DOI：10.19789/j.1004-9398.2024.02.009
文献引用：肖涵，侯博，曾琦波．具有非对称跃迁的一维非厄米系统研究进展[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2024，45(2)：84-94+114.
XIAO H，HOU B，ZENG Q B. Research progress on one-dimensional Non-Hermitian systems with asymmetric hopping[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2024，45(2)：84-94+114.

具有非对称跃迁的一维非厄米系统研究进展*

肖　涵，侯　博，曾琦波**
（首都师范大学物理系，北京　100048）

摘要：近年来，非厄米系统受到了物理学各个领域的广泛关注并被深入研究。通过在系统的哈密顿量中引入非厄米项，可以对开放系统做出很好地描述；而非厄米项的存在，往往会深刻地改变系统的性质，从而出现诸如奇异点、非厄米趋肤效应等在传统的厄米系统中不存在的现象。这些新奇效应不仅在理论研究上具有重要意义，在设计新型量子传感器和激光器等实际应用方面也具有巨大潜力。本文基于过去几年在非厄米系统方面的研究工作，对具有非对称跃迁的一维非厄米系统的研究进展进行了总结。

关键词：非厄米系统；非厄米趋肤效应；一维系统
中图分类号：O413　　**文献标志码**：A

Research progress on one-dimensional Non-Hermitian systems with asymmetric hopping*

XIAO Han，HOU Bo，ZENG Qibo**
（Department of Physics，Capital Normal University，Beijing　100048）

Abstract：Non-Hermitian systems have attracted much attention during the past few years. Non-Hermitian terms can be introduced into the model Hamiltonian to give a good description of open systems. The presence of such terms will modify the system's properties in a significant way，leading to phenomena that cannot be found in Hermitian systems，such as the exceptional point，the non-Hermitian skin effect，etc. These exotic effects are not only important in theoretical studies，they are potential for applications in designing new types of quantum sensors and lasers. Based on the authors' recent research work on non-Hermitian physics，this paper summarizes the recent progress on one-dimensional non-Hermitian systems with asymmetric hopping.

Keywords：non-Hermitian systems；non-Hermitian skin effect；one-dimensional systems
CLC：O413　　**DC**：A

0　引　言

非厄米系统在近20年中引起了研究人员的广泛关注，并且在过去的几年中得到了进一步深入研究与拓展[1-5]。在传统的量子力学中，系统的算符要求是厄米的，这样可以保证本征值为实数和概率

收稿日期：2023-11-10
* 国家自然科学基金项目（12204326）
** 通信作者：zengqibo@cnu.edu.cn

守恒,从而对物理世界进行描述。如系统的哈密顿量算符是厄米的,即满足$H^\dagger = H$,其对应的本征值即系统的能量为实数。然而,由于所研究的系统往往并不是完全孤立的,而是与外部环境之间存在相互作用,此时系统不再是一个孤立系统,而是一个开放系统。因此,如何将环境对所研究系统的影响考虑在内是一个重要的问题。由于环境的自由度往往非常大,如果将环境和系统作为整体考虑在内,那么整个问题将变得非常复杂且难以求解。为了解决这一矛盾,可以通过把环境的影响约化到系统的哈密顿量中,从而得到一个有效哈密顿量,进而进行求解。这样得到的有效哈密顿量往往是非厄米的,即有$H^\dagger \neq H$,哈密顿量中的非厄米项代表了环境对于系统的影响。这类方法曾被应用于研究原子核的性质[6-10],随着理论与实验技术的发展,近年来非厄米哈密顿量被越来越多地应用于各种经典[11-21]和量子[22-31]开放系统的性质,并发现了很多新奇的物理效应和现象。系统哈密顿量中的非厄米项有多种来源,如准粒子的有限寿命[32-35],复折射系数[36-38]以及包含耗散元件的电路等[39-43]。此外,研究开放系统的另一种重要方法是量子主方程,这类方法可以有效地用于研究开放量子系统的时间演化,对其性质进行表征和描述[44-45]。通过量子主方程也能得到有效的非厄米哈密顿量。如在Lindblad主方程中,如果忽略量子跃迁的影响,也能得到一个非厄米的有效哈密顿量[46],进而对问题进行研究和讨论。对于格点系统,非厄米哈密顿量中的非厄米项主要表现在格点上在位势能中的增益或损耗,以及格点跃迁项中的不对称性,这些非厄米项对系统的性质具有非常重要的影响。

不同于传统的厄米哈密顿量,非厄米哈密顿量的本征能量往往是复数,然而,如果这一哈密顿量具有PT(parity time)对称性[47-49]或者赝厄米性[50-52],则其本征能量也能保持为实数。这一现象的发现,使得非厄米系统在过去的20年间获得了持续的关注和发展。通过改变系统参数,非厄米系统的能谱中可能会出现一种新型的能量简并点——奇异点。在奇异点处,不仅能量是简并的,而且相互独立的本征态个数比能量简并度个数要少,这一特性与厄米系统中的能量简并点不同[53-54]。奇异点不仅在理论研究中具有重要价值,还在增强传感器性能方面具有重要作用[20-21]。此外,由于非厄米系统的能量往往为复数,其能谱结构在二维能量复平面上能够表现出更多丰富的能带结构特征,如点能隙和线能隙[55]、环状能隙等[56-57]。近年来发现的另一种新奇效应——非厄米趋肤效应[58-59],进一步引发了对非厄米系统的新一轮研究热潮。在具有非对称跃迁的系统中,由于粒子在不同方向的跃迁强度不相等,系统本征态在开边界条件下,不再分布于整个系统中,而是会被局域在系统的某一个边界上。非厄米趋肤效应的存在使得系统的能谱对于边界条件的改变十分敏感[60],因而可以用于设计新型传感器[61-62]。另一方面,非厄米趋肤效应对系统的拓扑性质也有重要影响,会改变传统的厄米拓扑系统中的体-边界对应关系[58-59],进而引发了非厄米拓扑系统这一领域的一系列新的进展[4-5]。非厄米趋肤效应还对Anderson局域化现象具有重要影响[63-69]。如果在无序或者准周期系统中引入非对称跃迁,往往会引起退局域化效应。由此可见,非厄米因素对于各种不同的物理系统和性质都具有极大的影响,对非厄米系统的研究不仅在理论上具有重要价值,在应用中也有巨大潜力。

本文将基于过去几年在非厄米系统这一领域的研究工作,对非厄米系统,特别是具有非对称跃迁的一维非厄米晶格系统中的能谱性质、局域化现象以及拓扑态等现象进行总结。

1　非厄米系统的能谱性质

首先考察非厄米系统的能谱性质。由于系统哈密顿量是非厄米的,其本征能量通常为复数而非实数。然而,对于满足PT对称或者具有赝厄米性的非厄米哈密顿量,其能谱在某些参数范围内却能够保持为实数。如果非厄米项出现在哈密顿矩阵的对角元中,其PT对称性或者赝厄米性通常比较容易判断;但如果非厄米项出现在哈密顿矩阵的非对角元上,则其PT对称性或赝厄米性往往较难判断出来。具有非对称跃迁的非厄米系统便属于后者。本文考察一类系统参数均为实数的一维格点系统,其最近邻格点之间的跃迁是非对称的,即从格点j到格点j+1的前向跃迁与从格点j+1到格点j的后向跃迁不相等,在开边界条件下哈密顿量可表示为[70]

$$H = \sum_{j=1}^{L} V_j c_j^\dagger c_j + \sum_{j=1}^{L-1} \left(t_j c_j^\dagger c_{j+1} + t_j' c_{j+1}^\dagger c_j \right), \quad (1)$$

