DOI:10.19789/j.1004-9398.2024.01.009
文献引用:赵振刚.二重积分及其应用[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,45(1):68-76. ZHAO Z G. Double integrals and their applications[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2024,45(1):68-76.

二重积分及其应用*

赵　振　刚**

(首都师范大学数学科学学院,北京　100048)

摘要:本文首先定义了矩形区域上的二重积分,并使用平行于x轴和y轴的直线网将矩形区域划分。对于相关性质,给出了详细、完整的证明,证明了在矩形区域上定义的有界函数可积的充要条件是该函数在矩形区域上的不连续点集是零测集。假设函数在矩形区域上黎曼可积,成功地解决了固定变量x后,作为y的函数在相应闭区间上的黎曼积分未必存在的问题。其次,建立了有界函数在有界集上的积分,并将有界集上的积分转化为矩形区域上的积分。再次,介绍了二重积分的应用,证明了在开集上定义的二元函数的2个混合偏导数如果连续,则必然相等。最后,还使用二重积分证明了级数求和公式$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。

关键词:上积分;下积分;零测集
中图分类号:O173.1　　**文献标识码**:A

Double integrals and their applications*

ZHAO Zhengang**

(School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing　100048)

Abstract: This paper begins by defining the double integral over a rectangular region, which is divided into subsections by using a grid of lines parallel to the x-axis and y-axis. We provide detailed and complete proofs for the related properties of double integrals. Furthermore, we demonstrate that a necessary and sufficient condition for a bounded function to be integrable over a rectangular region is that the set of its points of discontinuity within the region forms a set of measure zero. Assuming that a function is Riemann integrable over a rectangular region, we successfully overcome the problem where the Riemann integral may not exist when fixing variable x and considering the function as that of y over the corresponding closed interval. Subsequently, we establish the integration of a bounded function over a bounded set and convert the integration over a bounded set into an integration over a rectangular area. Then, we discuss the applications of the double integral, prove that if two mixed partial derivatives of a binary function defined on an open set are continuous, they must be equal. Lastly, the double integral is employed to validate the summation formula for the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Keywords: upper integral; lower integral; a set of measure zero
CLC: O173.1　　**DC**: A

收稿日期:2023-12-22
* 首都师范大学本科教学建设与改革项目
** 通信作者:5077@cnu.edu.cn

0 引 言

二重积分是微积分中的重要概念之一,在多个学科领域中都有广泛的应用。从物理学到工程学,从经济学到生物学,二重积分都扮演着关键的角色,为理解和解决实际问题提供了强有力的工具[1-13]。本文旨在完整、清晰地建立二重积分的基本概念,探讨其性质和应用,以及与之相关的重要定理和技巧。

论文第1部分介绍二重积分的基本概念和定义,解释如何将二重积分看作是对二维区域上的函数进行求和的过程,以及如何通过划分区域并取极限来定义二重积分。在一些教材中,对二重积分概念的论述是模糊的。本文首先定义矩形区域上的二重积分,用平行于 x 轴及 y 轴的直线网分割矩形区域,简单易懂。对相关性质,如当分割的细度趋于零时,下和的极限是下积分等,给出详细、完整的证明。第2部分旨在证明定义在矩形区域上的有界函数在矩形区域上可积的充要条件是,该函数在矩形区域上的不连续点集是零测集。这是积分理论中非常核心的结果,但大多数分析教材并不证明这一定理。第3部分讨论二重积分的计算方法,限于篇幅此次只介绍累次积分法。假设函数在矩形区域上黎曼可积,固定变量 x 后,作为 y 的函数在相应的闭区间上的黎曼积分未必存在。将二重积分转化为先对 y 求下积分或上积分,然后再对 x 积分。第4部分建立有界函数在有界集上的积分,将有界集上的积分转化为矩形区域上的积分。最后,介绍二重积分的应用。用二重积分证明定义在开集上的二元函数的两个混合偏导数如果连续,则必然相等。并用二重积分证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$。

本文有助于全面理解二重积分的基本概念、性质和计算方法。二重积分作为微积分的重要组成部分,不仅具有理论上的重要性,而且在实际问题的建模和求解中也发挥着关键的作用。希望本论文能够为读者提供深入理解和应用二重积分的基础,进一步拓展其在各个学科领域中的应用潜力[14-20]。

