DOI：10.19789/j.1004-9398.2025.01.003
文献引用：时统业．高阶可微函数Ostrowski型不等式的加强[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2025，46（1）：20-25+31. SHI T Y. Strengthen of Ostrowski type inequality for higher order differentiable functions[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2025，46（1）：20-25+31.

高阶可微函数Ostrowski型不等式的加强

时　统　业*

（中国人民解放军海军指挥学院，江苏　南京　211800）

摘要：研究一类广义Ostrowski型不等式，基于积分恒等式，用引入参数求最值的方法，给出关于高阶可微函数的Ostrowski型不等式的加强。

关键词：Ostrowski型不等式；积分不等式；可微函数；加强
中图分类号：O178　　**文献标志码**：A

Strengthen of Ostrowski type inequality for higher order differentiable functions

SHI Tongye*

（Naval Command College of People's Liberation Army，Nanjing Jiangsu　211800）

Abstract：This paper study a class of generalized Ostrowski inequalities. Based on the integral identity and using the method of introducing parameter to find the minumum value，some strengthenings of Ostrowski type inequality for higher order differentiable functions are obtained.

Keywords：Ostrowski type inequality；integral inequality；differentiable function；strengthen
CLC：O178　　**DC**：A

0　引　言

设函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可微，且存在常数M使得对任意$x\in(a,b)$有$\left|f'(x)\right|\leqslant M$，则对任意$x\in(a,b)$有

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}M,\tag{1}$$

称为Ostrowski不等式[1]。

有关Ostrowski不等式的改进和推广可见匡继昌著的《常用不等式》[2]。Milovanović和Pevcarić[3]利用Taylor公式、Anastassiou[4]利用广义的Euler恒等式、Erden[5]通过建立含有2个任意常数的高阶可微函数的积分恒等式，分别建立了高阶可微函数的Ostrowski型不等式；还有其他研究者利用高阶可微函数的积分恒等式推广了Ostrowski不等式[6-13]。

Cerone[14]利用带有Peano型核的Montgomery型积分恒等式建立了一种新的Ostrowski型不等式，对于(a,b)上的任意点x，给出函数f在2个区间$[a,x]$和$[x,b]$上的平均值的加权算术平均与$f(x)$的差值估计。

定理1[14]　设$f:[a,b]\to\mathbf{R}$是绝对连续函数，且$\left\|f'\right\|_\infty=\operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}\left|f'(t)\right|<\infty$，则对任意的$\lambda\in[0,1]$和任意$x\in(a,b)$有

收稿日期：2022-05-11
*通信作者：shtycity@ sina.com

$$\left| f(x) - \frac{\lambda}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1-\lambda}{b-x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\lambda(x-a)+(1-\lambda)(b-x)}{2}\left\| f' \right\|_\infty 。 \quad (2)$$

不等式(2)蕴含了不等式(1)(取$\lambda = \frac{x-a}{b-a}$)。Qayyum等[15]通过建立有Peano型核的与一阶导数有关的Montgomery型积分恒等式,将式(2)推广到含有1个参数的情形;Qayyum等[16]利用与二阶导数有关的Montgomery型积分恒等式将式(2)推广到二阶可微函数。

定理2[16]　设$f:[a,b]\to\mathbf{R}$二阶可微,且$\left\| f'' \right\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}\left| f''(t) \right| < \infty$,则对任意的$\lambda\in[0,1]$和任意$x\in(a,b)$有

$$\left| \frac{\lambda(x-a)-(1-\lambda)(b-x)}{2} f'(x) - f(x) + \frac{\lambda}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1-\lambda}{b-x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\lambda(x-a)^2+(1-\lambda)(b-x)^2}{6}\left\| f'' \right\|_\infty 。 \quad (3)$$