式中:$c_j^\dagger$和c_j是格点j处的粒子产生与湮灭算符;V_j为格点j处的在位势能且设为实数;t_j和t_j'分别为最

近邻格点间的后向跃迁和前向跃迁强度,且均为实数。整个一维系统的格点数为L。由于$t_j \neq t_j'$,该哈密顿量是非厄米的,这一哈密顿量可以写成三对角矩阵的形式

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} V_1 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1' & V_2 & t_2 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2' & V_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & V_L \end{pmatrix}。$$

对于这一矩阵,如果其中的矩阵元满足条件$t_j t_j' > 0$,则该矩阵可以通过相似变换变成一个厄米矩阵。因此,定义矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix},$$

式中的对角元为

$$d_j=\begin{cases} 1, j=1, \\ \sqrt{\dfrac{t_{j-1}'t_{j-2}'\cdots t_1'}{t_{j-1}t_{j-2}\cdots t_1}}, j=2,3,\cdots,L。 \end{cases}$$

变换后得到的矩阵$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{D}$是厄米的,其本征值为实数。这意味着矩阵$\boldsymbol{H}$的本征值也为实数,因为相似变换不改变矩阵的本征值。通过上述的相似变换,可以进一步证明,系统的哈密顿量是具有赝厄米性的。

如果哈密顿量$\boldsymbol{H}$中的在位势能项均为虚数,则使用上述相同的相似变换,可以证明哈密顿量矩阵在满足条件$t_j t_j' < 0$时,其本征值为虚数[70]。由于上述证明过程中并没有给定跃迁项t_j和t_j'的具体形式,因此上述结论可以用于各类具有实数跃迁项的系统。

非厄米系统在满足一定条件下能够出现实数能谱,但在一般情况下其能谱为复数。由于其能量本征值分布在二维的复平面上,非厄米系统能够展现出更丰富的能带结构,如点能隙和线能隙等。在之前的研究中,主要考察的都是最近邻跃迁中存在非对称跃迁的情况,如果进一步考察非近邻跃迁,其能谱结构或许会出现更有趣的性质。为此,考虑在一维格点系统中,任何一个格点均与其最近邻的长程跃迁的长度(r_d)个格点间具有相同的非对称跃迁,其哈密顿量的表达式为[57]

$$H_{\text{off}}=\sum_{1\leqslant(j-i)\leqslant r_d}\left(t+\gamma\right)c_i^{\dagger}c_j+\left(t-\gamma\right)c_j^{\dagger}c_i, \tag{2}$$

式中γ表示非对称跃迁的强度。通过直接对角化该哈密顿量,可以得到系统在开边界条件下的能谱。将该哈密顿量变换到动量空间,得到其在周期边界下的能谱为

$$E_{\text{off}}(k)=\left(t+\gamma\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}r_d k}\right)+\left(t-\gamma\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r_d k}\right), \tag{3}$$

式中$k\in[0,2\pi)$。H_{off}在开边界和周期边界条件下的能谱如图1所示。系统在周期边界下的能谱在复能量平面形成闭合的环形结构,且随着r_d的增大,该环形曲线会发生自相交,构成多个圆环结构。通过计算显示,这些圆环都会通过$(0,0)$和$(-2t,0)$这2个点。其中,曲线经过原点$\left(r_d-1\right)$次,经过点$(-2t,0)$共r_d次。周期边界能谱的这种特征可以用卷绕数(W)来进行描述,即

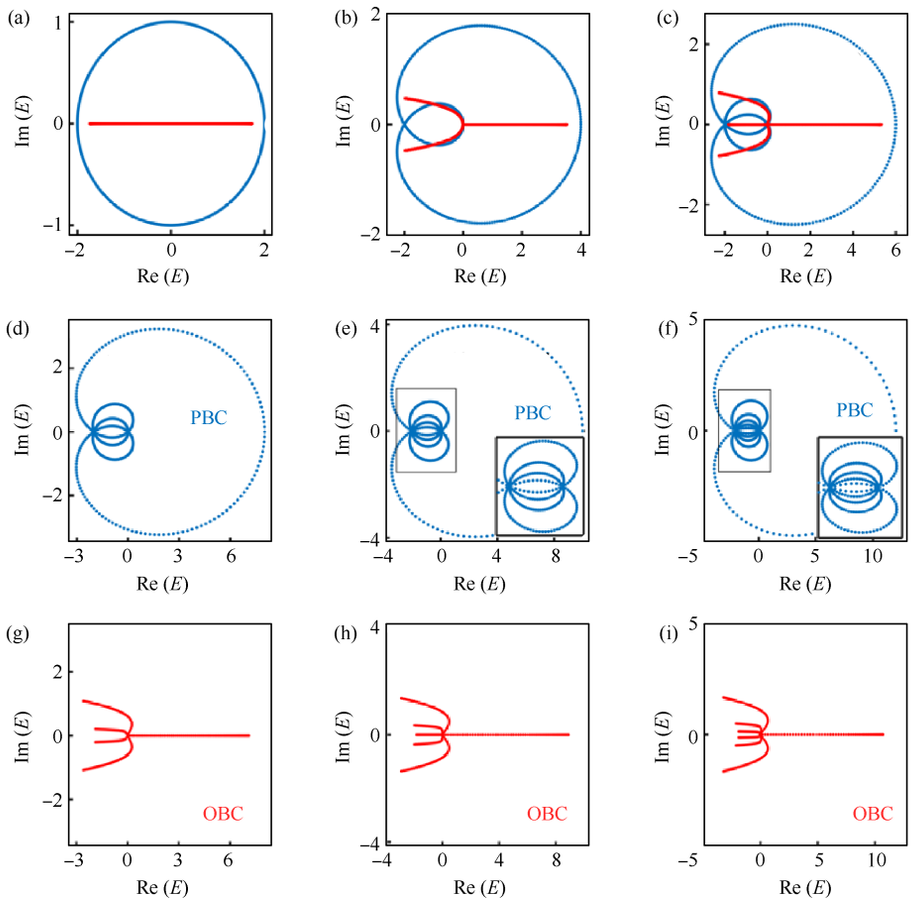
$$W=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}k\,\partial_k\arg\left[E(k)-E_{\text{B}}\right], \tag{4}$$

式中E_{B}为参考能量。对于不同的E_{B},W的最小值为0,最大值为r_d。另一方面,在开边界条件下,系统的能谱则会随着r_d的增大而呈现出分叉的形状,如图1中的红色线条所示。在只有最近邻非对称跃迁即$r_d=1$时,开边界下的能谱为实数;当$r_d>1$时,能谱会在原点处分叉,形成具有$\left(r_d+1\right)$个分支的星形结构。这些特征在只有最近邻非对称跃迁的系统中是不存在的。系统其他参数$t=1,\gamma=0.5,L=400$。

H_{off}中只包含长程非对称跃迁,其哈密顿矩阵中只有非对角元。如果进一步在系统中引入周期性的在位势能,其能谱会发生变化,为此,考虑哈密顿量

$$H_2=H_{\text{off}}+\sum_j V\cos\left(2\pi\alpha j\right)c_j^{\dagger}c_j, \tag{5}$$