1 在矩形上的黎曼积分

令 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ 为平面上的矩形,$\lambda=\max\{b-a,d-c\}$ 为矩形的宽度,$|\Omega|$ 为矩形 Ω 的面积。设 $f:\Omega\to\mathbf{R}$ 是有界函数,即存在实数 T_1、T_2 使得对 $\forall(x,y)\in\Omega, T_1\leqslant f(x,y)\leqslant T_2$。

定义1 已知 $P_1: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个分割,$P_2: c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_l=d$ 是闭区间 $[c,d]$ 的一个分割,称 $P=(P_1,P_2)$ 是矩形 Ω 的一个分割。设 $I=[x_{i-1},x_i]$, $J=[y_{j-1},y_j]$,称矩形 $I\times J$ 是由分割 P 决定的子矩形。分割 P 的细度 $\|P\|=\max\{\|P_1\|,\|P_2\|\}$,其中

$$\|P_1\|=\max\{x_i-x_{i-1}: i=1,2,\cdots n\},$$
$$\|P_2\|=\max\{y_j-y_{j-1}: j=1,2,\cdots l\}。$$

定义2 设 $f:\Omega\to\mathbf{R}$ 是有界函数,P 是矩形 Ω 的一个分割,对每一个由分割 P 决定的子矩形 R,设

$$m_R(f)=\inf\{f(x,y):(x,y)\in R\},$$
$$M_R(f)=\sup\{f(x,y):(x,y)\in R\}。$$

由分割 P 决定的下和与上和分别定义为

$$L(f,P)=\sum_R m_R(f)\cdot|R|,\ U(f,P)=\sum_R M_R(f)\cdot|R|,$$

其中 $|R|$ 表示子矩形 R 的面积。易知

$$T_1|\Omega|\leqslant L(f,P)\leqslant T_2|\Omega|,\ T_1|\Omega|\leqslant U(f,P)\leqslant T_2|\Omega|。$$

向 P_1 或 P_2 中添加有限个分点,从分割 P 得到一个新的分割 P'',称分割 P'' 为分割 P 的一个加细。给定2个分割 $P=(P_1,P_2)$ 与 $P'=(P_1',P_2')$,称 $P''=(P_1\cup P_1',P_2\cup P_2')$ 为 P 与 P' 的共同加细。

引理1 设 $f:\Omega\to\mathbf{R}$ 是有界函数,P 是矩形 Ω 的一个分割。如果 P'' 为 P 的加细,则

$$L(f,P)\leqslant L(f,P''),\ U(f,P'')\leqslant U(f,P)。$$

证明 设由分割 P 决定的某个子矩形 R 被分为2个子矩形 R_1、R_2,设 f 在 R_1 上的下确界与上确界分别是 m_1、M_1;f 在 R_2 上的下确界与上确界分别是 m_2、M_2。显然

$$m_R(f)\leqslant m_1,\ m_R(f)\leqslant m_2;\ M_1\leqslant M_R(f),\ M_2\leqslant M_R(f)。$$

因此,

$$m_1|R_1|+m_2|R_2|\geqslant m_R(f)|R_1|+m_R(f)|R_2|=m_R(f)|R|,$$
$$M_1|R_1|+M_2|R_2|\leqslant M_R(f)|R_1|+M_R(f)|R_2|=M_R(f)|R|。$$