Qayyum等[17]通过建立带有Peano型核的与二阶导数有关的Montgomery型积分恒等式,将式(3)推广到含有1个参数的情形。时统业和曾志红[18]基于积分恒等式,引入参数求最值,加强了式(2和3)。设α和β是非负数且不同时为零,沿用文献[19]中的记号,记

$$A = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(x-a)}, B = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)(b-x)},$$

$$\mu = A(x-a)^{n+1} + B(b-x)^{n+1},$$

$$P_n(x,t) = \begin{cases} \frac{A}{n!}(t-a)^n, t\in[a,x], \\ \frac{B}{n!}(t-b)^n, t\in(x,b], \end{cases}$$

$$M(f;a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\tau(x;\alpha,\beta) = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\left[(-1)^k A(x-a)^{k+1} + B(b-x)^{k+1} \right] f^{(k)}(x) + \frac{(-1)^n}{\alpha+\beta}\left[\alpha M(f;a,x) + \beta M(f;x,b) \right] 。$$

引理1[19]　设$f:[a,b]\to\mathbf{R}$是n阶可微函数,$f^{(n-1)}$在$[a,b]$上绝对连续,则对任意$x\in(a,b)$有

$$\tau(x;\alpha,\beta) = \int_a^b P_n(x,t)\, f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t 。 \quad (4)$$

文献[19]利用式(4)将式(2和3)推广到高阶可微函数。

定理3[19]　设$f:[a,b]\to\mathbf{R}$是n阶可微函数,$f^{(n-1)}$在$[a,b]$上绝对连续,且$\left\| f^{(n)} \right\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}\left| f^{(n)}(t) \right| < \infty$,则对任意$x\in(a,b)$有

$$\left| \tau(x;\alpha,\beta) \right| \leqslant \left[A(x-a)^{n+1} + B(b-x)^{n+1} \right]\frac{\left\| f^{(n)} \right\|_\infty}{(n+1)!} 。 \quad (5)$$

本文借助恒等式(4),仿照Cheng和Sun[20]引入参数求最值的方法给出式(5)的加强。

1　高阶可微函数Ostrowski型不等式(5)的加强

定理4　设$f:[a,b]\to\mathbf{R}$是n阶可微函数,$f^{(n-1)}$在$[a,b]$上绝对连续,且$\left\| f^{(n)} \right\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}\left| f^{(n)}(t) \right| < \infty$,则对任意$x\in(a,b)$有

$$-\frac{\mu\left\| f^{(n)} \right\|_\infty}{(n+1)!}\left[1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\left(1 - \frac{K}{\mu\left\| f^{(n)} \right\|_\infty} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \leqslant \tau(x;\alpha,\beta) \leqslant \frac{\mu\left\| f^{(n)} \right\|_\infty}{(n+1)!}\left[1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\left(1 + \frac{K}{\mu\left\| f^{(n)} \right\|_\infty} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right], \quad (6)$$

其中

$$K = (-1)^n n!\left\{ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left[(-1)^k A(x-a)^{k+1} + B(b-x)^{k+1} \right] f^{(k)}(x) - \frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} \right\} 。$$

证明　对任意$\varepsilon\in[0,x-a]$,由引理1有

$$\tau(x;\alpha,\beta) = \frac{A}{n!}\int_a^x\left[(t-a)^n - (t-a)^{n-1}\varepsilon \right] f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{B}{n!}\int_x^b\left[(t-b)^n + (t-b)^{n-1}\frac{b-x}{x-a}\varepsilon \right] f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t + Q\varepsilon \leqslant \frac{1}{n!}\left\| f^{(n)} \right\|_\infty\left[A\int_a^x (t-a)^{n-1}\left| t-a-\varepsilon \right|\mathrm{d}t + B\int_x^b (b-t)^{n-1}\left| t-b+\frac{b-x}{x-a}\varepsilon \right|\mathrm{d}t \right] + Q\varepsilon, \quad (7)$$