式中$\alpha=p/q$为有理数,p和q为互质整数。由于存在周期调制,可以预期系统的能谱将会分为多个不同的能带。$\alpha=1/3$的系统在不同在位势能下的能谱如图2所示。系统参数为$\alpha=\dfrac{1}{3},\gamma=0.5,r_d=2,L=400$。随着$V$的增大,系统在周期边界和开边界下的能谱都会分成可区分的不同能带。尤为有趣的是,在某些参数条件下,如$V=0.5$和1.5时,系统在周期边界条件下的能谱会变成2个封闭环形曲线,且其中较小的环完全被另一个较大的环包围,且2个环之间没有任何的接触。因此,内外2个环状能带之间存在一个能隙。这一能隙与之前在非厄米系统中发现的线能隙和点能隙均不同,称其为环状能隙。这一发现进一步拓展了对非厄米系统的能谱拓扑结构的理解。



注:蓝色线条代表周期边界(PBC)能谱;红色线条代表开边界(OBC)能谱。

图 1　具有长程非对称跃迁的一维晶格系统在不同长度的非对称跃迁下的能谱[57]

(a)r_d = 1;(b)r_d = 2;(c)r_d = 3;(d~f)r_d = 4, 5, 6 的周期边界能谱;(g~i)r_d = 4, 5, 6 的开边界能谱

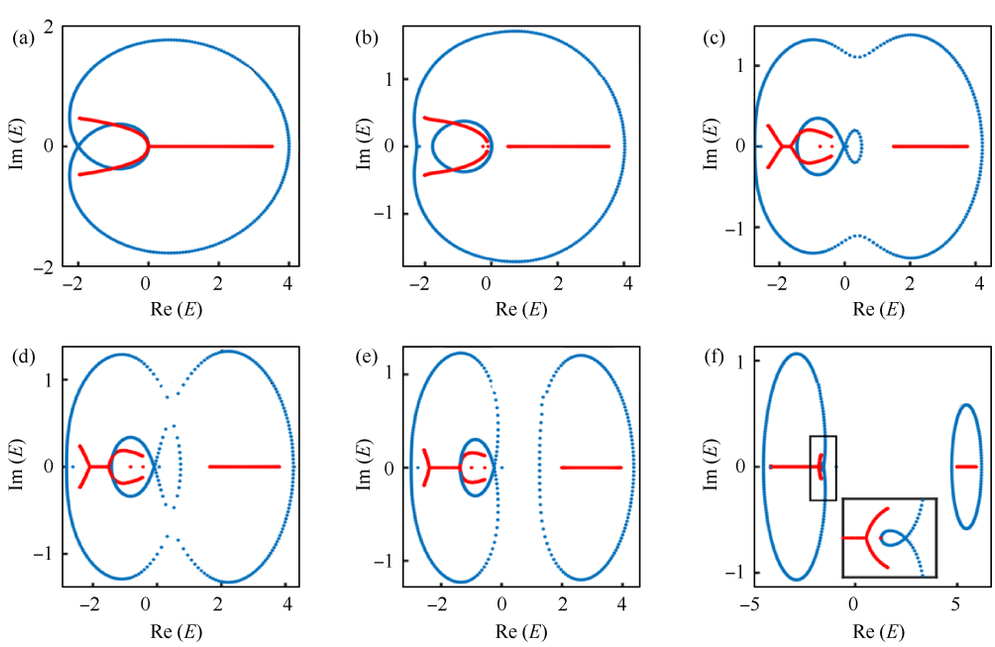


图 2　具有长程非对称跃迁的一维晶格系统在不同在位势能强度下的能谱[57]

(a)V = 0;(b)V = 0.50;(c)V = 1.50;(d)V = 1.65;(e)V = 2.00;(f) V = 5.00

2 非厄米趋肤效应边

通过讨论可知,长程非对称跃迁对于非厄米系统的能谱结构具有很大的影响。在此基础上,本文继续探究长程非对称跃迁对于非厄米系统本征态的影响。在具有最近邻非对称跃迁的系统中,如Hatano-Nelson模型中,本征态会局域在系统的边界处,从而出现非厄米趋肤效应。如果进一步考虑长程非对称跃迁,可以预期系统中应该也有趋肤效应,但其性质是否与只有最近邻跃迁的系统中的趋肤效应类似则需要进一步研究。首先考察具有次近邻非对称跃迁的一维晶格系统,其哈密顿量为[71]

$$H_{\mathrm{NNN}}=\sum_{j}\begin{bmatrix}\left(t_1-\gamma_1\right)c_{j+1}^{\dagger}c_j+\left(t_2-\gamma_2\right)c_{j+2}^{\dagger}c_j+\\ \left(t_1+\gamma_1\right)c_j^{\dagger}c_{j+1}+\left(t_2+\gamma_2\right)c_j^{\dagger}c_{j+2}\end{bmatrix}。\quad(6)$$

在这一模型中,如果$t_2=\gamma_2=0$,则该模型退化为常规的Hatano-Nelson模型。为了更加明确地考察次近邻非对称跃迁对非厄米趋肤效应的影响,首先设置$\gamma_1=t_2=0$,即在最近邻跃迁是对称的,而前向和后向次近邻跃迁相差一个负号,得到的哈密顿量为

$$H'_{\mathrm{NNN}}=\sum_{j}\left[t_1c_{j+1}^{\dagger}c_j+t_1c_j^{\dagger}c_{j+1}-\gamma_2c_{j+2}^{\dagger}c_j+\gamma_2c_j^{\dagger}c_{j+2}\right]。\quad(7)$$

由于前向和后向的次近邻跃迁只相差一个负号,但强度一样,因而直观判断,系统中应该不会出现非厄米趋肤效应。然而出乎意料的是,数值计算结果表明,在开边界条件下,系统出现了趋肤效应,如图3(a)所示。为了区分局域在不同边界上的本征态,定义有向性逆参与度(directional inverse participation ratio,dIPR),即

$$\mathrm{dIPR}\left(\psi_n\right)=P\left(\psi_n\right)\sum_{j=1}^{L}\frac{\left|\psi_{n,j}\right|^4}{\left(\left\langle\psi_n\middle|\psi_n\right\rangle\right)^2},\quad(8)$$

式中

$$P\left(\psi_n\right)=\mathrm{sgn}\left[\sum_{j=1}^{L}\left(j-\frac{L}{2}-\delta\right)\left|\psi_{n,j}\right|\right],$$