从而,$L(f,P)\leqslant L(f,P'')$,$U(f,P'')\leqslant U(f,P)$。

引理2 设 P 与 P' 都是矩形 Ω 的分割,则 $L(f,P)\leqslant U(f,P')$。

证明 若 $P=P'$,结论显然成立。若 $P\neq P'$,考虑 P 与 P' 的共同加细 P''。由引理1得 $L(f,P)\leqslant$

$L(f,P'')\leqslant U(f,P'')\leqslant U(f,P')$。

定义3 设$f:\Omega\to\mathbf{R}$是有界函数,定义f在Ω上的下积分与上积分分别为

$$\underline{\int_{\Omega}}f=\sup\{L(f,P):P\text{是矩形}\Omega\text{的一个分割}\}。$$

$$\overline{\int_{\Omega}}f=\inf\{U(f,P):P\text{是矩形}\Omega\text{的一个分割}\}。$$

引理3 $\underline{\int_{\Omega}}f\leqslant\overline{\int_{\Omega}}f$。

证明 设P与P'是矩形Ω的任意2个分割。由引理2,$L(f,P)\leqslant U(f,P')$。基于上确界是最小的上界,可得$\underline{\int_{\Omega}}f\leqslant U(f,P')$。基于下确界是最大的下界,可得$\underline{\int_{\Omega}}f\leqslant\overline{\int_{\Omega}}f$。

引理4 $\lim\limits_{\|P\|\to 0}L(f,P)=\underline{\int_{\Omega}}f$。

证明 首先设$P=(P_1,P_2)$,向P_1或P_2中共添加N个分点,得到新的分割,记为$P^{(N)}$。向P_1或P_2中依次添加分点,就可得到$P^{(N)}$。添加一个分点后,得到的分割记为$P^{(1)}$;在$P^{(1)}$的基础之上,再添加一个分点,得到的分割记为$P^{(2)}$,经过有限步后,就可以得到$P^{(N)}$。先证明关于下和的一个估计

$$0\leqslant L(f,P^{(N)})-L(f,P)\leqslant N(T_2-T_1)\|P\|\lambda,\quad(1)$$

其中$\lambda=\max\{b-a,d-c\}$为矩形Ω的宽度。由于$f:\Omega\to\mathbf{R}$是有界函数,故存在实数T_1、T_2,使得对$\forall(x,y)\in\Omega,T_1\leqslant f(x,y)\leqslant T_2$。假设向$[x_{i-1},x_i]$中添加分点$\xi$后得到$P^{(1)}$。固定$i$,考虑矩形$\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],j=1,2,\cdots,l$。每个矩形$R_{ij}\triangleq\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right]$被分为2个子矩形$R_{ij}^{(1)}\triangleq\left[x_{i-1},\xi\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],R_{ij}^{(2)}\triangleq\left[\xi,x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right]$。

设f在R_{ij}上的下确界为m_{ij},在$R_{ij}^{(1)}$上的下确界为$m_{ij}^{(1)}$,在$R_{ij}^{(2)}$上的下确界为$m_{ij}^{(2)}$,有下面的不等式:

$$0\leqslant L(f,P^{(1)})-L(f,P)=$$

$$\sum_{j=1}^{l}m_{ij}^{(1)}\left|R_{ij}^{(1)}\right|+\sum_{j=1}^{l}m_{ij}^{(2)}\left|R_{ij}^{(2)}\right|-\sum_{j=1}^{l}m_{ij}\left|R_{ij}\right|=$$

$$\sum_{j=1}^{l}m_{ij}^{(1)}\left|R_{ij}^{(1)}\right|+\sum_{j=1}^{l}m_{ij}^{(2)}\left|R_{ij}^{(2)}\right|-\sum_{j=1}^{l}m_{ij}\left(\left|R_{ij}^{(1)}\right|+\left|R_{ij}^{(2)}\right|\right)=$$

$$\sum_{j=1}^{l}(m_{ij}^{(1)}-m_{ij})\left|R_{ij}^{(1)}\right|+\sum_{j=1}^{l}(m_{ij}^{(2)}-m_{ij})\left|R_{ij}^{(2)}\right|\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{l}(T_2-T_1)\left(\left|R_{ij}^{(1)}\right|+\left|R_{ij}^{(2)}\right|\right)=(T_2-T_1)\sum_{j=1}^{l}\left|R_{ij}\right|=$$

$$(T_2-T_1)(x_i-x_{i-1})(d-c)\leqslant(T_2-T_1)\|P\|\lambda。$$

由此证明了$0\leqslant L(f,P^{(1)})-L(f,P)\leqslant(T_2-T_1)\|P\|\lambda$。

同理可得

$$0\leqslant L(f,P^{(2)})-L(f,P^{(1)})\leqslant(T_2-T_1)\|P\|\lambda,$$

$$0\leqslant L(f,P^{(3)})-L(f,P^{(2)})\leqslant(T_2-T_1)\|P\|\lambda,$$

$$\cdots\cdots$$

$$0\leqslant L(f,P^{(N)})-L(f,P^{(N-1)})\leqslant(T_2-T_1)\|P\|\lambda。$$

相加以上不等式可得式(1)。对$\forall\varepsilon>0$,存在矩形Ω的分割$P'=(P_1',P_2')$,使得$L(f,P')>\underline{\int_{\Omega}}f-\frac{\varepsilon}{2}$。