其中

$$Q = \frac{A}{n!}\int_a^x (t-a)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t -$$

$$\frac{B}{n!}\frac{b-x}{x-a}\int_x^b (t-b)^{n-1}f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{K}{nn!(x-a)},\tag{8}$$

$$\int_a^x (t-a)^{n-1}|t-a-\varepsilon|\,\mathrm{d}t=\int_a^{a+\varepsilon}(t-a)^{n-1}(a+\varepsilon-t)\,\mathrm{d}t+\int_{a+\varepsilon}^x (t-a)^{n-1}(t-a-\varepsilon)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}-\frac{1}{n}(x-a)^n\varepsilon+\frac{2}{n(n+1)}\varepsilon^{n+1},\tag{9}$$

$$\int_x^b (b-t)^{n-1}\left|t-b+\frac{b-x}{x-a}\varepsilon\right|\mathrm{d}t=\int_x^{b-\frac{b-x}{x-a}\varepsilon}(b-t)^{n-1}\left(b-\frac{b-x}{x-a}\varepsilon-t\right)\mathrm{d}t+\int_{b-\frac{b-x}{x-a}\varepsilon}^b (b-t)^{n-1}\left(t-b+\frac{b-x}{x-a}\varepsilon\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{n+1}\left[\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}-\frac{1}{n}(x-a)^n\varepsilon+\frac{2}{n(n+1)}\varepsilon^{n+1}\right],\tag{10}$$

综合式(7)~(10),得

$$\tau(x;\alpha,\beta)\leqslant\frac{2\mu\|f^{(n)}\|_\infty}{n(n+1)!(x-a)^{n+1}}\varphi(\varepsilon)+\frac{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!},$$

其中

$$\varphi(\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}-\frac{(n+1)(x-a)^n}{2}\left(1+\frac{K}{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}\right)\varepsilon。$$

为求$\varphi(\varepsilon)$的最小值,求导得$\varphi'(\varepsilon)=(n+1)(\varepsilon^n-\varepsilon_0^n)$,其中$\varepsilon_0=(x-a)\sqrt[n]{\frac{1}{2}\left(1+\frac{K}{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}\right)}$。

因为$|K|\leqslant nn!(x-a)\left[\frac{A}{n!}\int_a^x (t-a)^{n-1}|f^{(n)}(t)|\,\mathrm{d}t+\frac{B}{n!}\frac{b-x}{x-a}\int_x^b (t-b)^{n-1}|f^{(n)}(t)|\mathrm{d}t\right]\leqslant\mu\|f^{(n)}\|_\infty$,故

$$\varepsilon_0\in[0,x-a],\varphi'(\varepsilon_0)=0,$$

$$\varphi(\varepsilon_0)=-\frac{n(x-a)^{n+1}}{2\sqrt[n]{2}}\left[1+\frac{K}{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}\right]^{\frac{n+1}{n}},$$

$$\tau(x;\alpha,\beta)\leqslant\frac{2\mu\|f^{(n)}\|_\infty}{n(n+1)!(x-a)^{n+1}}\varphi(\varepsilon_0)+\frac{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!}=\frac{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!}\left[1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\left(1+\frac{K}{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right],$$

即式(6)的右边部分得证。因为$f^{(n-1)}$在$[a,b]$上绝对连续,且$\|f^{(n)}\|_\infty=\operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}|f^{(n)}(t)|<\infty$,所以$(-f)^{(n-1)}$也是绝对连续函数,且$\|(-f)^{(n)}\|_\infty=\operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}|f^{(n)}(t)|<\infty$,对$(-f)$应用已证结果则证得式(6)的左边部分。

推论1　设函数f满足的条件同定理4,则对于任意的$x\in(a,b)$有

$$|\tau(x;\alpha,\beta)|\leqslant\frac{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!}\left[1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\left(1-\frac{|K|}{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]。$$

注1　在推论1中依次取$n=1$和$n=2$,分别得到文献[18]中的推论1和推论9。

推论2　设条件同定理4,则对任意$x\in(a,b)$有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\left[(b-x)^{k+1}-(a-x)^{k+1}\right]f^{(k)}(x)-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]\frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\left(1-\frac{n!\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left[(b-x)^{k+1}-(a-x)^{k+1}\right]f^{(k)}(x)-(x-a)f(a)-(b-x)f(b)\right|}{\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]\|f^{(n)}\|_\infty}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]。$$