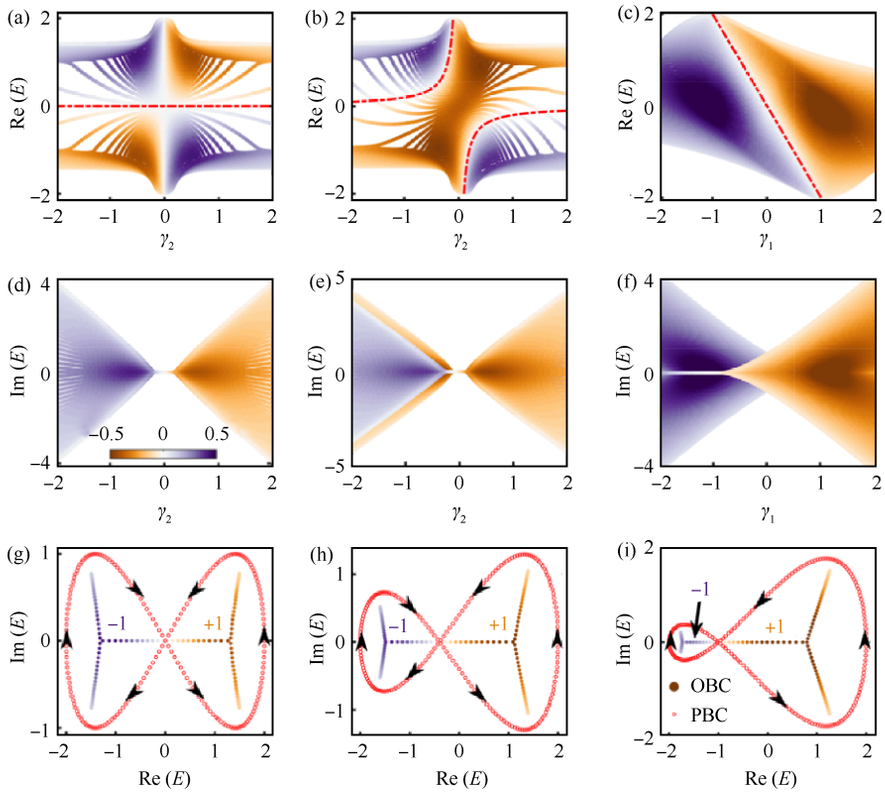
式中:$\delta\in(0,0.5)$是一个常数;$\psi_{n,j}$表示第n个波函数在第j个格点处的分量。由dIPR的表达式可知:如果ψ_n局域在一维晶格的右边界处,dIPR > 0;如果ψ_n局域在一维晶格的左边界处,则dIPR < 0。如果ψ_n为扩展态,那么dIPR → 0。因此,使用dIPR可以方便地判断趋肤效应的方向。由图3(a、d)可知,在$\gamma_1=0,\gamma_2\neq0$时,能量实部为正$\left[\mathrm{Re}(E)>0\right]$和能量实部为负$\left[\mathrm{Re}(E)<0\right]$的态被局域在一维晶格的2个不同的边界上。数值计算中选取的系统大小为L=120。因此,在该系统中,非厄米趋肤效应是与能量有关的,在能量实部中$\mathrm{Re}(E)=0$这条线将相反方向的趋肤效应区分开来。这一特征与局域化现象中的迁移率边类似,因此将其取名为非厄米趋肤效应边。如果$\gamma_1\neq0$,趋肤效应边将不再是一个常数,如图3(b、e)所示。此时,趋肤效应边与γ_2的值有关,且可以用方程$\mathrm{Re}(E)=-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}t_1$来进行描述,如红色点划线所示。图3(c、f)进一步给出了能谱作为γ_1的函数,能谱中的趋肤效应边也由方程$\mathrm{Re}(E)=-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}t_1$来描述。

为了确定非厄米趋肤效应边的位置,需要进一步考察系统在周期边界下的能谱特征。对于有趋肤效应的系统,其周期边界下的能谱往往在复能量平面上形成封闭的环,并且可以用W来进行刻画。图3(g~i)给出了系统在不同参数下的开边界和周期边界的能谱结构。周期边界下的能谱(红色空心圆点)形成2个相连的圆环,并且分别将开边界下局域在不同边界的态包含在其内。为了刻画周期边界下能谱的性质,可以计算其W。结果表明,在开边界下局域在不同边界处的本征态,其对应的周期边界下能谱的W互为相反数,如图3(g~i)中的数字所示。如果本征态在开边界下被趋肤效应局域在右边界,则有$W=-1$;反之,如果本征态在开边界下局域在左边界,则有$W=+1$。因此,在周期边界能谱中,W从+1变成-1的临界点就对应非厄米趋肤效应边。该临界点可以通过计算周期边界能谱中的自相交点来获取。对于$t_2=0$的情形,计算可以得到系统中趋肤效应边为

$$\mathrm{Re}\left(E_{\mathrm{NNN}}^{\mathrm{SI}}\right)=-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}t_1,\ \mathrm{Im}\left(E_{\mathrm{NNN}}^{\mathrm{SI}}\right)=0,\ (t_2=0),\quad(9)$$

式中$\left|\frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right|\leqslant1$,这一结果与数值结果一致。

有了以上分析,接下来可以考察更为复杂的情况,即$t_2\neq0$时系统中的非厄米趋肤效应边。图4(a、b)给出了$t_2=1,\gamma_2=0.5,L=120$时,系统的开边界能谱作为γ_1的函数图像。此时系统中可以出现2个趋肤效应边。图4(c~f)给出了不同γ_1值下的能谱图。与前述类似,周期边界下的能谱形成



注:(a~f)中的颜色代表本征态的有向性逆参与度(dIPR)值,红色点划线是非厄米趋肤效应边;(g~i)中实心点为开边界下的能谱,红色空心点为周期边界下的能谱,数字±1代表周期边界能谱的卷绕数。

图 3　H_{NNN} 在 $t_2 = 0$ 时的本征能谱和非厄米趋肤效应边[71]

(a~c)分别为开边界条件下 $\gamma_1 = 0, 0.2, \gamma_2 = 0.5$ 时本征能谱的实部作为参数 γ_1 或 γ_2 的函数;(d~f)分别为开边界条件下 $\gamma_1 = 0, 0.2, \gamma_2 = 0.5$ 时本征能谱的虚部作为参数 γ_1 或 γ_2 的函数;(g~i)为系统在 $\gamma_2 = 0.5$ 和 $\gamma_1 = 0, 0.2$ 和 0.5 时的能谱

自相交的封闭圆环,且将开边界下的能谱包含在其中。通过计算 W,可以得到非厄米趋肤效应边[71]。通过调节系统参数,周期边界能谱中的 3 个自相交点会发生移动甚至变成 1 个自相交点,如图 4(e)所示。此时,周期边界能谱形成一个三叶草结构,对应的 W 均为 +1,意味着开边界下本征态都局域在右边界处。

以上讨论了具有次近邻非对称跃迁系统中的非厄米趋肤效应边,这一现象是在只有最近邻跃迁的系统中不存在的。如果进一步考虑更为长程的非对称跃迁,比如第三近邻或者第四近邻的非对称跃迁,系统中也会出现非厄米趋肤效应边[71]。

3　准对易系统中的局域化现象和拓扑态

前面所讨论的非厄米系统中,非对称跃迁在各个格点之间都是相同的,不存在无序的情况。如果将系统中跃迁强度做随机排布,系统的性质会发生何种改变将会是一个有趣的问题。之前的研究已经表明,非对称跃迁所导致的非厄米趋肤效应对于无序或是准周期系统中的局域化现象具有重要影响。然而,这些系统中的无序主要来自在位势能项的随机或者准周期分布,而对于非对称跃迁中存在的无序则探讨较少。为此,考察一维模型[72]

$$H_{\mathrm{qr}} = \sum_{j=1}^{N-1} \left(t + t_{j\mathrm{L}}\right) c_j^{\dagger} c_{j+1} + \left(t + t_{j\mathrm{R}}\right) c_{j+1}^{\dagger} c_j, \quad (10)$$

式中:$\left(t + t_{j\mathrm{L}}\right)$ 和 $\left(t + t_{j\mathrm{R}}\right)$ 分别是第 j 个格点处与相邻格点之间的后向和前向跃迁强度;N 为系统的总格点数。对哈密顿量中的 $t_{j\mathrm{L}}$ 和 $t_{j\mathrm{R}}$ 的取值做如下设定:首先给定后向跃迁的强度为 $\left\{t_{j\mathrm{L}}\right\} = \left\{t_{1\mathrm{L}}, t_{2\mathrm{L}}, \cdots, t_{N-1,\mathrm{L}}\right\}$;然后,前向跃迁 $t_{j\mathrm{R}}$ 则用 $\left\{t_{j\mathrm{L}}\right\}$ 的一个随机排序获取,即有 $\left\{t_{j\mathrm{R}}\right\} = \left\{t_{1\mathrm{R}}, t_{2\mathrm{R}}, \cdots, t_{N-1,\mathrm{R}}\right\} = \wp\left\{t_{j\mathrm{L}}\right\}$,这里 $\wp\left\{t_{j\mathrm{L}}\right\}$ 代表对 $\left\{t_{j\mathrm{L}}\right\}$ 进行一次随机排序。当 $t_{j\mathrm{L}} \neq t_{j\mathrm{R}}$ 时,这样的随机排序将导致系统中出现非对称跃迁,因而 H_{qr} 是非厄米的。与此同时,从整个系统来看,前向跃迁和后向跃迁中的非对称跃迁项整体会发生抵消,