假设P'有N个分点(P_1'与P_2'的分点之和)。对矩形Ω的任意分割P,考虑P与P'的共同加细P'',根据式(1)得

$$0\leqslant L(f,P'')-L(f,P)\leqslant N(T_2-T_1)\|P\|\lambda。$$

因此

$$L(f,P)\geqslant L(f,P'')-N(T_2-T_1)\|P\|\lambda\geqslant$$

$$L(f,P')-N(T_2-T_1)\|P\|\lambda>$$

$$\underline{\int_{\Omega}}f-\frac{\varepsilon}{2}-N(T_2-T_1)\|P\|\lambda。$$

当$\|P\|<\dfrac{\varepsilon}{2N(T_2-T_1)\lambda}$时,$\underline{\int_{\Omega}}f\geqslant L(f,P)>\underline{\int_{\Omega}}f-\varepsilon$。于是$\lim\limits_{\|P\|\to 0}L(f,P)=\underline{\int_{\Omega}}f$。

引理5 $\lim\limits_{\|P\|\to 0}U(f,P)=\overline{\int_{\Omega}}f$。

证明 首先证明关于上和的一个估计

$$0\leqslant U(f,P)-U(f,P^{(N)})\leqslant N(T_2-T_1)\|P\|\lambda,\quad(2)$$

其中$\lambda=\max\{b-a,d-c\}$为矩形Ω的宽度。

由于$f:\Omega\to\mathbf{R}$是有界函数,故存在实数T_1、T_2使得对$\forall(x,y)\in\Omega,T_1\leqslant f(x,y)\leqslant T_2$。设向$[x_{i-1},x_i]$中添加分点$\xi$后得到$P^{(1)}$。固定$i$,考虑矩形$\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],j=1,2,\cdots,l$。每个矩形$R_{ij}\triangleq\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right]$被分为2个子矩形$R_{ij}^{(1)}\triangleq\left[x_{i-1},\xi\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],R_{ij}^{(2)}\triangleq\left[\xi,x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right]$。

设f在R_{ij}上的上确界为M_{ij},在$R_{ij}^{(1)}$上的上确界为$M_{ij}^{(1)}$,在$R_{ij}^{(2)}$上的上确界为$M_{ij}^{(2)}$,则有

$$0\leqslant U(f,P)-U(f,P^{(1)})=$$

$$\sum_{j=1}^{l} M_{ij}\left|R_{ij}\right| - \left(\sum_{j=1}^{l} M_{ij}^{(1)}\left|R_{ij}^{(1)}\right| + \sum_{j=1}^{l} M_{ij}^{(2)}\left|R_{ij}^{(2)}\right|\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{l} M_{ij}\left(\left|R_{ij}^{(1)}\right| + \left|R_{ij}^{(2)}\right|\right) - \left(\sum_{j=1}^{l} M_{ij}^{(1)}\left|R_{ij}^{(1)}\right| + \sum_{j=1}^{l} M_{ij}^{(2)}\left|R_{ij}^{(2)}\right|\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{l} (M_{ij} - M_{ij}^{(1)})\left|R_{ij}^{(1)}\right| + \sum_{j=1}^{l} (M_{ij} - M_{ij}^{(2)})\left|R_{ij}^{(2)}\right| \leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{l} (T_2 - T_1)\left(\left|R_{ij}^{(1)}\right| + \left|R_{ij}^{(2)}\right|\right) = (T_2 - T_1)\sum_{j=1}^{l}\left|R_{ij}\right| =$$

