**DOI**:10.19789/j.1004-9398.2024.02.007
**文献引用**:徐子威,杨明月,纪安春,等.自旋轨道角动量耦合的超流费米气体[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,45(2):65-73. XU Z W,YANG M Y,JI A C,et al. Superfluid Fermi gas with spin-orbit angular momentum coupling[J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2024,45(2):65-73.

# 自旋轨道角动量耦合的超流费米气体

徐子威，杨明月，纪安春，孙 青*
（首都师范大学物理系，北京 100048）

**摘要**:近年来,自旋轨道耦合的原子气体研究取得了许多重要的进展,其中一种新近实现的新类型自旋轨道耦合-自旋轨道角动量耦合由于其独特性质吸引了人们的兴趣。本文以费米气体为例,介绍自旋轨道角动量耦合的实现和特点,以及对单粒子谱特别是对费米超流的重要影响。结合平均场解析方法和数值模拟,分析了自旋轨道角动量耦合诱导的有限角动量配对和由此导致的不同类型的超流涡旋基态,并进一步讨论了相关的进展和未来可能的发展方向。

**关键词**:费米气体;自旋轨道角动量耦合;费米超流;涡旋态
**中图分类号**:O469 **文献标志码**:A

# Superfluid Fermi gas with spin-orbit angular momentum coupling

XU Ziwei，YANG Mingyue，JI Anchun，SUN Qing*
（Department of Physics，Capital Normal University，Beijing 100048）

**Abstract**: In recent years, there have been significant advances in the study of atomic gases with spin-orbit coupling. Among these, a newly implemented type of spin-orbit coupling, known as spin-orbit angular momentum coupling, has drawn considerable interest due to its unique properties. In this article, we take fermionic gases as an example to introduce the implementation and characteristics of spin-orbit angular momentum coupling, emphasizing its important influence on single-particle spectra and particularly on fermionic superfluidity. By combining mean-field analytical methods and numerical simulations, we analyze the finite angular momentum pairing induced by spin-orbit angular momentum coupling and the resulting ground states of different types of superfluid vortices. Furthermore, we discuss relevant progress and potential future directions.

**Keywords**: Fermi gas; spin-orbit angular momentum coupling; Fermi superfluidity; vortex state
**CLC**: O469 **DC**: A

## 0 引 言

超冷原子体系由于其优越的可调控性和丰富的自由度,是进行量子模拟的理想平台[1-2]。实验上,人们可以通过磁光阱[3-4]、Feshbach共振[5-6]等先进的技术对原子感受到的外势和原子间相互作用等进行有效的调节,以此模拟和研究各类重要的物理现象和基础物理模型,甚至在自然界中难以实现

收稿日期:2024-03-11
* 通信作者:sunqing@cnu.edu.cn

的物理系统,如吸引费米气体中从玻色-爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein condensate,BEC)到巴丁-库珀-施里弗(Bardeen-Cooper-Schrieffer,BCS)超流体的跨越[2,7]。近年来,基于冷原子体系量子模拟的一个重要发展是人造规范势的实现,如电场、磁场[8]和自旋-轨道耦合(spin-orbit coupling,SOC)等[9-18]。以自旋-线性动量耦合为例,实验上通过双光子Raman过程先后在BEC[10,13-15]和超冷费米气体中实现了一维[11-12]、二维[16-17]和三维SOC[18]。SOC的引入显著改变了系统的单粒子能谱,这会对BEC的基态和费米气体的超流行为等产生重要影响,自提出和实验实现以来,针对SOC的研究取得了许多重要的进展[19-21],这也激发了人们提出和实现不同于自旋-线性动量耦合的其他类型的SOC并研究与之相关的物理效应[22-24]。最近,自旋-轨道角动量耦合(spin-orbital angular momentum coupling,SOAMC)也在理论上被提出[25-29]并率先在$^{87}$Rb的BEC得到实现[30-32]。

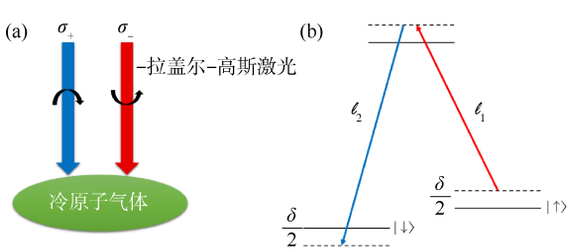
作为一种新类型的SOC,SOAMC带来的一个重要结果是轨道角动量参与形成的分立能谱[29]。目前针对SOAMC的研究尚处于发展阶段,且多关注BEC中的独特效应,如环状BEC中引起的量子化超流[33],具有SOAMC的BEC基态相图和激发谱[34-36],具有超固体特性的条纹相与角条纹相[37-39]和复杂涡旋分子相[40],具有SOAMC的双组分极化BEC的涡旋态[41]等。对于弱相互作用玻色气体,单粒子基态在多体BEC的基态构型中通常起着主导作用,这为理解BEC中的效应提供了一个相对简单和直接的途径。但是对于费米气体,由于费米-狄拉克统计,其多体基态主要决定于费米面附近的费米子的集体行为,其处理相对复杂,对于本文研究的费米超流问题,一般需要通过Bogoliubov-de Gennes(BdG)方程来进行求解。研究表明,当考虑SOAMC后,2个费米子在相互吸引作用下形成的配对可能携带角动量,这导致超流基态为旋转对称的涡旋态甚至是分立旋转对称的奇异涡旋态[42-43]。涡旋基态的出现揭示了SOAMC对费米气体超流和涡旋态形成的重要影响。目前费米气体中SOAMC效应的研究处于起步阶段,尚有一系列基本问题需要解决。本文将以吸引费米气体中SOAMC引起的涡旋态为例,介绍目前费米气体中SOAMC的实现方案、其对单粒子谱和费米超流的影响及基本的处理方案,并对已有的一些进展和后续可能的发展方向做简单的评述和展望。