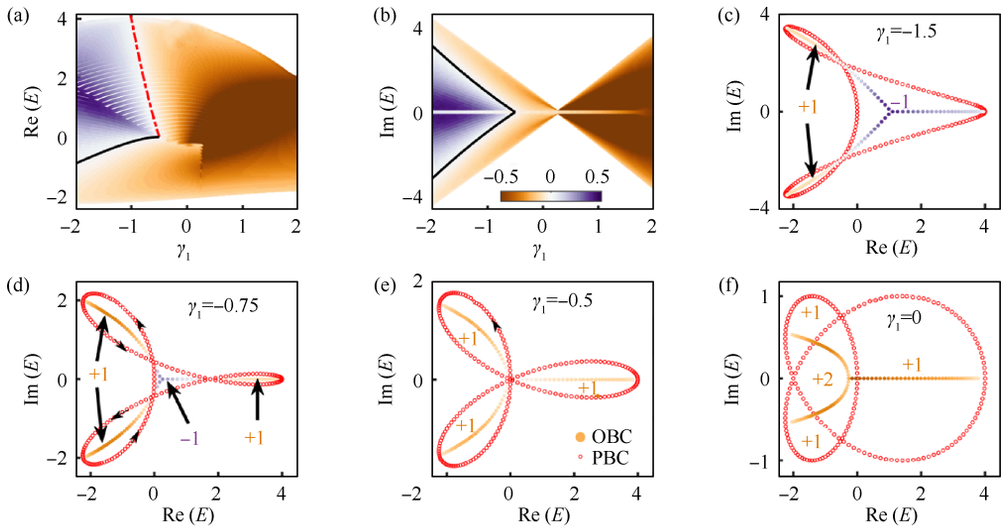


图4　H_{NNN}在$t_2 = 1$时的本征能谱和非厄米趋肤效应边[71]

(a、b)为开边界条件下本征能谱的实部和虚部作为参数γ_1的函数;(c~f)为系统在不同γ_1值下的开边界(实心点)和周期边界(红色空心点)下的能谱

因而可以预期系统中不会出现非厄米趋肤效应。这样的系统有别于之前研究的具有确定的非对称或非对易系统,将其称为准对易系统。本文将考察$\{t_{j\mathrm{L}}\}$选取如下不同取值时,准对易系统所展现的性质为:

均匀随机分布　$\{t_{j\mathrm{L}}\} \in (-\lambda, \lambda)$,

准周期分布　$t_{j\mathrm{L}} = \lambda\cos(2\pi\alpha j + \phi), \left(\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$,

周期分布　$t_{j\mathrm{L}} = \lambda\cos(2\pi\alpha j + \phi), \left(\alpha = \dfrac{p}{q}\right)$,

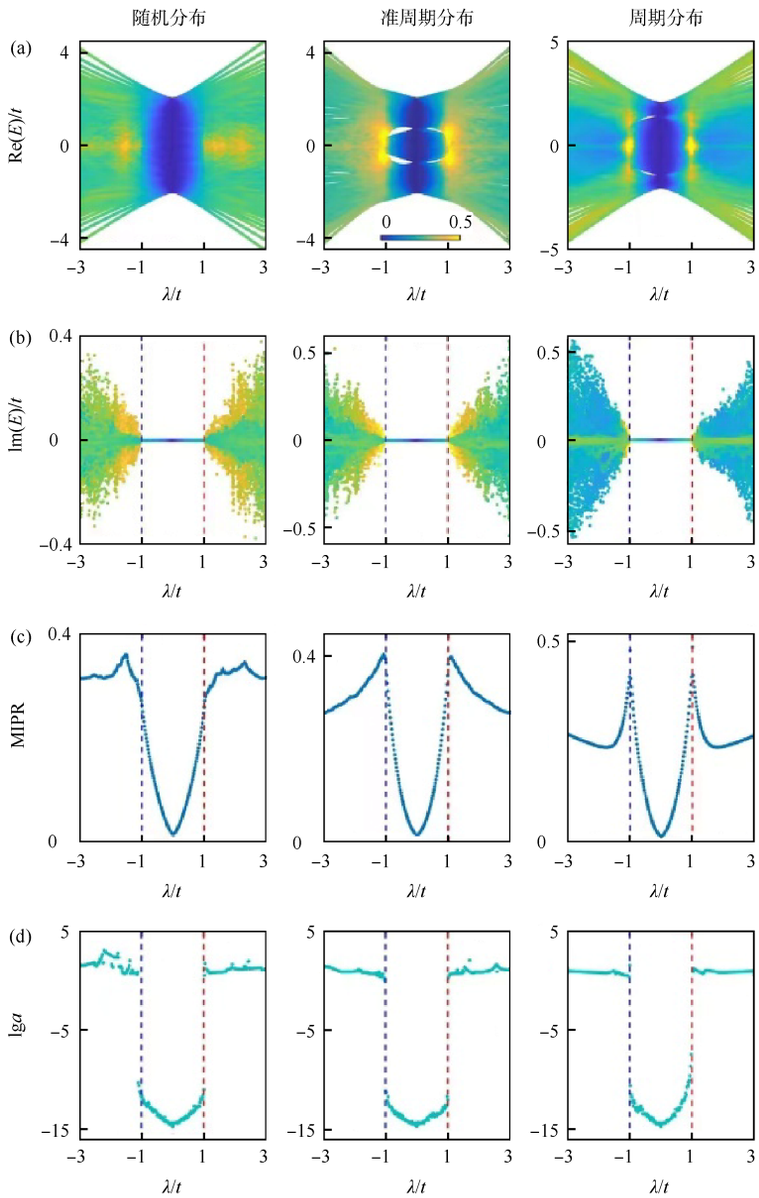
式中:λ为实数;p和q为互质的整数;ϕ是相位。

首先考察准对易系统的能谱性质。3种不同准对易系统的能谱如图5所示。第1和2行分别给出了系统本征能谱的实部和虚部作为λ的函数变化图。由能谱的虚部可知:当$|\lambda| < t$时,虚部为0,即系统的本征能量均为实数;当$|\lambda| > t$时,能谱为复数。可以利用相似变换的方法证明哈密顿量的赝厄米性。在图5的第4行中,给出了矩阵$\boldsymbol{H}_{\mathrm{qr}}^{\dagger} - \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{qr}}\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{R}}$的最大元素$a$的值,其中$\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{R}} = \sum_n |\psi_{n\mathrm{R}}\rangle\langle\psi_{n\mathrm{R}}|, |\psi_{n\mathrm{R}}\rangle$为哈密顿量的右本征矢。在$|\lambda| < t$时,$a$是一个接近于0的数,因而可以证明在这一参数范围内,系统为赝厄米的,因而其本征值为实数。在$|\lambda| < t$的区域,所有本征态的逆参与度(inverse participation ratio, IPR)都很小,说明这些态为扩展态,而没有局域在边界上,因而系统中不存在非厄米趋肤效应。随着λ的增大,系统中的无序度也增加,导致这些本征态变得局域化。注意,这里的局域化并不是趋肤效应导致的,而是由于无序导致的。系统中不出现趋肤效应可以理解为:从局部来看,某个格点附近的跃迁是非对称的,但由于$\{t_{j\mathrm{R}}\}$只是$\{t_{j\mathrm{L}}\}$的一个随机排序,始终有$\sum_j t_{j\mathrm{L}} = \sum_j t_{j\mathrm{R}}$;从整体来看,前向跃迁和后向跃迁中的非对称始终相互抵消,系统中不存在趋肤效应。此外,在λ较小时,系统的本征态是扩展态,而当λ较大时,这些态会变成局域态。从IPR值的变化来看,系统本征态从扩展态变成局域态是与能量有关的,即系统中的安德森局域化相变是能量依赖的。系统参数$t = 1, N = 100$,数值结果是经过100个样本平均后得到的。