$$(T_2 - T_1)(x_i - x_{i-1})(d - c) \leqslant (T_2 - T_1)\|P\|\lambda。$$

即 $0 \leqslant U(f,P) - U(f,P^{(1)}) \leqslant (T_2 - T_1)\|P\|\lambda$。同理可得

$$0 \leqslant U(f,P^{(1)}) - U(f,P^{(2)}) \leqslant (T_2 - T_1)\|P\|\lambda,$$

$$0 \leqslant U(f,P^{(2)}) - U(f,P^{(3)}) \leqslant (T_2 - T_1)\|P\|\lambda,$$

$$\cdots\cdots$$

$$0 \leqslant U(f,P^{(N-1)}) - U(f,P^{(N)}) \leqslant (T_2 - T_1)\|P\|\lambda。$$

相加以上不等式可得式(2)。对 $\forall\varepsilon > 0$,存在矩形 Ω 的分割 $P' = (P_1', P_2')$,使得 $U(f,P') < \overline{\int_\Omega} f + \frac{\varepsilon}{2}$。假设 P' 有 N 个分点(P_1' 与 P_2' 的分点之和)。对矩形 Ω 的任意分割 P,考虑 P 与 P' 的共同加细 P'',由式(2)得

$$U(f,P) \leqslant U(f,P'') + N(T_2 - T_1)\|P\|\lambda \leqslant$$

$$U(f,P') + N(T_2 - T_1)\|P\|\lambda <$$

$$\overline{\int_\Omega} f + \frac{\varepsilon}{2} + N(T_2 - T_1)\|P\|\lambda,$$

当 $\|P\| < \dfrac{\varepsilon}{2N(T_2 - T_1)\lambda}$ 时,$\overline{\int_\Omega} f \leqslant U(f,P) < \overline{\int_\Omega} f + \varepsilon$。于是,$\lim\limits_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \overline{\int_\Omega} f$。

设 P 是矩形 Ω 的任意一个分割,对每个由 P 决定的子矩形 R,在 R 中任取一点 x_R,称和 $\sum_R f(x_R)|R|$ 为黎曼和。分割 P 固定后,由于介点 x_R 的选取是任意的,故黎曼和并不固定。称 $L(f,P)$,$U(f,P)$ 为达布和。容易验证

$$L(f,P) =$$

$$\inf\left\{\sum_R f(x_R)|R| : x_R \in R, R\text{是 } P \text{ 决定的子矩形}\right\},$$

$$U(f,P) =$$

$$\sup\left\{\sum_R f(x_R)|R| : x_R \in R, R\text{是 } P \text{ 决定的子矩形}\right\}。$$

定义4 设 $f:\Omega \to \mathbf{R}$ 是有界函数,J 是一个确定的实数。若对 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$,对 Ω 的任意一个分割 P,若 $\|P\| < \delta$,有 $\left|\sum_R f(x_R)|R| - J\right| < \varepsilon$,则称 f 在 Ω 上黎曼可积,f 在 Ω 上的积分为 J,记为 $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = J$。

定理6 f 在 Ω 上黎曼可积的充分必要条件是 $\underline{\int_\Omega} f = \overline{\int_\Omega} f$。

证明 (必要性)假设 f 在 Ω 上黎曼可积,$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = J$。则对 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$,对 Ω 的任意一个分割 P,只要 $\|P\| < \delta$,就有 $\left|\sum_R f(x_R)|R| - J\right| < \frac{\varepsilon}{2}$,即 $J - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_R f(x_R)|R| < J + \frac{\varepsilon}{2}$。暂时固定分割 P,分别取上确界、下确界,则有

$$J - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(f,P) \leqslant J + \frac{\varepsilon}{2}, J - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant U(f,P) \leqslant J + \frac{\varepsilon}{2}。$$

于是,$\lim\limits_{\|P\|\to 0} U(f,P) = J$,$\lim\limits_{\|P\|\to 0} L(f,P) = J$。

(充分性)设 $\underline{\int_\Omega} f = \overline{\int_\Omega} f = J$。$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$,对 Ω 的任意一个分割 P,只要 $\|P\| < \delta$,就有 $|L(f,P) - J| < \varepsilon$,$|U(f,P) - J| < \varepsilon$。另一方面,$L(f,P) \leqslant \sum_R f(x_R)|R| \leqslant U(f,P)$,所以 $\left|\sum_R f(x_R)|R| - J\right| < \varepsilon$。