## 1　具有SOAM耦合效应的费米气体

本文考虑二维双组分理想费米气体与2束沿$z$轴同向传播的拉盖尔-高斯(Laguerre-Gaussian,LG)激光耦合[25]。实验装置和能级结构如图1所示,2束携带相反轨道角动量($\pm\ell\hbar$)的激光,诱导原子在2个基态之间的双光子拉曼过程,产生有效的轨道角动量效应[30,42-43]。系统的单粒子哈密顿量可以写成

$$H_0=-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2+V(r)+\begin{pmatrix}\dfrac{\delta}{2} & \Omega(r)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\ell\theta}\\ \Omega(r)\mathrm{e}^{+2\mathrm{i}\ell\theta} & -\dfrac{\delta}{2}\end{pmatrix},\tag{1}$$

式中:$\delta$是失谐量;$M$是相对原子质量;非对角项$\Omega(r)$是空间依赖的2个赝自旋态($|\uparrow\rangle$和$|\downarrow\rangle$)之间双光子拉曼频率;$\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\ell\theta}$为激光的相位因子;$V(r)=\frac{1}{2}\omega^2r^2$是谐振子势。




注:$\sigma_+$和$\sigma_-$分别表示携带相反轨道角动量的激光;$\ell_1$和$\ell_2$分别表示携带的轨道角动量;$\delta$为双光子失谐量;$|\uparrow\rangle$和$|\downarrow\rangle$分别表示自旋向上和向下的2个原子态。

**图1　实验装置与能级结构**

**(a)具有相反轨道角动量的拉盖尔-高斯(LG)激光$\sigma_+$和$\sigma_-$照射在冷原子气体中;(b)激光携带的角动量$\ell_1=+\ell\hbar$和$\ell_2=-\ell\hbar$与不同能级发生能量交换**

从上述形式的哈密顿量出发,引入幺正算符$U=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\theta} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\theta}\end{pmatrix}$,通过幺正变换$H_{\mathrm{eff}}=U^{\dagger}HU$得到有效哈密顿量(令$\hbar=M=1$)

$$H_{\mathrm{eff}}=-\frac{1}{2}\left[\partial_r\left(r\partial_r\right)+\frac{\left(\partial_\theta+\mathrm{i}\ell\sigma_z\right)^2}{r^2}\right]+V(r)+\begin{pmatrix}\dfrac{\delta}{2} & \Omega(r)\\ \Omega(r) & -\dfrac{\delta}{2}\end{pmatrix}。\tag{2}$$

系统哈密顿量的单粒子部分可以写成

$$H_0 = -\frac{1}{2}\partial_r\left(r\partial_r\right) + \frac{L_z^2+\ell^2}{2r^2} + \frac{\ell}{r^2}L_z\sigma_z + V(r) + \mathcal{L}(r), \tag{3}$$

式中各项形式为:

$$\mathcal{L}(r) = \frac{\delta}{2}\sigma_z - \chi I(r) + \Omega(r)\sigma_x, \tag{4}$$

$$I(r) = \left[\sqrt{2}\left(\frac{r}{w}\right)\right]^{2|\ell|}\left[L_k^{|\ell|}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{w^2}}\right]^2, \tag{5}$$

式中:$\chi$ 是 Stark 效应的偏移;拉曼强度 $\Omega(r) = \Omega I(r)$,$I(r)$是空间依赖的LG激光强度;$w$表示激光的展宽;$L_k^{|\ell|}$是广义拉盖尔多项式,$\ell$为描述LG激光的角向指标,$k$为径向指标。为了不失一般性,考虑 $\ell = 4, k = 0$ 的情况,同时 $w = 2a_{\mathrm{osc}}$,$a_{\mathrm{osc}} = \sqrt{1/\omega}$ 是谐振子特征长度。

系统哈密顿量与$z$方向角动量算符 $L_z = -\mathrm{i}\hbar\partial_\theta$ 对易,即$\left[L_z, H_0\right] = 0$,此时 $L_z$ 与 $H_0$ 有共同的本征态,$L_z$对应的本征值是角量子数 $m$,单粒子哈密顿量 $H_0$ 具有旋转对称性,其对应的本征态 $\Psi = \left(\psi_\uparrow \quad \psi_\downarrow\right)^{\mathrm{T}}$ 以及离散的单粒子能谱 $E_{nm}$ 可以用2个量子数$(n, m)$来标定,其中 $n$ 和 $m$ 分别是主量子数和角量子数。

单粒子哈密顿量的本征方程为

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_\uparrow(r) & \Omega(r)\\ \Omega(r) & \varepsilon_\downarrow(r)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \psi_\downarrow\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \psi_\downarrow\end{pmatrix}, \tag{6}$$

式中 $\varepsilon_\sigma = -\frac{1}{2}\partial_r\left(r\partial_r\right) + \frac{L_z^2+\ell^2}{2r^2} + \frac{\ell}{r^2}L_z\sigma_z + V(r) + \frac{\delta}{2}\sigma_z - \chi I(r)$。选择极坐标系下二维谐振子的本征波函数作为基底,展开 $\psi_\sigma(r,\theta) = \sum_{nm} c_{n,m}^{\sigma}\Phi_{n,m\pm\ell}(r,\theta)$。将上述展开后的形式代入本征方程求解,即可得出系统的单粒子能谱以及基态波函数。

单粒子能谱和波函数如图2和3所示,其他物理参数固定为 $\ell = 4$,$w = 2a_{\mathrm{osc}}$,$\Omega/E_{\mathrm{F}} = 0.06$,$\frac{\chi}{E_{\mathrm{F}}} = 0.7$,其中在二维谐振子势阱中费米能级为 $E_{\mathrm{F}} = \hbar\omega\sqrt{N}$,本文取 $\omega = 1$。对于 $\delta = 0$ 的情况,考虑到时间反演操作算符 $T = \mathrm{i}\sigma_y K$,其中算符 $K$ 表示取复共轭操作,使得$\left[T, H_0\right] = 0$,$H_0$具有时间反演对称性,因此系统的能谱是对称的。在这种情况下,单一涡旋基态的可能性被排除。通常需要引入磁场或外部旋转来破坏这种对称性,从而促使费米超流体中涡旋态的形成。当 $\delta \neq 0$ 时,系统不再满足时间反演对称性,能谱也不再对称,即 $E_{n,m} \neq E_{n,-m}$。在自旋轨道耦合角动量和磁场的共同作用下,可以观察到系统基态波函数的各个分量虽然权重和分布不同,但都携带有限的角动量,呈现出涡旋结构,具有旋转对称性。