接下来研究准对易系统中的拓扑态。为此选取$\{t_{j\mathrm{L}}\}$为周期分布的情形,并设定$\alpha = 1/2$。此时,系统中的后向跃迁为

$$\begin{cases} t - \lambda j\cos(\phi), & j\text{为奇数}, \\ t + \lambda j\cos(\phi), & j\text{为偶数}。 \end{cases}$$

因此,后向跃迁具有交替变化的跃迁强度,与传统的Su-Schrieffer-Heeger(SSH)模型类似,只不过对于这里的准对易系统来说,前向跃迁不再是规则的交替变化,而是后向跃迁的随机排布,因此将其称为准对易SSH模型。图6(a、b、d和e)给出了准对易SSH模型在不同参数下的能谱。由图可知,当$0 < \lambda < t$时,系统能谱为实数且存在能隙,在能隙中

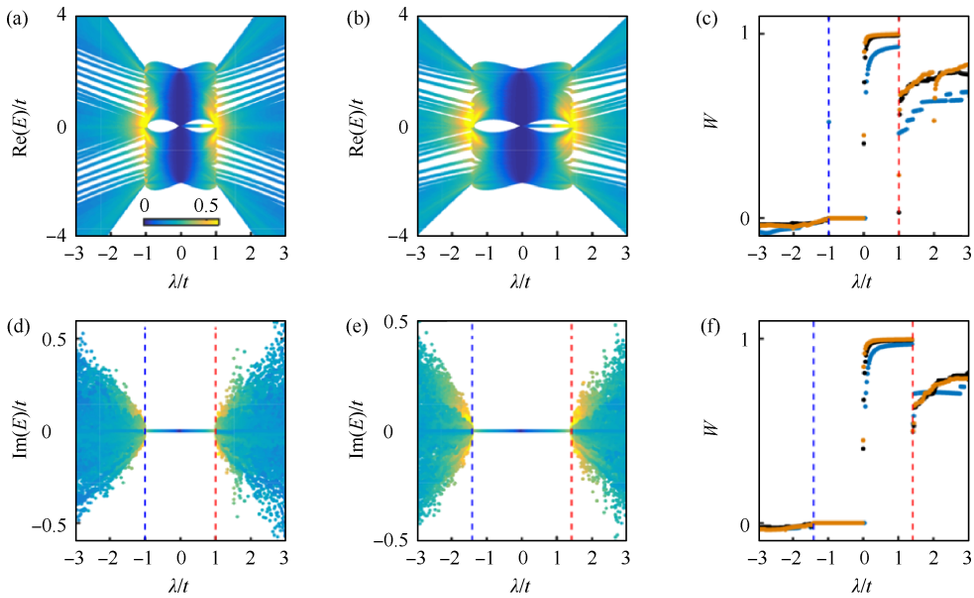


注:(a、b)中的颜色代表本征态的IPR值。

图5　不同准对易系统的性质随参数λ变化的分布特征[72]

(a)本征能量实部;(b)本征能量虚部;(c)平均IPR值(MIPR);(d)矩阵$H_{qr}^{\dagger}-\eta_R^{-1}H_{qr}\eta_R$中的最大元素

存在零能边界态,系统处于拓扑非平庸态。当λ进一步增大时,系统能量变成复数,系统能隙闭合,零能边界态消失,系统变为拓扑平庸态。对于一般情况,准对易SSH模型中的实数能谱所处的参数范围为$|\lambda|<t/\cos(\phi)$,而拓扑非平庸区域则为$0<\lambda<t/\cos(\phi)$。为了表征准对易SSH模型的拓扑态,可以计算其W。由于准对易系统并没有空间平移对称性,只能在实空间下计算W。注意到,即使系统中存在无序,系统的哈密顿量在q为偶数时仍然具有手性对称性。可以验证,当选取矩阵$\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(1,-1,1,-1,\cdots)$时,有$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{H}$,因而该哈密顿量具有手性对称性。因此,可以定义并计算W。图6(c、f)给出了准对易SSH模型在$\alpha=1/2$,ϕ分别为0和$\frac{\pi}{4}$时W随参数λ的变化。与图6(a、b、d和e)中的能谱图对比之后可知,在能谱为实数的区域,W取0和1这2个整数值,且在有零能边界态的区域,系统的W从0突变为1。而在系统能谱为复数的区域,W并不是一个整数。以上计算对于q为其他偶数值时也成立。因此,通过计算W这一拓扑



注:不同颜色的点分别代表不同尺度的系统(N = 100(蓝色),400(黑色),1000(黄色))。

图6　准对易SSH模型在不同参数下的能谱和卷绕数[72]

(a、d)分别为α = 1/2, ϕ = 0时能谱的实部和虚部;(b、e)分别为α = 1/2, ϕ = π/4时能谱的实部和虚部;(c、f)分别为ϕ = 0, ϕ = π/4时的卷绕数

不变量,可以很好地表征准对易SSH模型中的拓扑态。计算结果是在系统尺度为N = 100且通过100个样本平均得到的。

4　结束语

本文总结了具有不同类型的非对称跃迁的非厄米系统的能谱性质、安德森局域化现象以及拓扑态等现象,揭示了非对称跃迁在改变系统性质方面的重要影响,引入了诸如非厄米趋肤效应边和准对易系统等概念。非厄米系统是一个发展十分迅速的研究方向,并在物理学的各个研究领域都有所扩展,引发了一系列新现象的发现和探究。在这些研究成果基础上,将会有更多有趣的新奇效应被发现。如对于具有非厄米趋肤效应边的系统,可以进一步考察在位势能对系统的影响。此外,二维或三维系统中的非厄米趋肤效应近年来引起了广泛的兴趣,其特征与一维系统中的趋肤效应有很大的不同,需要进一步研究[73]。另一方面,非厄米多体系统也是一个重要的研究方向,非厄米效应对于多体系统的影响在最近的研究中也不断地被揭示,比如非厄米多体局域化现象[74]和非厄米系统中存在没有能隙闭合的连续相变[75]。这些现象表明,多体系统在非厄米因素的影响下,会表现出很多在厄米多体系统中不存在的新奇效应。这一研究方向目前仍处在起始阶段,仍有很多未知的问题值得去探索。相信通过研究这些问题,可以进一步推动非厄米物理的研究,增加对于非厄米系统的理解。

参 考 文 献

[1] CAO H, WIERSIG J. Dielectric microcavities: model systems for wave chaos and non-Hermitian physics[J]. Reviews of Modern Physics, 2015, 87(1): 61.

[2] KONOTOP V V, YANG J, ZEZYULIN D A. Nonlinear waves in PT-symmetric systems[J]. Reviews of Modern Physics, 2016, 88(3): 035002.

[3] EL-GANAINY R, MAKRIS K G, KHAJAVIKHAN M, et al. Non-Hermitian physics and PT symmetry[J]. Nature Physics, 2018, 14(1): 11-19.