定理7 f 在矩形 Ω 上黎曼可积的充分必要条件是:对 $\varepsilon > 0$,存在 Ω 的分割 P,使得 $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$。

证明 (必要性)假设 f 在 Ω 上黎曼可积,则 $J = \underline{\int_\Omega} f = \overline{\int_\Omega} f$。$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$,对 Ω 的任意一个分割 P,只要 $\|P\| < \delta$,就有 $|L(f,P) - J| < \varepsilon/2$,$|U(f,P) - J| < \varepsilon/2$。显然,当 $\|P\| < \delta$ 时,$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$。

(充分性)对 $\varepsilon > 0$,存在 Ω 的分割 P,使得 $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$。由不等式

$$L(f,P) \leqslant \underline{\int_\Omega} f \leqslant \overline{\int_\Omega} f \leqslant U(f,P)$$

可推出 $0 \leqslant \overline{\int_\Omega} f - \underline{\int_\Omega} f < \varepsilon$。故 $\underline{\int_\Omega} f = \overline{\int_\Omega} f$,即 f 在 Ω 上黎曼可积。

定理8　如果f在矩形Ω上连续,则f在Ω上黎曼可积。

证明　由于f在Ω上连续,故f在Ω上一致连续。即对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,在$\Omega$中任取2点$x$、$x'$,只要$|x-x'|<\delta$,就有$\left|f(x)-f(x')\right|<\frac{\varepsilon}{|\Omega|}$。存在正整数$N$,使得$\frac{\lambda}{N}<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$,把闭区间$[a,b]$$N$等分,得到分割$P_1$,把闭区间$[c,d]$$N$等分,得到分割$P_2$,设分割$P=(P_1,P_2)$。设$R$为分割$P$决定的子矩形,在$R$中任取2点$x$、$x'$,有$\left|x-x'\right|<\delta$。在$R$中存在2点$x_R$、$x_R'$,使得$f(x_R)=M_R(f)$,$f(x_R')=m_R(f)$,于是

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_R\left(M_R(f)-m_R(f)\right)|R|=$$

$$\sum_R\left|f(x_R)\right|-f(x_R')\,|R|<\sum_R\frac{\varepsilon}{|\Omega|}|R|=\varepsilon。$$

根据定理7,f在Ω上黎曼可积。

2　黎曼积分存在的充要条件

定义5　设A是平面点集。如果对$\forall\varepsilon>0$,存在可数个矩形$\{Q_i\}_{i\geqslant1}$(有限个或可列个),使得$A\subset\bigcup_{i\geqslant1}Q_i$,$\sum_{i\geqslant1}\left|Q_i\right|<\varepsilon$,则称$A$是零测集,记为$m^*(A)=0$。

引理9　已知$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$是平面点集列,并且每个A_i都是零测集,则$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$是零测集。

证明　给定$\varepsilon>0$,对每个A_i,存在可数个矩形$\{Q_{ij}\}_{j\geqslant1}$,使得$A_i\subset\bigcup_{j\geqslant1}Q_{ij}$,$\sum_{j\geqslant1}\left|Q_{ij}\right|<\frac{\varepsilon}{2^i}$,显然,$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j\geqslant1}Q_{ij}$。由定义5,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\geqslant1}\left|Q_{ij}\right|<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon,$$

故A是零测集。

引理10　设$Q\subset\mathbf{R}^2$是矩形,则Q的边界是零测集。

证明　Q的边界由4条线段组成。设$Q=[a,b]\times[c,d]$,仅证明$\{a\}\times[c,d]$是零测集。对$\forall\varepsilon>0$,$\{a\}\times[c,d]\subset[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\times[c,d]$,由定义5,$0\leqslant m^*\left(\{a\}\times[c,d]\right)\leqslant2\varepsilon(d-c)$,$m^*\left(\{a\}\times[c,d]\right)=0$。