## 2　一维有效模型

为了更直观地理解体系中SOAMC可能带来的物理效应,首先考虑1个环型几何的玩具模型[43]。在该模型中,忽略径向依赖性取近似 $r \simeq R$,这样在环形空间中存在1个半径为 $R$ 的一维固定环状模型,其单粒子部分为

$$H_0^{\mathrm{ring}} = -\frac{\partial_\phi^2}{2R^2} - \mathrm{i}\tilde{\alpha}\partial_\phi\sigma_z + \frac{\delta}{2}\sigma_z + \tilde{\Omega}\sigma_x, \tag{7}$$

式中:$\tilde{\alpha} = \ell/R^2$;$\tilde{\Omega} = \Omega I(R)$,是有效耦合系数。此本征方程可以写作

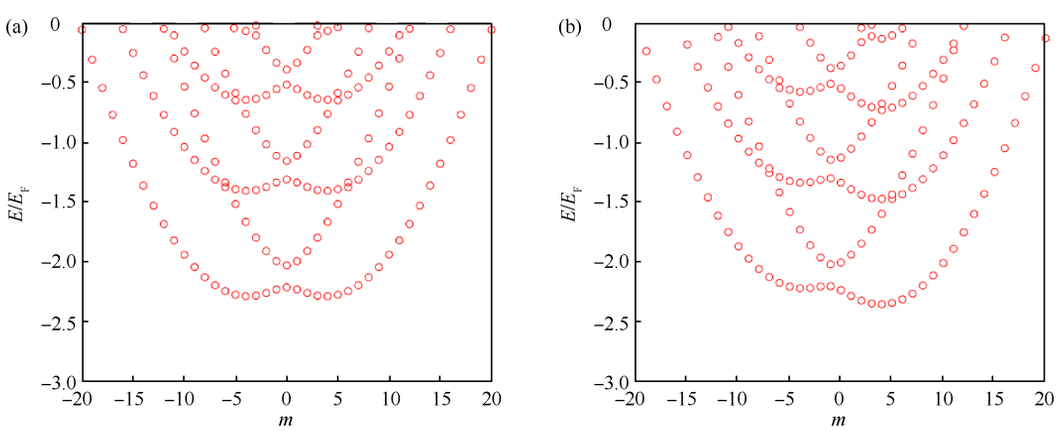



**图2　不同双光子失谐条件下单粒子色散关系**

**(a)$\delta/E_{\mathrm{F}} = 0$;(b)$\delta/E_{\mathrm{F}} = 0.14$**

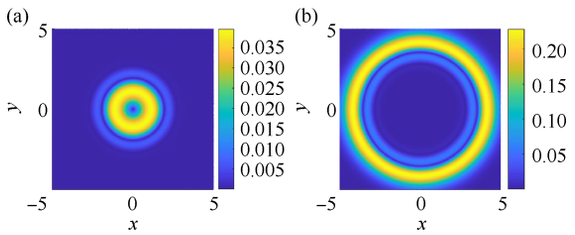



**图3　双光子失谐量 $\delta/E_{\mathrm{F}}=0.14$ 时,系统不同自旋状态下的基态波函数分布**

**(a)自旋向上;(b)自旋向下**

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial_\phi^2}{2R^2}-\mathrm{i}\tilde{\alpha}\partial_\phi+\dfrac{\delta}{2} & \tilde{\Omega} \\ \tilde{\Omega} & -\dfrac{\partial_\phi^2}{2R^2}+\mathrm{i}\tilde{\alpha}\partial_\phi-\dfrac{\delta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \psi_\downarrow\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \psi_\downarrow\end{pmatrix}。\tag{8}$$

上述哈密顿量可以在$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\}$基底下的角动量空间中直接对角化。在角动量空间中,哈密顿量相互作用项取$H_{\mathrm{int}}^{\mathrm{ring}}=g_{1\mathrm{D}}\sum_{mm'k}\Psi_{m+k\uparrow}^{\dagger}\Psi_{m-k\downarrow}^{\dagger}\Psi_{m'\downarrow}\Psi_{m\uparrow}$的形式,$g_{1\mathrm{D}}$是一维原子间有效相互作用强度。引入描述角动量$m$和$Q-m$原子间配对的超流序参量$\Delta_Q=g\sum_m\left\langle\Psi_{Q-m\downarrow}\Psi_{m\uparrow}\right\rangle$,解耦后的平均场哈密顿量为

$$H_{\mathrm{MF}}=\frac{1}{2}\sum_m\boldsymbol{\Phi}_{m,Q}^{\dagger}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}_{m,Q}+\frac{1}{2}\sum_m\left(\varepsilon_{Q-m\uparrow}+\varepsilon_{Q-m\downarrow}\right)-\frac{|\Delta|^2}{g},\tag{9}$$

式中

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{m\uparrow} & \tilde{\Omega} & 0 & \Delta\\ \tilde{\Omega} & \varepsilon_{m\downarrow} & -\Delta & 0\\ 0 & -\Delta^{*} & -\varepsilon_{Q-m\uparrow} & -\tilde{\Omega}\\ \Delta^{*} & 0 & -\tilde{\Omega} & -\varepsilon_{Q-m\downarrow}\end{pmatrix},\tag{10}$$

矩阵元$\varepsilon_{m\sigma}=\dfrac{m^2}{2R^2}+\tilde{\alpha}m+\dfrac{\delta}{2}\sigma_z-\mu$。此处$\boldsymbol{\Phi}_{m,Q}=\left[\Psi_{m\uparrow},\Psi_{m\downarrow},\Psi_{Q-m\uparrow}^{\dagger},\Psi_{Q-m\downarrow}^{\dagger}\right]^{\mathrm{T}}$。在角动量空间中,以上引入的有限角动量配对的序参量可以准确给出涡度($Q$)单涡旋态的相构型,即$\Delta=\Delta_Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q\phi}$。