证明　在推论1中取$\alpha=x-a,\beta=b-x$即可。

定理5　设条件同定理4,则对任意$x\in(a,b)$有

$$-\frac{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!}\left[1-\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{L}{\mu\|f^{(n)}\|_\infty}\right)^{n+1}\right]\leqslant\tau(x;\alpha,\beta)\leqslant$$

$$\frac{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}{(n+1)!}\left[1-\frac{1}{2^{n}}\left(1-\frac{L}{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}\right)^{n+1}\right], \quad (11)$$

其中

$$L=A(x-a)^{n}\left[f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)\right]+$$
$$B(x-b)^{n}\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(x)\right]。$$

证明　对任意$\varepsilon\in[0,x-a]$,由引理1有

$$\tau(x;\alpha,\beta)=\frac{A}{n!}\int_{a}^{x}\left[(t-a)^{n}-\varepsilon^{n}\right]f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t+$$
$$\frac{B}{n!}\int_{x}^{b}\left[(t-b)^{n}-\left(\frac{x-b}{x-a}\varepsilon\right)^{n}\right]f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t+$$
$$\frac{L}{n!(x-a)^{n}}\varepsilon^{n}\leqslant$$
$$\frac{\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}{n!}\left[A\int_{a}^{x}\left|(t-a)^{n}-\varepsilon^{n}\right|\mathrm{d}t+B\int_{x}^{b}\left|(t-b)^{n}-\left(\frac{x-b}{x-a}\varepsilon\right)^{n}\right|\mathrm{d}t\right]+\frac{L}{n!(x-a)^{n}}\varepsilon^{n}, \quad (12)$$

$$\int_{a}^{x}\left|(t-a)^{n}-\varepsilon^{n}\right|\mathrm{d}t=\int_{a}^{a+\varepsilon}\left[\varepsilon^{n}-(t-a)^{n}\right]\mathrm{d}t+$$
$$\int_{a+\varepsilon}^{x}\left[(t-a)^{n}-\varepsilon^{n}\right]\mathrm{d}t=$$
$$\frac{2n}{n+1}\varepsilon^{n+1}-(x-a)\,\varepsilon^{n}+\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}, \quad (13)$$

$$\int_{x}^{b}\left|(t-b)^{n}-\left(\frac{x-b}{x-a}\varepsilon\right)^{n}\right|\mathrm{d}t=\int_{x}^{b-\frac{b-x}{x-a}\varepsilon}\left[(b-t)^{n}-\left(\frac{b-x}{x-a}\varepsilon\right)^{n}\right]\mathrm{d}t+\int_{b-\frac{b-x}{x-a}\varepsilon}^{b}\left[\left(\frac{b-x}{x-a}\varepsilon\right)^{n}-(b-t)^{n}\right]\mathrm{d}t=$$
$$\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{n+1}\left[\frac{2n}{n+1}\varepsilon^{n+1}-(x-a)\,\varepsilon^{n}+\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}\right], \quad (14)$$

综合式(12~14),得

$$\tau(x;\alpha,\beta)\leqslant\frac{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}{n!(x-a)^{n+1}}\psi(\varepsilon)+\frac{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}{(n+1)!},$$

其中

$$\psi(\varepsilon)=\frac{2n}{n+1}\varepsilon^{n+1}+\left(\frac{(x-a)L}{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}-(x-a)\right)\varepsilon^{n}。$$

为求$\psi'(\varepsilon)$的最小值,求导得$\psi'(\varepsilon)=2n\varepsilon^{n-1}(\varepsilon-\varepsilon_{1})$,其中$\varepsilon_{1}=\frac{x-a}{2}\left(1-\frac{L}{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}\right)$。因为$|L|\leqslant\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}$,故 $\varepsilon_{1}\in[0,x-a]$, $\psi'(\varepsilon_{1})=0$, $\psi(\varepsilon_{1})=-\frac{(x-a)^{n+1}}{2^{n}(n+1)}\cdot\left[1-\frac{L}{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}\right]^{n+1}$,

$$\tau(x;\alpha,\beta)\leqslant\frac{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}{n!(x-a)^{n+1}}\psi(\varepsilon_{1})+\frac{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}{(n+1)!}=$$
$$\frac{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}{(n+1)!}\left[1-\frac{1}{2^{n}}\left(1-\frac{L}{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}\right)^{n+1}\right],$$