引理11　如果f在$[a,b]$上连续,则$A=\{(x,f(x)):x\in[a,b])\}$是零测集。

证明　由于f在$[a,b]$上连续,故一致连续,即对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得对$[a,b]$中任意2点$x_1$、$x_2$,只要$\left|x_2-x_1\right|<\delta$,就有$\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right|<\varepsilon$。

存在正整数N,使得$\frac{b-a}{N}<\delta$。把$[a,b]$$N$等分,设分点为$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$,则

$$A=\bigcup_{i=1}^{N}\left\{\left(x,f(x)\right):x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\right\}\subset$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[f\left(x_i\right)-\varepsilon,f\left(x_i\right)+\varepsilon\right]。$$

显然上面N个矩形的面积之和为$\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x_{i-1}\right)(2\varepsilon)=2\varepsilon(b-a)$,故$m^*(A)=0$。

引理12　设A是平面点集。$m^*(A)=0$的充分必要条件是对$\forall\varepsilon>0$,存在可数个开矩形$\{\mathrm{Int}\,Q_i\}_{i\geqslant1}$,使得$A\subset\bigcup_{i\geqslant1}\mathrm{Int}\,Q_i$,$\sum_{i\geqslant1}\left|Q_i\right|<\varepsilon$。

证明　(充分性)可数个开矩形$\{\mathrm{Int}\,Q_i\}_{i\geqslant1}$覆盖了$A$,显然$\{Q_i\}_{i\geqslant1}$也是$A$的覆盖。由零测集的定义,$m^*(A)=0$。

(必要性)假设$m^*(A)=0$,则对$\forall\varepsilon>0$,存在可数个矩形$\{Q_i'\}_{i\geqslant1}$,使得$A\subset\bigcup_{i\geqslant1}Q_i'$,$\sum_{i\geqslant1}\left|Q_i'\right|<\varepsilon/2$。对每个$i$,选择一个矩形$Q_i$使得$Q_i'\subset\mathrm{Int}Q_i$,$\left|Q_i\right|<2\left|Q_i'\right|$。显然,$A\subset\bigcup_{i\geqslant1}\mathrm{Int}Q_i$,$\sum_{i\geqslant1}\left|Q_i\right|<\varepsilon$。

定理13　设$\Omega\subset\mathbf{R}^2$是矩形,$f:\Omega\to\mathbf{R}$是有界函数。设$D=\{x\in\Omega:f$在点$x$处不连续$\}$,则$f$在$\Omega$上可积的充分必要条件是$m^*(D)=0$。

证明　(充分性)存在$M>0$,使得对$\forall x\in\Omega$,$\left|f(x)\right|\leqslant M$。已知$m^*(D)=0$,要证$f$在$\Omega$上可积仅需证明对$\varepsilon>0$,存在矩形$\Omega$的分割$P$,使得$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$。

设$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2M+2|\Omega|}$。根据引理12,存在可数个开矩形$\{\mathrm{Int}\,Q_i\}_{i\geqslant1}$,使得$D\subset\bigcup_{i\geqslant1}\mathrm{Int}\,Q_i$,$\sum_{i\geqslant1}\left|Q_i\right|<\varepsilon'$。对$\forall a\in\Omega\backslash D$,$f$在点$a$处连续,选择一个包含点$a$的开矩形$\mathrm{Int}\,Q_a$,使得对$\forall x\in Q_a\cap\Omega$,有$\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon'$。$\Omega\subset\left(\bigcup_{i\geqslant1}\mathrm{Int}\,Q_i\right)\cup\left(\bigcup_{a\in\Omega\backslash D}\mathrm{Int}\,Q_a\right)$显然成立。

根据有限覆盖定理,存在有限个开矩形$\mathrm{Int}\,Q_1,\mathrm{Int}\,Q_2,\cdots,\mathrm{Int}\,Q_k$;$\mathrm{Int}\,Q_{a_1},\mathrm{Int}\,Q_{a_2},\cdots,\mathrm{Int}\,Q_{a_l}$,其并集包含$\Omega$。为方便起见,以$Q_j'$表示$Q_{a_j}$。则矩

形 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$; $Q'_1, Q'_2, \cdots, Q'_l$ 覆盖了 Ω,并且