以上内容与一维SOC的结果有一些类似。不同之处在于,这里的角动量量子数$m$是量子化的,而非连续的线动量。当考虑原子间的相互作用时,会改变多体的基态。$\boldsymbol{M}$矩阵经过对角化后得到$\eta$个本征值$E_{\eta,m}$,则系统的自由能可以表示为

$$F=-\frac{1}{\beta}\sum_{\eta,m}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}E_{\eta,m}}\right)+\sum_m\varepsilon_{Q-m}-\frac{|\Delta|^2}{g}。\tag{11}$$

通过对$F$求极值,可以得到关于$\Delta$的自洽方程,同时,基于粒子数($N$)和化学势($\mu$)的关系,还可以得到另1个粒子数方程。方程组具体形式为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{\eta,m}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}E_{\eta,m}}}\frac{\partial E_{\eta,m}}{\partial\Delta}-\frac{2|\Delta|}{g}=0,\\&\sum_{\eta,m}\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}E_{\eta,m}}}\frac{\partial E_{\eta,m}}{\partial\mu}\right)=N。\end{aligned}\tag{12}$$

一维有效模型得到的相图如图4中的虚线所示,通过求解上述方程组确定了$\Delta$和$\mu$,并计算了系统的能量以寻找所有$Q$对应的最小能量从而确定了系统的相图。在所选参数范围内,系统同时存在正常超流态以及$Q$为1和2的涡旋超流态。此处采用了$N_{\mathrm{atom}}=50$,$\chi/E_{\mathrm{F}}=0.7$,$\Omega/E_{\mathrm{F}}=0.21$。图4中实线表示利用BdG方法在考虑的参数范围内得到得更加精确的结果,显示正常超流态和2种涡旋超流态共存。这表明数值求解与有效模型结果一致,验证了前文中所采用的近似方法的可行性。

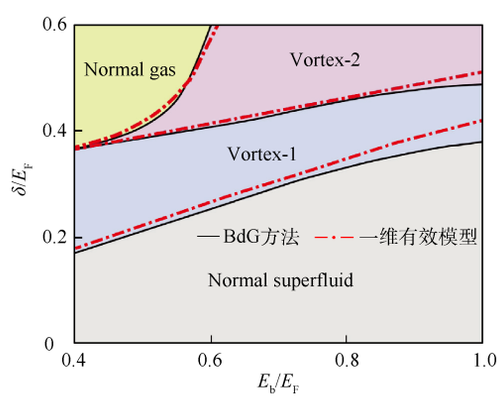



**图4　BdG方法(实线)和一维有效模型(虚线)所得到具有SOAM耦合的超流体费米气体在$E_{\mathrm{b}}-\delta$平面上的基态相图[43]**

## 3　BdG方法

当考虑谐振子势和相互作用时,通常的解析方法可能无法处理,此时可以通过BdG方程的数值求解方法来精确处理这类问题[43]。从含有相互作用的哈密顿量出发

$$H=H_0+H_{\mathrm{int}},\tag{13}$$

式中单粒子项$H_0$和相互作用项$H_{\mathrm{int}}$的形式分别为

$$H_0 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\vec{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r})\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\partial_r\left(r\partial_r\right)+\frac{\left(\partial_\theta+\mathrm{i}\ell\sigma_z\right)^2}{r^2}\right]+ V_{\mathrm{HO}}(r)+\mathcal{L}(r)\right\}\vec{\psi}(\boldsymbol{r}),$$

$$H_{\mathrm{int}} = g_{2\mathrm{D}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\psi_{\uparrow}^{\dagger}\psi_{\downarrow}^{\dagger}\psi_{\downarrow}\psi_{\uparrow}。\tag{14}$$

式中$g_{2\mathrm{D}}$是二维情况下原子间相互作用参数[44],当$g_{2\mathrm{D}}<0$时,与2体束缚能$E_{\mathrm{b}}$的关系$g_{2\mathrm{D}}=-4\pi/\left[\ln\left(1+2E_{\mathrm{c}}/E_{\mathrm{b}}\right)\right]$,其中$E_{\mathrm{c}}$为能量截断。引入平均场$\Delta=g_{2\mathrm{D}}\left\langle\psi_{\downarrow}\psi_{\uparrow}\right\rangle$,以及Nambu旋量$\Psi^{\dagger}=\left(\psi_{\uparrow}^{\dagger}\quad\psi_{\downarrow}^{\dagger}\quad\psi_{\uparrow}\quad\psi_{\downarrow}\right)$,此时平均场意义下的哈密顿量写作

$$H=\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\frac{1}{2}\Psi^{\dagger}\boldsymbol{H}_{\mathrm{BdG}}\Psi+C,\tag{15}$$

式中$C$为任意常量,BdG哈密顿量的矩阵形式为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{BdG}}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{\uparrow} & \Omega(r) & 0 & \Delta\\ \Omega(r) & \varepsilon_{\downarrow} & -\Delta & 0\\ 0 & -\Delta^{*} & -\varepsilon_{\uparrow}^{*} & -\Omega(r)\\ \Delta^{*} & 0 & -\Omega(r) & -\varepsilon_{\downarrow}^{*}\end{pmatrix},\tag{16}$$

进而可以写出BdG方程

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{BdG}}\phi_{\eta}=E_{\eta}\phi_{\eta},\tag{17}$$

式中:$E_{\eta}$为能谱;特征向量$\phi_{\eta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r})=\left[u_{\uparrow,\eta}(\boldsymbol{r})\;u_{\downarrow,\eta}(\boldsymbol{r})\;v_{\uparrow,\eta}(\boldsymbol{r})\;v_{\downarrow,\eta}(\boldsymbol{r})\right]$。$u_{\sigma,\eta}(\boldsymbol{r})$和$v_{\sigma,\eta}(\boldsymbol{r})$以谐振子基态波函数为基底作展开

$$\begin{aligned}u_{\sigma,\eta}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{n} c_{\sigma,\eta,n,m}\Phi_{n,m\pm\ell}(r,\theta),\\ v_{\sigma,\eta}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{n} d_{\sigma,\eta,n,m}\Phi_{n,m\pm\ell}(r,\theta)。\end{aligned}\tag{18}$$