即式(11)的右边部分得证。因为$f^{(n-1)}$在$[a,b]$上绝对连续,且$\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}=\operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}\left|f^{(n)}(t)\right|<\infty$,所以$(-f)^{(n-1)}$也是绝对连续函数,且$\left\|(-f)^{(n)}\right\|_{\infty}=\operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}\left|f^{(n)}(t)\right|<\infty$,对$(-f)$应用已得结果则证得式(11)的左边部分。

推论3　设函数f的条件同定理4,则对于任意的$x\in(a,b)$有

$$\left|\tau(x;\alpha,\beta)\right|\leqslant\frac{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}{(n+1)!}\left[1-\frac{1}{2^{n}}\left(1-\frac{|L|}{\mu\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}\right)^{n+1}\right]。$$

注2　在推论2中依次取$n=1$和$n=2$,分别得到文[18]中的推论1和推论5。

推论4　设条件同定理4,则对任意$x\in(a,b)$有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\left[(b-x)^{k+1}-(a-x)^{k+1}\right]f^{(k)}(x)-\int_{a}^{b}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]\frac{\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}{(n+1)!}\cdot$$
$$\left[1-\frac{1}{2^{n}}\left(1-\frac{\left|(x-a)^{n}\left[f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)\right]+(x-b)^{n}\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(x)\right]\right|}{\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]\left\| f^{(n)}\right\|_{\infty}}\right)^{n+1}\right]。$$

证明　在推论3中取$\alpha=x-a,\beta=b-x$即可。

注3　推论4是Cerone[21]等给出的高阶可微函数Ostrowski不等式的加强。

定理6　设条件同定理4,且$n\geqslant2$,则对任意

$x\in(a,b)$有

$$-\frac{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\left[1-2\left(\frac{1}{2}+\frac{V}{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]\leqslant\tau(x;\alpha,\beta)\leqslant$$

$$\frac{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\left[1-2\left(\frac{1}{2}-\frac{V}{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right],\quad(15)$$

其中

$$V=A(x-a)^{n-1}\int_a^x(t-a)\,f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t+$$

$$B(x-b)^{n-1}\int_x^b(t-b)\,f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\left[A(x-a)^n-B(x-b)^n\right]f^{(n-1)}(x)-$$

$$A(x-a)^{n-1}\left[f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(a)\right]-$$

$$B(x-b)^{n-1}\left[f^{(n-2)}(b)-f^{(n-2)}(x)\right]。$$

证明 对任意$\varepsilon\in[0,x-a]$,由引理1有

$$\tau(x;\alpha,\beta)=\frac{A}{n!}\int_a^x\left[(t-a)^n-(t-a)\,\varepsilon^{n-1}\right]f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t+$$

$$\frac{B}{n!}\int_x^b\left[(t-b)^n-(t-b)\left(\frac{x-b}{x-a}\varepsilon\right)^{n-1}\right]f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t+$$

$$\frac{V}{n!(x-a)^{n-1}}\varepsilon^{n-1}\leqslant\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{n!}\cdot$$

$$\left[A\int_a^x\left|(t-a)^n-(t-a)\,\varepsilon^{n-1}\right|\mathrm{d}t+B\int_x^b\left|(t-b)^n-\right.\right.$$

$$\left.\left.(t-b)\left(\frac{x-b}{x-a}\varepsilon\right)^{n-1}\right|\mathrm{d}t\right]+\frac{V}{n!(x-a)^{n-1}}\varepsilon^{n-1},$$

$$(16)$$

$$\int_a^x\left|(t-a)^n-(t-a)\,\varepsilon^{n-1}\right|\mathrm{d}t=\int_a^{a+\varepsilon}\left[(t-a)\,\varepsilon^{n-1}-\right.$$