[4] ASHIDA Y, GONG Z, UEDA M. Non-Hermitian physics[J]. Advances in Physics, 2020, 69(3): 249-435.

[5] BERGHOLTZ E J, BUDICH J C, KUNST F K. Exceptional topology of non-Hermitian systems[J]. Reviews of Modern Physics, 2021, 93(1): 015005.

[6] MAHAUX C, WEIDENMÜLLER H A, KLEIN A. Shell-model approach to nuclear reactions[J]. Physics Today, 1971, 24(2): 46-47.

[7] SOKOLOV V V, ZELEVINSKY V G. Dynamics and statistics of unstable quantum states[J]. Nuclear Physics A, 1989, 504(3): 562-588.

[8] DITTES F M. The decay of quantum systems with a

small number of open channels[J]. Physics Reports, 2000,339(4):215-316.
[9] ROTTER I. A continuum shell model for the open quantum mechanical nuclear system[J]. Reports on Progress in Physics,1991,54(4):635.
[10] AMIR A, OREG Y, IMRY Y. Decays in quantum hierarchical models[J]. Physical Review A, 2008, 77(5):050101.
[11] MAKRIS K G, EL-GANAINY R, CHRISTODOULIDES D N, et al. Beam dynamics in PT symmetric optical lattices[J]. Physical Review Letters, 2008,100(10):103904.
[12] KLAIMAN S, GÜNTHER U, MOISEYEV N. Visualization of branch points in PT-symmetric waveguides[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(8):080402.
[13] GUO A, SALAMO G J, DUCHESNE D, et al. Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials[J]. Physical Review Letters,2009,103(9):093902.
[14] RÜTER C E, MAKRIS K G, EL-GANAINY R, et al. Observation of parity-time symmetry in optics[J]. Nature Physics,2010,6(3):192-195.
[15] LIN Z, RAMEZANI H, EICHELKRAUT T, et al. Unidirectional invisibility induced by PT-symmetric periodic structures[J]. Physical Review Letters, 2011, 106(21):213901.
[16] REGENSBURGER A, BERSCH C, MIRI M A, et al. Parity-time synthetic photonic lattices[J]. Nature, 2012, 488(7410):167-171.
[17] FENG L, XU Y L, FEGADOLLI W S, et al. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies[J]. Nature Materials,2013,12(2):108-113.
[18] PENG B, ÖZDEMIR Ş K, LEI F, et al. Parity-time-symmetric whispering-gallery microcavities[J]. Nature Physics,2014,10(5):394-398.
[19] WIERSIG J. Enhancing the sensitivity of frequency and energy splitting detection by using exceptional points: application to microcavity sensors for single-particle detection[J]. Physical Review Letters, 2014, 112(20):203901.
[20] HODAEI H, HASSAN A U, WITTEK S, et al. Enhanced sensitivity at higher-order exceptional points[J]. Nature,2017,548(7666):187-191.
[21] CHEN W, KAYA ÖZDEMIR Ş, ZHAO G, et al. Exceptional points enhance sensing in an optical microcavity[J]. Nature,2017,548(7666):192-196.
[22] BRODY D C, GRAEFE E M. Mixed-state evolution in the presence of gain and loss[J]. Physical Review Letters,2012,109(23):230405.
[23] LEE T E, CHAN C K. Heralded magnetism in non-Hermitian atomic systems[J]. Physical Review X, 2014,4(4):041001.
[24] LI J M, HARTER A K, LIU J, et al. Observation of parity-time symmetry breaking transitions in a dissipative Floquet system of ultracold atoms[J]. Nature Communications,2019,10:855.
[25] KAWABATA K, ASHIDA Y, UEDA M. Information retrieval and criticality in parity-time-symmetric systems[J]. Physical Review Letters,2017,119(19):190401.
[26] HAMAZAKI R, KAWABATA K, UEDA M. Non-Hermitian many-body localization[J]. Physical Review Letters,2019,123(9):090603.
[27] XIAO L, WANG K, ZHAN X, et al. Observation of critical phenomena in parity-time-symmetric quantum dynamics[J]. Physical Review Letters, 2019, 123(23):230401.
[28] WU Y, LIU W, GENG J, et al. Observation of parity-time symmetry breaking in a single-spin system[J]. Science,2019,364(6443):878-880.
[29] YAMAMOTO K, NAKAGAWA M, ADACHI K, et al. Theory of non-Hermitian fermionic superfluidity with a complex-valued interaction[J]. Physical Review Letters, 2019,123(12):123601.
[30] NAGHILOO M, ABBASI M, JOGLEKAR Y N, et al. Quantum state tomography across the exceptional point in a single dissipative qubit[J]. Nature Physics,2019,15(12):1232-1236.
[31] MATSUMOTO N, KAWABATA K, ASHIDA Y, et al. Continuous phase transition without gap closing in non-Hermitian quantum many-body systems[J]. Physical Review Letters,2020,125(26):260601.
[32] KOZII V, FU L. Non-Hermitian topological theory of finite-lifetime quasiparticles: prediction of bulk Fermi arc due to exceptional point[EB/OL]. (2017-08-19)[2023-12-20]. arXiv:1708.05841,2017.
[33] SHEN H, FU L. Quantum oscillation from in-gap states and a non-Hermitian landau level problem[J]. Physical Review Letters,2018,121(2):026403.
[34] YOSHIDA T, PETERS R, KAWAKAMI N. Non-Hermitian perspective of the band structure in heavy-fermion systems[J]. Physical Review B, 2018, 98(3):035141.
[35] TAO Y L, QIN T, XU Y. Exceptional heavy-fermion semimetals in three dimensions[J]. Physical Review B,