通过对超流序参量进行傅里叶分解$\Delta(r,\theta)=\sum_{\beta}C_{\beta}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\theta}$,代入哈密顿量即可得到关于展开系数的矩阵本征方程

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{\uparrow\,n'n}^{m} & \Omega_{n'n}^{m} & 0 & \Delta_{nn'}^{mm'}\\ \Omega_{n'n}^{m} & \varepsilon_{\downarrow\,n'n}^{m} & -\Delta_{nn'}^{mm'} & 0\\ 0 & -\Delta_{nn'}^{mm'*} & -\varepsilon_{\uparrow\,n'n}^{m*} & -\Omega_{n'n}^{m}\\ \Delta_{nn'}^{mm'*} & 0 & -\Omega_{n'n}^{m} & -\varepsilon_{\downarrow\,n'n}^{m*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{\uparrow,\eta,n,m}\\ c_{\downarrow,\eta,n,m}\\ d_{\uparrow,\eta,n,m}\\ d_{\downarrow,\eta,n,m}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}c_{\uparrow,\eta,n,m}\\ c_{\downarrow,\eta,n,m}\\ d_{\uparrow,\eta,n,m}\\ d_{\downarrow,\eta,n,m}\end{pmatrix}。\tag{19}$$

矩阵元具体形式为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\sigma n'n}^{m} &= \left[\left(2n+\left|m\pm\ell\right|+1\right)\pm\frac{\delta}{2}\right]\delta_{n'n}-\chi\int r\mathrm{d}r\,R_{n'}^{\left|m\pm\ell\right|}(r)I(r)R_{n}^{\left|m\pm\ell\right|}(r),\\ \Omega_{n'n}^{m} &= \Omega\int r\mathrm{d}r\,R_{n'}^{\left|m+\ell\right|}(r)I(r)R_{n}^{\left|m-\ell\right|}(r),\\ \Delta_{nn'}^{mm'} &= \sum_{\beta}\delta_{m,m'+\beta}\int r\mathrm{d}r\,R_{n'}^{\left|m-\ell\right|}(r)C_{\beta}(r)R_{n}^{\left|m+\ell\right|}(r)。\end{aligned}\tag{20}$$

序参量与粒子数密度就可以利用求解出来的本征向量和能谱以及费米统计分布$f(E)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta E}}$来表示

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{r}) &= \sum_{\eta} g\left[u_{\uparrow,\eta}v_{\downarrow,\eta}^{*}f\left(-E_{\eta}\right)-u_{\downarrow,\eta}v_{\uparrow,\eta}^{*}f\left(E_{\eta}\right)\right],\\ n_{\sigma}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{\eta}\left[\left|u_{\sigma,\eta}\right|^{2}f\left(E_{\eta}\right)+\left|v_{\sigma,\eta}\right|^{2}f\left(-E_{\eta}\right)\right]。\end{aligned}\tag{21}$$

$Q$分别为1和2的序参量以及粒子数密度如图5所示。从实空间中序参量的分布可以清晰地看出涡旋态的特征,而不同$Q$体现了序参量相位的不同周期性。这与由SOC作用诱导出的Fulde-Ferrell(FF)态有类似之处,FF态的序参量形式为$\Delta(\boldsymbol{r})=\Delta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}$[45]。而在SOAM耦合作用下诱导出的涡旋态序参量形式为$\Delta(r)=\left|\Delta(r)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q\phi}$,即在角动量空间上存在有限动量配对。可见,在SOAM耦合和足够强的Zeeman场作用下,系统的时间反演对称性被打破,使得粒子配对获得有限的轨道角动量。

在相对较弱的双光子拉比频率$\Omega/E_{\mathrm{F}}=0.14$时,基态随双光子失谐$\delta$变化的情况如图6所示,系统的参数取$\chi/E_{\mathrm{F}}=0.7$,$E_{\mathrm{b}}/E_{\mathrm{F}}=0.3$,$\Omega/E_{\mathrm{F}}=0.14$,$k_{\mathrm{osc}}=\sqrt{2\omega_r}$。随着$\delta$的增大,$Q=0$的正常超流态首先过渡到$Q=1$的单涡旋态,二者都保持着连续旋转对称性。与此同时,正常超流态的动量分布总是在零动量处达到最大值,而涡旋态的零动量贡献几乎消失,但在有限$k_r$处达到峰值。进一步增大$\delta$时,2个奇异的涡旋态依次成为基态。与由单一轨道-角动量耦合所形成的涡旋态不同,奇异涡旋态有2个不同的配对分量,其角动量分别为$Q_1$和$Q_2$(图7)。在这种情况下,序参量可以分解成$\Delta(r,\phi)\sim\sum_{m=Q_1,Q_2}C_m(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$,其中$C_m(r)$是$m$分量的振幅。因此,序参量$\left|\Delta\right|^2\sim C_{Q_1}^2+C_{Q_2}^2+2C_{Q_1}C_{Q_2}\cos\left(Q_1-Q_2\right)\phi$的空间分布沿角向产生了自发的周期调制,从而将连续旋转对称性打破