$$\left.(t-a)^n\right]\mathrm{d}t+\int_{a+\varepsilon}^x\left[(t-a)^n-(t-a)\,\varepsilon^{n-1}\right]\mathrm{d}t=$$

$$\frac{n-1}{n+1}\varepsilon^{n+1}-\frac{1}{2}(x-a)^2\varepsilon^{n-1}+\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1},$$

$$(17)$$

$$\int_x^b\left|(t-b)^n-(t-b)\left(\frac{x-b}{x-a}\varepsilon\right)^{n-1}\right|\mathrm{d}t=$$

$$\int_x^{b-\frac{b-x}{x-a}\varepsilon}\left[(b-t)^n-(b-t)\left(\frac{b-x}{x-a}\varepsilon\right)^{n-1}\right]\mathrm{d}t+$$

$$\int_{b-\frac{b-x}{x-a}\varepsilon}^b\left[(b-t)\left(\frac{b-x}{x-a}\varepsilon\right)^{n-1}-(b-t)^n\right]\mathrm{d}t=$$

$$\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{n+1}\left[\frac{n-1}{n+1}\varepsilon^{n+1}-\frac{1}{2}(x-a)^2\varepsilon^{n-1}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}\right],\quad(18)$$

综合式(16~18),得

$$\tau(x;\alpha,\beta)\leqslant\frac{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{n!(x-a)^{n+1}}\theta(\varepsilon)+\frac{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!},$$

其中

$$\theta(\varepsilon)=\frac{n-1}{n+1}\varepsilon^{n+1}-(x-a)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{V}{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}\right)\varepsilon^{n-1}。$$

为求$\theta(\varepsilon)$的最小值,求导得$\theta'(\varepsilon)=(n-1)\,\varepsilon^{n-2}\cdot(\varepsilon^2-\varepsilon_2^2)$,其中$\varepsilon_2=(x-a)\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{V}{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}}$,因为

$$|V|\leqslant A(x-a)^{n-1}\int_a^x(t-a)\left|f^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t+$$

$$B(b-x)^{n-1}\int_x^b(b-t)\left|f^{(n)}(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{\mu}{2}\left\|f^{(n)}\right\|_\infty,$$

故$\varepsilon_2\in[0,x-a]$,$\theta'(\varepsilon_0)=0$,

$$\theta(\varepsilon_2)=-\frac{2(x-a)^{n+1}}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{V}{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\tau(x;\alpha,\beta)\leqslant\frac{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{n!(x-a)^{n+1}}\theta(\varepsilon_2)+\frac{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}=$$

$$\frac{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\left[1-2\left(\frac{1}{2}-\frac{V}{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right],$$

即式(15)的右边部分得证。因为$f^{(n-1)}$在$[a,b]$上绝对连续,且$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty=\operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}\left|f^{(n)}(t)\right|<\infty$,所以$(-f)^{(n-1)}$也是绝对连续函数,且$\left\|(-f)^{(n)}\right\|_\infty=\operatorname*{esssup}_{t\in[a,b]}\left|f^{(n)}(t)\right|<\infty$,对$(-f)$应用已得结论则证得式(15)的左边部分。

推论5 设函数f满足的条件同定理4且$n\geqslant2$,则对于任意的$x\in(a,b)$有

$$\left|\tau(x;\alpha,\beta)\right|\leqslant\frac{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\left[1-2\left(\frac{1}{2}-\frac{|V|}{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]。$$

注4 推论5中取$n=2$,可得文[18]的推论9。

推论6 设条件同定理4,且$n\geqslant2$,则对任意$x\in(a,b)$有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\left[(b-x)^{k+1}-(a-x)^{k+1}\right]f^{(k)}(x)-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\cdot\left[1-2\left(\frac{1}{2}-\frac{|U|}{\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right],$$

其中

$$U=\left[(b-x)^n-(a-x)^n\right]f^{(n-1)}(x)+(a-x)^{n-1}\left[f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(a)\right]+(b-x)^{n-1}\left[f^{(n-2)}(b)-f^{(n-2)}(x)\right]。$$