2023,107(3):035140.
[36] MUSSLIMANI Z H, MAKRIS K G, EL-GANAINY R, et al. Optical solitons in PT periodic potentials [J]. Physical Review Letters, 2008, 100(3):030402.
[37] KLAIMAN S, GÜNTHER U, MOISEYEV N. Visualization of branch points in PT-symmetric waveguides [J]. Physical Review Letters, 2008, 101(8):080402.
[38] FENG L, EL-GANAINY R, GE L. Non-Hermitian photonics based on parity-time symmetry [J]. Nature Photonics, 2017, 11(12):752-762.
[39] SCHINDLER J, LI A, ZHENG M C, et al. Experimental study of active LRC circuits with PT symmetries [J]. Physical Review A, 2011, 84(4):040101.
[40] LUO K, FENG J, ZHAO Y X, et al. Nodal manifolds bounded by exceptional points on non-Hermitian honeycomb lattices and electrical-circuit realizations [EB/OL]. (2018-10-22) [2023-12-20]. arXiv: 1810.09231, 2018.
[41] LEE C H, IMHOF S, BERGER C, et al. Topolectrical circuits[J]. Communications Physics, 2018, 1(1):39.
[42] HELBIG T, HOFMANN T, IMHOF S, et al. Generalized bulk-boundary correspondence in non-Hermitian topolectrical circuits [J]. Nature Physics, 2020, 16(7):747-750.
[43] HOFMANN T, HELBIG T, SCHINDLER F, et al. Reciprocal skin effect and its realization in a topolectrical circuit [J]. Physical Review Research, 2020, 2(2):023265.
[44] BREUER H P, PETRUCCIONE F. The theory of open quantum systems [M]. New York: Oxford University Press, 2002.
[45] CAMPAIOLI F, COLE J H, HAPUARACHCHI H. A tutorial on quantum master equations: tips and tricks for quantum optics, quantum computing and beyond[EB/OL]. (2023-03-29)[2023-12-20]. arXiv:2303.16449, 2023.
[46] ROCCATI F, PALMA G M, CICCARELLO F, et al. Non-Hermitian physics and master equations [J]. Open Systems & Information Dynamics, 2022, 29(1):2250004.
[47] BENDER C M, BOETTCHER S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry [J]. Physical Review Letters, 1998, 80(24):5243.
[48] BENDER C M, BRODY D C, JONES H F. Complex extension of quantum mechanics [J]. Physical Review Letters, 2002, 89(27):270401.
[49] BENDER C M. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians[J]. Reports on Progress in Physics, 2007, 70(6):947.
[50] MOSTAFAZADEH A. Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian[J]. Journal of Mathematical Physics, 2002, 43(1):205-214.
[51] MOSTAFAZADEH A. Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics [J]. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2010, 7(7): 1191-1306.
[52] MOISEYEV N. Non-Hermitian quantum mechanics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
[53] KATO T. Perturbation theory for linear operators [M]. New York: Springer, 1966.
[54] HEISS W D. Phases of wave functions and level repulsion[J]. The European Physical Journal D(Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics), 1999, 7: 1-4.
[55] GONG Z, ASHIDA Y, KAWABATA K, et al. Topological phases of non-Hermitian systems [J]. Physical Review X, 2018, 8(3):031079.
[56] SHEN R, LEE C H. Non-Hermitian skin clusters from strong interactions[J]. Communications Physics, 2022, 5(1):238.
[57] ZENG Q B, LYU R. Evolution of spectral topology in one-dimensional long-range nonreciprocal lattices [J]. Physical Review A, 2022, 105(4):042211.
[58] YAO S, WANG Z. Edge states and topological invariants of non-Hermitian systems[J]. Physical Review Letters, 2018, 121(8):086803.
[59] YAO S, SONG F, WANG Z. Non-Hermitian Chern bands [J]. Physical Review Letters, 2018, 121(13):136802.
[60] XIONG Y. Why does bulk boundary correspondence fail in some non-Hermitian topological models [J]. Journal of Physics Communications, 2018, 2(3):035043.
[61] BUDICH J C, BERGHOLTZ E J. Non-Hermitian topological sensors [J]. Physical Review Letters, 2020, 125(18):180403.
[62] KOCH F, BUDICH J C. Quantum non-Hermitian topological sensors [J]. Physical Review Research, 2022, 4(1):013113.
[63] HATANO N, NELSON D R. Localization transitions in non-Hermitian quantum mechanics[J]. Physical Review Letters, 1996, 77(3):570.
[64] SHNERB N M, NELSON D R. Winding numbers, complex currents, and non-Hermitian localization [J]. Physical Review Letters, 1998, 80(23):5172
[65] GONG Z, ASHIDA Y, KAWABATA K, et al. Topological phases of non-Hermitian systems [J]. Physical Review X, 2018, 8(3):031079.

(下转第114页)

[46] CHUNG M, SKINNER W H, ROBERT C, et al. Fabrication of a wearable flexible sweat pH sensor based on SERS-active Au/TPU electrospun nanofibers [J]. ACS Applied Materials & Interfaces, 2021, 13(43): 51504-51518.
[47] LI N, SHEN F, CAI Z, et al. Target-induced core-satellite nanostructure assembly strategy for dual-signal-on fluorescence imaging and Raman quantification of intracellular microrna guided photothermal therapy [J]. Small, 2020, 16(49): e2005511.
[48] FEI J, WU L, ZHANG Y, et al. Pharmacokinetics-on-a-chip using label-free SERS technique for programmable dual-drug analysis[J]. ACS Sensors, 2017, 2(6): 773-780.
[49] LI L, HUTTER T, FINNEMORE A S, et al. Metal oxide nanoparticle mediated enhanced Raman scattering and its use in direct monitoring of interfacial chemical reactions[J]. Nano Letters, 2012, 12(8): 4242-4246.
[50] DE ALBUQUERQUE C D L, SOBRAL-FILHO R G, POPPI R J, et al. Digital protocol for chemical analysis at ultralow concentrations by surface-enhanced Raman scattering [J]. Analytical Chemistry, 2018, 90(2): 1248-1254.
[51] LIU P, CHULHAI D V, JENSEN L. Single-molecule imaging using atomistic near-field tip-enhanced Raman spectroscopy[J]. ACS Nano, 2017, 11(5): 5094-5102.
[52] TALLARIDA N, LEE J, APKARIAN V A. Tip-enhanced Raman spectromicroscopy on the angstrom scale: bare and CO-terminated Ag tips[J]. ACS Nano, 2017, 11(11): 11393-11401.
[53] SHIN H, OH S, HONG S, et al. Early-stage lung cancer diagnosis by deep learning-based spectroscopic analysis of circulating exosomes[J]. ACS Nano, 2020, 14(5): 5435-5444.
[54] XIE L, SHEN Y, ZHANG M, et al. Single-model multi-tasks deep learning network for recognition and quantitation of surface-enhanced Raman spectroscopy [J]. Optics Express, 2022, 30(23): 41580-41589.
[55] THRIFT W J, RONAGHI S, SAMAD M, et al. Deep learning analysis of vibrational spectra of bacterial lysate for rapid antimicrobial susceptibility testing [J]. ACS Nano, 2020, 14(11): 15336-15348.
[56] LEONG Y X, LEE Y H, KOH C S L, et al. Surface-enhanced Raman scattering (SERS) taster: a machine-learning-driven multireceptor platform for multiplex profiling of wine flavors[J]. Nano Letters, 2021, 21(6): 2642-2649.

(责任编辑:兰丽丽)

(上接第94页)

[66] JIANG H, LANG L J, YANG C, et al. Interplay of non-Hermitian skin effects and Anderson localization in nonreciprocal quasiperiodic lattices[J]. Physical Review B, 2019, 100(5): 054301.
[67] ZENG Q B, XU Y. Winding numbers and generalized mobility edges in non-Hermitian systems [J]. Physical Review Research, 2020, 2(3): 033052.
[68] LIU Y, WANG Y, LIU X J, et al. Exact mobility edges, PT-symmetry breaking, and skin effect in one-dimensional non-Hermitian quasicrystals [J]. Physical Review B, 2021, 103(1): 014203.
[69] LIU Y, ZHOU Q, CHEN S. Localization transition, spectrum structure, and winding numbers for one-dimensional non-Hermitian quasicrystals [J]. Physical Review B, 2021, 104(2): 024201.
[70] ZENG Q B, LYU R. Real spectra and phase transition of skin effect in nonreciprocal systems [J]. Physical Review B, 2022, 105(24): 245407.
[71] ZENG Q B. Non-Hermitian skin effect edge [J]. Physical Review B, 2022, 106(23): 235411.
[72] ZENG Q B, LYU R. Real spectra, Anderson localization, and topological phases in one-dimensional quasireciprocal systems [J]. New Journal of Physics, 2022, 24(4): 043023.
[73] ZHANG K, YANG Z, FANG C. Universal non-Hermitian skin effect in two and higher dimensions[J]. Nature Communications, 2022, 13: 2496.
[74] HAMAZAKI R, KAWABATA K, UEDA M. Non-Hermitian many-body localization[J]. Physical Review Letters, 2019, 123(9): 090603.
[75] MATSUMOTO N, KAWABATA K, ASHIDA Y, et al. Continuous phase transition without gap closing in non-Hermitian quantum many-body systems [J]. Physical Review Letters, 2020, 125(26): 260601.

(责任编辑:兰丽丽)