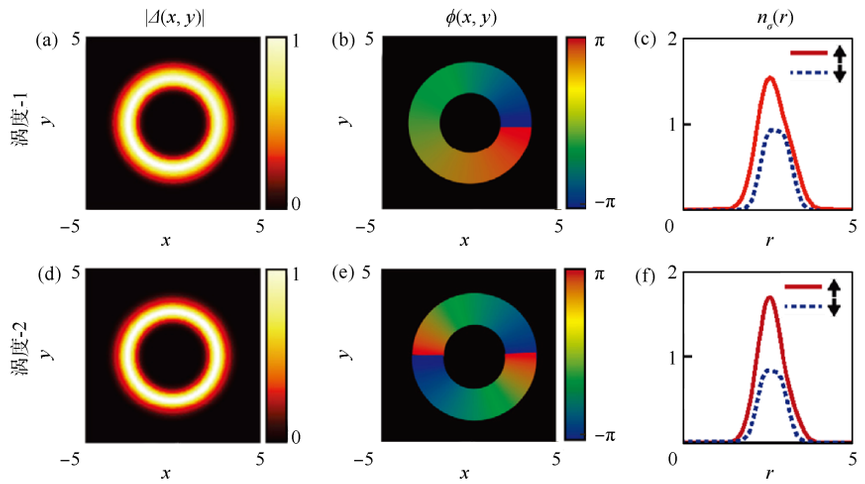



**图5　不同涡度下的序参量与粒子数密度分布**

**(a)涡度为1的序参量模分布;(b)涡度为1的序参量相位分布;(c)涡度为1的粒子数密度径向分布;(d)涡度为2的序参量模分布;(e)涡度为2的序参量相位分布;(f)涡度为2的粒子数密度径向分布**

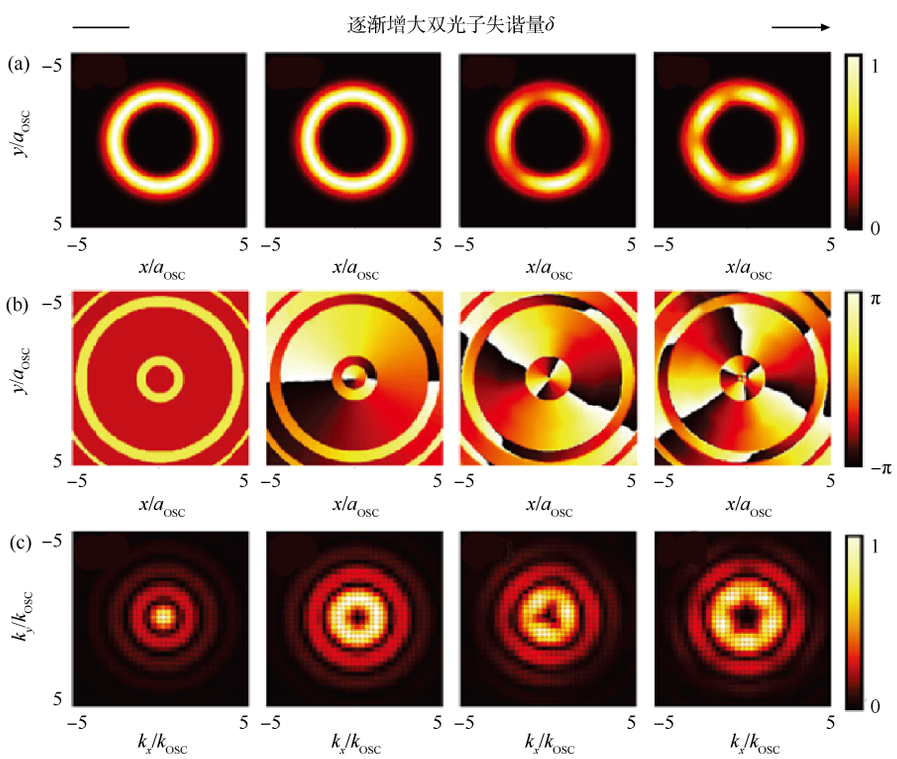



**图6　序参量$\Delta(r)$随双光子失谐$\delta$增加的变化[43]**

**(a、b)分别是$\Delta(r)$在$x-y$平面的模$|\Delta(x,y)|$和相位$\phi(x,y)$;(c)对应序参量的动量分布$\left|\Delta_k\left(k_x,k_y\right)\right|$**

为离散的$M$-旋转对称性,在实空间和动量空间中都有$M=\left|Q_1-Q_2\right|$。类似于BEC的角条纹相,奇异涡旋态可以视为角度空间的LO态[46]。需要注意的是,这2个分量的权重一般是不相等的,奇异涡旋的绕数由较强的分量决定。这种类型的自发对称破缺涡旋态的出现,是原子-原子相互作用、双光子失谐和SOAM耦合复杂相互作用的结果。

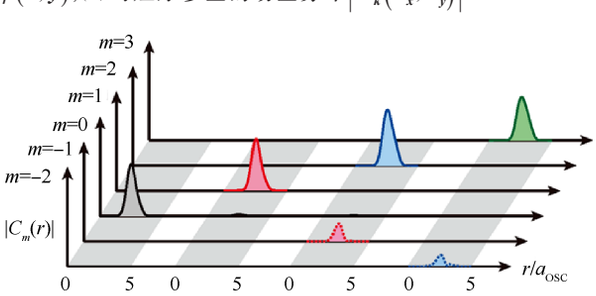



**图7　不同$m$分量的径向分布$\left|C_m(r)\right|$**

## 4 结论与展望

### 4.1 结 论

本文主要讨论基于零温下平均场的解析和数值处理,忽略了超流配对的量子涨落。通常来说,量子涨落会不利于超流序的形成,特别是对于低维(一维和二维)系统,量子涨落可能会完全破坏超流序,而导致平均场的结果变得不可靠。为了研究量子涨落对平均场结果的影响,进一步发展了包含量子涨落修正的自洽平均场BdG方案。结果表明,对于二维系统,由于外部束缚势的存在以及SOAMC所带来的独特效应,配对涨落引起的平均场超流序的量子损耗非常小,不会定性改变超流序参量的基态构型,证实了提出的涡旋基态特别是奇异涡旋态具有很好的鲁棒性,这对于后续的实验观测有重要意义。

### 4.2 展 望

研究表明,超流费米气体中的热涨落和量子涨落都对平均场基态产生影响,尤其是在有限温度下,热涨落会导致热力学相变的发生,从而形成丰富多样的相图。进一步将零温结果推广到有限温度下,并探究具有SOAMC的超流费米气体的热力学相图将成为一个重要课题。目前,研究主要集中在一维SOAMC上,而如何实现高维SOAMC并研究其可能带来的新物理现象是未来的关键课题。同时,将各种类型的自旋轨道耦合进行结合,对于费米气体可能产生更加复杂的基态结构,这对于费米配对及超流的影响也是一个待解决的基本问题。

