases}$$

由于$y^2=mx$与$y^2=nx$是通过坐标原点的同形曲线,当$a=\dfrac{m}{n}$时,上述收缩曲线来到曲线$y^2=mx$。此时变换$\boldsymbol{p}(\eta,t)$将矩形区域$\Pi=\left[\dfrac{m}{n},1\right]\times\left[\dfrac{n}{\beta},\dfrac{n}{\alpha}\right]$映射为积分区域$D$,$J(\eta,t)=-\eta\dfrac{t^2}{n}$,所以

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{n}{\beta}}^{\frac{n}{\alpha}}\mathrm{d}t\int_{\frac{m}{n}}^1\eta\frac{t^2}{n}\,\mathrm{d}\eta=\frac{1}{6}(n^2-m^2)\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)。$$

对于用一般函数曲线、普通极坐标难以描述的闭区域,例7提供了一种利用边界曲线的参数方程计算区域面积的新思路。

3　结束语

本文基于积分区域边界曲线的参数方程提出了边界收缩变换,从而将直角坐标系和极坐标系下的二重积分转化为收缩变换下ηOt面上矩形区域的二重积分。一方面,很好地解决了部分直角坐标和极坐标变换下无法求解的二重积分,而且矩形区域计算起来更简洁方便,这无疑是提供了一种计算二重积分的有效方法;另一方面,相对于极坐标更多地用于积分区域是圆域(圆域的一部分)或被积函数形如$f(x^2+y^2)$的积分而言,此变换可用来计算任何常见的凸区域上的二重积分,可以说极坐标变换是收缩变换的特殊情形,因而更具有一般性。通常情况下,二重积分的换元需依据不同的被积函数和积分区域而确定,但是收缩变换使用统一的变换公式,故而更具有通用性。

参 考 文 献

[1] 杨德彬.二重积分一题多解的方法总结[J].理科爱好者(教育教学),2020,34(6):14-15.

[2] 雍龙泉.直角坐标系下二重积分的计算方法研究[J].湖北工程学院学报,2019,39(6):106-108.

[3] 赵大虎,黄焕福.直角坐标系下二重积分计算的教学探讨[J].广西民族师范学院学报,2019,36(3):155-157.

[4] 赵萍萍,王丽霞.重积分的一般计算方法[J].高等数学研究,2022,25(2):57-59.

[5] 袁荣.利用极坐标计算二重积分的方法和技巧[J].数学学习与研究,2012(1):60-61.

(下转第67页)

都师范大学学报(自然科学版),2018,39(3):9-15.
[18] FURINGHETTI F. History and mathematics education: a look around the world with particular reference to Italy [J]. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,2004,3(1/2):1-20.
[19] JONES P S. The history of mathematics as a teaching tool[J]. The Mathematics Teacher,1957,(50):59-64.
[20] FAUVEL J. Using history in mathematics education[J]. For the Learning of Mathematics,1991,11(2):3-6.
[21] JANKVIST U T, MOSVOLD R, JAKOBSEN A, et al. Mathematical knowledge for teaching in relation to history in mathematics education[EB/OL]. [2023-03-10]. https://www. researchgate. net/publication/343341276_Mathematical_knowledge_for_teaching_in_relation_to_history_in_mathematics_education.
[22] KARADUMAN G B. A sample study for classroom teachers addressing the importance of utilizing history of math in math education [J]. Procedia Social and Behavioral Sciences,2010,2(2):2689-2693.
[23] HORTON L B, PANASUK R M. Raising awareness the history of mathematics in high school curriculum' [J]. International Journal of Humanities and Social Science, 2011,1(16):37-46.
[24] YUSTE P. Learning mathematics through its history[J]. Procedia Social and Behavioral Sciences, 2010, 2(2): 1137-1141.
[25] PANAGIOTOU E N. Using history to teach mathematics: the case of logarithms [J]. Science & Education,2011,20(1):1-35.
[26] SCHOENFELD A H. Reframing teacher knowledge: a research and development agenda [J]. ZDM-Mathematics Education, 2019,52(2):359-376.
[27] 傅海伦,贾如鹏.试析我国高校数学史教育发展及研究现状[J].高等理科教育,2005(4):9-11.
[28] 教育部.教育部关于印发《普通高等学校师范类专业认证实施办法(暂行)》的通知[EB/OL].(2017-10-26)[2023-03-21].https://www.moe.gov.cn/srcsite/A10/s7011/201711/ t20171106_318535.html.
[29] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M].北京:科学出版社,2017.

(责任编辑:马田田)

(上接第42页)

[6] 王宪杰.对称区域上二重积分和三重积分的计算[J].牡丹江师范学院学报(自然科学版),2007(4):65-66.
[7] 葛淑梅.对称区域上二重积分的简化计算方法[J].焦作大学学报,2018,32(1):101-103.
[8] 刘红梅.二重积分计算巧用对称性简化求解[J].普洱学院学报,2018,34(6):45-47.
[9] 白旭亚,赵微.二重积分的简便计算[J].大庆师范学院学报,2018,38(3):41-43.
[10] 郑剑平.计算二重积分的几种简便方法[J].赤峰学院学报(自然科学版),2019,35(5):7-9.
[11] 孙卫卫,杜美华.巧用分部积分法求解二重积分[J].牡丹江师范学院学报(自然科学版),2014(4):1-2.
[12] 钟煜妮,林文贤.分部积分法在重积分中的应用[J].高师理科学刊,2015,35(1):11.
[13] 闫善文,张国铭.一道二重积分例题的几种解法[J].高等数学研究,2018,21(4):87-89.
[14] 周俊,周秀君.利用坐标平移计算重积分[J].长江大学学报(自然科学版),2010,7(2):138-140.
[15] 杜先云,任秋道.利用圆域的参数方程计算重积分[J].数学学习与研究,2021(7):148-149.
[16] 李萍,冯进钤,范钦伟.利用换元法求一类二重积分[J].高等数学研究,2021,24(3):38-40.
[17] 张文丽,张安玲.二重积分变量变换选取方法的探究学习[J].高等数学研究,2022,25(2):25-27.
[18] 林伟,王瑞霞,叶正麟,等.若干非圆弧的扇形环域上二重积分变换[J].高等数学研究,2023,26(2):4-6.
[19] 同济大学数学系.高等数学:下册[M].7版.北京:高等教育出版社,2014.
[20] 华东师范大学数学系.数学分析:下册[M].3版.北京:高等教育出版社,2001.

(责任编辑:马田田)