证明　推论5中取$\alpha=x-a,\beta=b-x$即可。

利用Qayyum等[15,17]给出的带有1个参数的Montgomery型积分恒等式及Cheng和Sun[20]使用的引入参数求最值的方法,还可以将本文结果加以推广。

2　推论4在概率分布函数上的一个应用

例　设X是在$[a,b]$上取值的连续型随机变量,其概率密度函数和累积分布函数分别是f和F,则对任意$x\in(a,b)$有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\left[(-1)^k\alpha(x-a)^{k+1}(b-x)+\beta(x-a)(b-x)^{k+1}\right]\cdot f^{(k)}(x)-\left[\alpha(b-x)-\beta(x-a)\right]F(x)+\beta(x-a)\right|\leqslant(\alpha+\beta)(b-x)(x-a)\frac{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\cdot\left[1-\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{|L|}{\mu\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}\right)^{n+1}\right]。$$

证明　注意到$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t=1-F(x)$,应用推论4即可得证。

3　结束语

在Qayyum等建立的Montgomery型积分恒等式中,Peano型核具有幂函数形式,鉴于这个特点,本文使用引入参数求最值的方法,得到一些高阶可微函数Ostrowski型不等式,在已有的不等式右边减去非负项,显然加强了已有不等式。作为特例,也得到经典的Ostrowski不等式在高阶可微函数推广的加强。还可以仿照研究经典的Ostrowski不等式的方法,从函数类型、积分类型、扰动项、权函数、高阶导数所属空间等不同角度,对Cerone建立的涉及2个子区间上的函数平均值的加权平均的Ostrowski型不等式进行推广。

参 考 文 献

[1] OSTROWSKI A. Über die absolute abweichung einer differentiebaren funktion von ihren integralmittelwert [J]. Commentarii Mathematici Helvetici, 1938, 10(1): 226-227.

[2] 匡继昌.常用不等式[M].5版.济南:山东科学技术出版社,2021:780-789.

[3] MILOVANOVIC G V, PEČARIĆ J. On generalization of the inequality of A. Ostrowski and some related applications [EB/OL]. [2022-05-08]. https://www.researchgate.net/publication/235141393.

[4] ANASTASSIOU G A. High order Ostrowski type inequalities[J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20(6):616-621.

[5] ERDEN S. Some perturbed inequalities of Ostrowski type for functions whose *n*th derivatives are bounded[J]. Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 2022, 17(1):57-70.

[6] MATIĆ M, PEČARIĆ J, UJEVIĆ N. Improvement and further generalization of inequalities of Ostrowski-Grüss-type[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2000, 39:161-175.

[7] ERDEN S, SARIKAYA M Z. Some perturbed inequalities of Ostrowski type for high-order differentiable functions and applications[J]. Journal of Applied Analysis, 2021, 27(1):57-64.

[8] ERDEN S. Some perturbed inequalities of Ostrowski type for functions whose *n*-th derivatives are bounded [J]. Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 2022, 17(1):57-70.

[9] QAYYUM A, SHOAIB M, ERDEN S. Generalized fractional Ostrowski type inequality for higher order derivatives [J]. Communication in Mathematical Modeling and Applications, 2019, 4(2):111-124.

[10] ERDEN S, ÇELİK N, KHAN M A. Refined inequalities of perturbed Ostrowski type for higher-order absolutely continuous functions and applications [J]. AIMS Mathematics, 2021, 6(1):362-377.

(下转第31页)

pair distribution function and susceptibility study on the layered compound $CrTe_3$ [J]. Zeitschrift fur Kristallographie Crystalline Materials,2018,233(6):361-370.

[17] MCGUIRE M A,GARLEA V O,SANTOSH K C,et al. Antiferromagnetism in the van der Waals layered spin-lozenge semiconductor $CrTe_3$[J]. Physical Review B,2017,95(14):144421.