而SOAMC对费米超流的拓扑性质也有显著影响。最近的研究表明,具有SOAMC的费米涡旋态引入了Zak位相的拓扑不变量,通过调节SOAMC参数可以改变体系的Zak位相,同时影响费米超流的准粒子激发谱,形成拓扑涡旋态[47]。探索是否存在其他类型的拓扑涡旋态以及其物理性质将进一步丰富人们对费米涡旋态的认识。

此外,SOAMC还会显著改变费米气体的少体行为[48]。研究表明,具有SOAMC的费米气体可能形成携带轨道角动量的分子态,这为实验上开展对SOAMC主导的费米配对机制的研究提供了便利。而对于三体Efimov态等其他少体态的研究[49-51],SOAMC的影响也是一个有价值的研究方向。此外,还有一些有趣的领域值得探索,如SOAMC与光晶格相结合来研究格点体系中的SOAMC效应[35],或者进一步研究具有长程相互作用如偶极-偶极相互作用[52-55]、里德堡缀饰的相互作用[56]和非局域相互作用[57]体系中的SOAMC效应等。

综上所述,SOAMC的实验实现为费米气体及其超流性的研究带来了新的机遇和挑战。随着对这一体系的深入研究,预计会发现更多SOAMC带来的新奇物理现象。这些发展将有效地拓展费米气体中的少体和多体物理研究,对于非传统费米超流和涡旋物理的深入理解具有重要意义。

## 参 考 文 献


[1] BLOCH I, DALIBARD J, ZWERGER W. Many-body physics with ultracold gases[J]. Reviews of Modern Physics, 2008, 80(3): 885-964.

[2] GIORGINI S, PITAEVSKII L P, STRINGARI S. Theory of ultracold atomic Fermi gases[J]. Reviews of Modern Physics, 2008, 80(4): 1215-1274.

[3] KOHEL J M, RAMIREZ-SERRANO J, THOMPSON R J, et al. Generation of an intense cold-atom beam from a pyramidal magneto-optical trap: experiment and simulation[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2003, 20(6): 1161-1168.

[4] BARRY J F, MCCARRON D J, NORRGARD E B, et al. Magneto-optical trapping of a diatomic molecule[J]. Nature, 2014, 512(7514): 286-289.

[5] INOUYE S, ANDREWS M R, STENGER J, et al. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate[J]. Nature, 1998, 392(6672): 151-154.

[6] CHIN C, GRIMM R, JULIENNE P, et al. Feshbach resonances in ultracold gases[J]. Reviews of Modern Physics, 2010, 82(2): 1225-1286.

[7] CHEVY F, MORA C. Ultra-cold polarized Fermi gases [J]. Reports on Progress in Physics, 2010, 73(11): 112401.

[8] LIN Y J, COMPTON R L, JIMÉNEZ-GARCÍA K, et al. Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms[J]. Nature, 2009, 462(7273): 628-632.

[9] LIN Y J, JIMÉNEZ-GARCÍA K, SPIELMAN I B. Spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates [J]. Nature, 2011, 471(7336): 83-86.

[10] ZHANG J Y, JI S C, CHEN Z, et al. Collective dipole oscillations of a spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate [J]. Physical Review Letters, 2012, 109 (11): 115301.

[11] CHEUK L W, SOMMER A T, HADZIBABIC Z, et al. Spin-injection spectroscopy of a spin-orbit coupled Fermi gas[J]. Physical Review Letters, 2012, 109(9): 095302.

[12] WANG P J, YU Z Q, FU Z K, et al. Spin-orbit coupled degenerate Fermi gases[J]. Physical Review Letters, 2012, 109(9): 095301.
[13] QU C L, HAMNER C, GONG M, et al. Observation of Zitterbewegung in a spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review A, 2013, 88(2): 021604.
[14] HAMNER C, QU C L, ZHANG Y P, et al. Dicke-type phase transition in a spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate[J]. Nature Communications, 2014, 5: 4023.
[15] JI S C, ZHANG J Y, ZHANG L, et al. Experimental determination of the finite-temperature phase diagram of a spin-orbit coupled Bose gas[J]. Nature Physics, 2014, 10(4): 314-320.
[16] MENG Z M, HUANG L H, PENG P, et al. Experimental observation of a topological band gap opening in ultracold Fermi gases with two-dimensional spin-orbit coupling[J]. Physical Review Letters, 2016, 117(23): 235304.
[17] HUANG L H, MENG Z M, WANG P J, et al. Experimental realization of two-dimensional synthetic spin-orbit coupling in ultracold Fermi gases[J]. Nature Physics, 2016, 12(6): 540-544.
[18] WANG Z Y, CHENG X C, WANG B Z, et al. Realization of an ideal Weyl semimetal band in a quantum gas with 3D spin-orbit coupling[J]. Science, 2021, 372(6539): 271-276.
[19] ZHOU X F, LI Y, CAI Z, et al. Unconventional states of bosons with the synthetic spin-orbit coupling[J]. Journal of Physics B(Atomic, Molecular and Optical Physics), 2013, 46(13): 134001.
[20] GOLDMAN N, JUZELIŪNAS G, ÖHBERG P, et al. Light-induced gauge fields for ultracold atoms[J]. Reports on Progress in Physics, 2014, 77(12): 126401.
[21] ZHAI H. Degenerate quantum gases with spin-orbit coupling: a review[J]. Reports on Progress in Physics, 2015, 78(2): 026001.
[22] LUO X W, SUN K, ZHANG C W. Spin-tensor-momentum-coupled Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review Letters, 2017, 119(19): 193001.
[23] CHEN L, ZHANG Y B, PU H. Spin-nematic vortex states in cold atoms[J]. Physical Review Letters, 2020, 125(19): 195303.
[24] LI D H, HUANG L H, PENG P, et al. Experimental realization of spin-tensor momentum coupling in ultracold Fermi gases[J]. Physical Review A, 2020, 102(1): 013309.
[25] DEMARCO M, PU H. Angular spin-orbit coupling in cold atoms[J]. Physical Review A, 2015, 91(3): 033630.
[26] QU C L, SUN K, ZHANG C W. Quantum phases of Bose-Einstein condensates with synthetic spin-orbital-angular-momentum coupling[J]. Physical Review A, 2015, 91(5): 053630.
[27] SUN K, QU C L, ZHANG C W. Spin-orbital-angular-momentum coupling in Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review A, 2015, 91(6): 063627.
[28] CHEN L, PU H, ZHANG Y B. Spin-orbit angular momentum coupling in a spin-1 Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review A, 2016, 93(1): 013629.
[29] PENG S G, JIANG K, CHEN X L, et al. Spin-orbital-angular-momentum-coupled quantum gases[J]. AAPPS Bull, 2022, 32(1): 36.
[30] CHEN H R, LIN K Y, CHEN P K, et al. Spin-orbital-angular-momentum coupled Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review Letters, 2018, 121(11): 113204.
[31] CHEN P K, LIU L R, TSAI M J, et al. Rotating atomic quantum gases with light-induced azimuthal gauge potentials and the observation of the Hess-Fairbank effect[J]. Physical Review Letters, 2018, 121(25): 250401.
[32] ZHANG D F, GAO T Y, ZOU P, et al. Ground-state phase diagram of a spin-orbital-angular-momentum coupled Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review Letters, 2019, 122(11): 110402.
[33] HOU J P, LUO X W, SUN K, et al. Adiabatically tuning quantized supercurrents in an annular Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review A, 2017, 96(1): 011603.
[34] CHEN K J, WU F, HU J S, et al. Ground-state phase diagram and excitation spectrum of a Bose-Einstein condensate with spin-orbital-angular-momentum coupling[J]. Physical Review A, 2020, 102(1): 013316.
[35] CAO R, HAN J S, WU J H, et al. Quantum phases of spin-orbital-angular-momentum-coupled bosonic gases in optical lattices[J]. Physical Review A, 2022, 105(6): 063308.
[36] BANGER P, RAJAT R A, GAUTAM S. Quantum phases and the spectrum of collective modes in a spin-1 Bose-Einstein condensate with spin-orbital-angular-momentum coupling[J]. Physical Review A, 2023, 108(4): 043310.
[37] CHIU N C, KAWAGUCHI Y, YIP S K, et al. Visible stripe phases in spin-orbital-angular-momentum coupled Bose-Einstein condensates[J]. New Journal of Physics, 2020, 22(9): 093017.
[38] CHEN X L, PENG S G, ZOU P, et al. Angular stripe phase in spin-orbital-angular-momentum coupled Bose condensates[J]. Physical Review Research, 2020, 2(3): 033152.
[39] BIDASYUK Y M, KOVTUNENKO K S, PRIKHODKO

O O. Fine structure of the stripe phase in ring-shaped Bose-Einstein condensates with spin-orbital-angular-momentum coupling[J]. Physical Review A, 2022, 105(2):023320.

[40] DUAN Y, BIDASYUK Y M, SURZHYKOV A. Symmetry breaking and phase transitions in Bose-Einstein condensates with spin-orbital-angular-momentum coupling[J]. Physical Review A, 2020, 102(6):063328.

[41] YANG X X, ZHANG W, NIU Z X. Stability of vortices in exciton-polariton condensates with spin-orbital-angular-momentum coupling[J]. New Journal of Physics, 2024, 26(4):043025.

[42] CHEN K J, WU F, PENG S G, et al. Generating giant vortex in a Fermi superfluid via spin-orbital-angular-momentum coupling[J]. Physical Review Letters, 2020, 125(26):260407.

[43] WANG L L, JI A C, SUN Q, et al. Exotic vortex states with discrete rotational symmetry in atomic Fermi gases with spin-orbital-angular-momentum coupling [J]. Physical Review Letters, 2021, 126(19):193401.

[44] RANDERIA M, DUAN J M, SHIEH L Y. Bound states, Cooper pairing, and Bose condensation in two dimensions[J]. Physical Review Letters, 1989, 62(9): 981-984.

[45] FULDE P, FERRELL R A. Superconductivity in a strong spin-exchange field[J]. Physical Review, 1964, 135(3A):A550-A563.

[46] LAEKIN A I, OVCHINNIKOV Y N. Nonuniform state of superconductors[J]. Soviet Physics-JETP, 1965, 20(3):762.

[47] CHEN K J, WU F, HE L Y, et al. Angular topological superfluid and topological vortex in an ultracold Fermi gas[J]. Physical Review Research, 2022, 4(3):033023.

[48] HAN Y W, PENG S G, CHEN K J, et al. Molecular state in a spin-orbital-angular-momentum coupled Fermi gas [J]. Physical Review A, 2022, 106(4):043302.

[49] EFIMOV V. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system[J]. Physics Letters B, 1970, 33(8):563.

[50] BRAATEN E, HAMMER H W. Efimov physics in cold atoms[J]. Annals of Physics, 2007, 322(1):120-163.

[51] HIYAMA E, SUGANUMA H, KAMIMURA M. Four- and five-body scattering calculations of exotic hadron systems [J]. Progress of Theoretical Physics Supplement, 2007, 168:101-106.

[52] YOU L, MARINESCU M. Prospects for *p*-wave paired Bardeen-Cooper-Schrieffer states of fermionic atoms[J]. Physical Review A, 1999, 60(3):2324-2329.

[53] BARANOV M A, MAR'ENKO M S, RYCHKOV V S, et al. Superfluid pairing in a polarized dipolar Fermi gas [J]. Physical Review A, 2002, 66(1):013606.

[54] BARANOV M A, DOBREK Ł, LEWENSTEIN M. Superfluidity of trapped dipolar Fermi gases [J]. Physical Review Letters, 2004, 92(25):250403.

[55] COOPER N R, SHLYAPNIKOV G V. Stable topological superfluid phase of ultracold polar fermionic molecules [J]. Physical Review Letters, 2009, 103(15):155302.

[56] HONER J, WEIMER H, PFAU T, et al. Collective many-body interaction in Rydberg dressed atoms[J]. Physical Review Letters, 2010, 105(16):160404.

[57] LANDIG R, HRUBY L, DOGRA N, et al. Quantum phases from competing short- and long-range interactions in an optical lattice[J]. Nature, 2016, 532(7600):476-479.

(责任编辑:兰丽丽)