[18] LU Z W,QIU S B,XIE W Q,et al. Theoretical study of strain induced magnetic transition of single-layer $CrTe_3$ [J]. Journal of Applied Physics,2020,127(3):033903.

[19] LI R,NIE J H,XIAN J J,et al. Planar heterojunction of ultrathin $CrTe_3$ and $CrTe_2$ van der Waals magnet[J]. ACS Nano,2022,16(3):4348-4356.

[20] JIANG J,LI N,ZOU J,et al. Synergistic additive-mediated CVD growth and chemical modification of 2D materials[J]. Chemical Society Reviews,2019,48(17):4639-4654.

[21] LU Z W,QIU S B,XIE W Q,et al. Theoretical study of strain induced magnetic transition of single-layer $CrTe_3$ [J]. Journal of Applied Physics,2020,127(3):033903.

[22] FREITAS D C,WEHT R,SULPICE A,et al. Ferromagnetism in layered metastable 1T-$CrTe_2$ [J]. Journal of Physics Condensed Matter,2015,27(17):176002.

[23] SENTHILKUMAR V,LE C T,YONG S K,et al. Direct vapor phase growth process and robust photoluminescence properties of large area MoS_2 layers [J]. Nano Research,2014,7(12):1759-1768.

[24] REINA A,JIA X T,HO J,et al. Large area,few-layer graphene films on arbitrary substrates by chemical vapor deposition[J]. Nano Letters,2009,9(1):30.

[25] MENG L J,ZHOU Z,XU M Q,et al. Anomalous thickness dependence of Curie temperature in air-stable two-dimensional ferromagnetic 1T-$CrTe_2$ grown by chemical vapor deposition[J]. Nature Communications,2021,12(1):809.

[26] FANO U. Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts[J]. Physical Review,1961,124(6):1866-1878.

[27] WANG S,LIN B C,ZHENG W Z,et al. Fano interference between bulk and surface states of a Dirac semimetal Cd_3As_2 nanowire[J]. Physical Review Letters,2018,120(25):257701.

(责任编辑:兰丽丽)

(上接第25页)

[11] ERDEN S. Companions of perturbed type inequalities for higher-order differentiable functions[J]. Cumhuriyet Science Journal,2019,40(4):819-829.

[12] ERDEN S. Perturbed companions of Ostrowski type inequalities for *n*-times differentiable functions and applications[J]. Проблемы Анализа,2020,9(2):45-57.

[13] AMJAD J,QAYYUM A,FAHAD S,et al. Some new generalized Ostrowski type inequalities with new error bounds[J]. Innovative Journal of Mathematics,2022,1(2):30-43.

[14] CERONE P. A new Ostrowski type inequality involving integral means over end intervals[J]. Tamkang Journal of Mathematics,2002,33(2):109-118.

[15] QAYYUMA A,FAYE I,SHOAIBC M. Improvement of Ostrowski integral type inequalities with application[J]. Filomat,2015,30(6):1441-1456.

[16] QAYYUM A,SHOAIB M,MOATOUK A,et al. On new generalized Ostrowski type integral inequalities[J]. Abstract and Applied Analysis,2014,2014(1):1-8.

[17] QAYYUM A,SHOAIB M,FAYE I. Some new generalized results on Ostrowski type integral inequalities with application [J]. Journal of Computational Analysis and Applications,2015,19(4):693-712.

[18] 时统业,曾志红.新的广义Ostrowski型不等式的加强[J].首都师范大学学报(自然科学版),2022,43(1):12-18.

[19] QAYYUM A,SHOAIB M,FAYE I. Derivation and applications of inequalities of Ostrowski type for *n*-times differentiable mappings for cumulative distribution function and some quadrature rules [J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications,2016,9(4):1844-1857.

[20] CHENG X L,SUN J. A note on the perturbed trapezoid inequality [J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Maththematics,2002,3(2):29.

[21] CERONE P,DRAGOMIR S S,ROUMELIOTIS J. Some Ostrowski type inequalities for *n*-time differentiable mappings and applications[J]. Demonstratio Mathematica,1999,32(4):697-712.

(责任编辑:马田田)