(1) $\sum_{i=1}^{k} \left| Q_i \right| < \varepsilon'$,

(2) 对 $\forall x, y \in Q'_j \cap \Omega, \left| f(x) - f(y) \right| < 2\varepsilon'$。

不改变记号,用 Q_i 表示 $Q_i \cap \Omega$,用 Q'_j 表示 $Q'_j \cap \Omega$。新的矩形 $\{Q_i\}$ 及 $\{Q'_j\}$ 依然覆盖 Ω 且满足(1)与(2)。用矩形 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$; $Q'_1, Q'_2, \cdots, Q'_l$ 的分支区间的端点定义 Ω 的一个分割 P。显而易见,每个矩形 Q_i 及 Q'_j 是由 P 决定的一些子矩形的并。把由 P 决定的所有子矩形所构成的集合族分为2个互不相交的子族 A 与 B,所有位于某个 Q_i 之中的子矩形属于 A,所有位于某个 Q'_j 之中并且不属于 A 的子矩形属于 B。

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{R \in A} \left(M_R(f) - m_R(f) \right) |R| + \sum_{R \in B} \left(M_R(f) - m_R(f) \right) |R| \leqslant \sum_{R \in A} 2M |R| + \sum_{R \in B} 2\varepsilon' |R| \leqslant 2M \sum_{I=1}^{k} \left| Q_i \right| + 2\varepsilon' |\Omega| < 2M\varepsilon' + 2\varepsilon' |\Omega| = \varepsilon。$$

定义 f 在点 a 处的振幅,并探究此概念与 f 在点 a 处连续的关系。给定 $a \in \Omega$,对 $\forall \delta > 0$,定义 $A_\delta = \{ f(x) : x \in \Omega \text{ 且 } |x - a| < \delta \}$。定义 f 在点 a 处的振幅为 $v(f; a) = \inf\limits_{\delta > 0} [M_\delta(f) - m_\delta(f)]$,其中 $M_\delta(f) = \sup A_\delta, m_\delta(f) = \inf A_\delta$。显然,$v(f; a)$ 是非负实数。

下面证明 f 在点 a 处连续 $\Leftrightarrow v(f; a) = 0$。

(充分性)(1)假设 f 在点 a 处连续,则对 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,使得对 $\forall x \in B(a, \delta) \cap \Omega$,有 $\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$。由此可得 $M_\delta(f) \leqslant f(a) + \varepsilon, m_\delta(f) \geqslant f(a) - \varepsilon$。于是有 $0 \leqslant v(f; a) \leqslant 2\varepsilon$,因此 $v(f; a) = 0$。

(2)假设 $v(f; a) = 0$。给定 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,使得 $M_\delta(f) - m_\delta(f) < \varepsilon$。对 $\forall x \in B(a, \delta) \cap \Omega, m_\delta(f) \leqslant f(x) \leqslant M_\delta(f), m_\delta(f) \leqslant f(a) \leqslant M_\delta(f)$,从而 $\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$,所以 f 在点 a 处连续。

(必要性) 假设 f 在 Ω 上可积,需证 $m^*(D) = 0$。设

$$D_m = \left\{ a \in \Omega : v(f; a) \geqslant \frac{1}{m} \right\},$$

由上面结论知 $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$。则仅需证明 $m^*(D_m) = 0$。

固定 m,对 $\forall \varepsilon > 0$,将用可数个总面积 $< \varepsilon$ 的矩形覆盖 D_m。存在 Ω 的分割 P,使 $U(f,P) - L(f,P) < \dfrac{\varepsilon}{2m}$。设

$$D'_m = \left(\bigcup_{\text{所有由分割}P\text{决定的子矩形}R} B(R) \right) \cap D_m, D''_m = D_m \backslash D'_m,$$

此处,$B(R)$ 指矩形 R 的边界。由引理9与10知 $m^*(D'_m) = 0$,所以,存在可数个总面积 $< \varepsilon/2$ 的矩形覆盖 D'_m。下面考虑 D''_m。

设与 D''_m 相交非空的,且由分割 P 决定的子矩形为 $R_1, R_2, \cdots, R_k$。显然,其并集包含 D''_m。证明这些子矩形的面积总和 $< \varepsilon/2$。假设 R_i 包含 D''_m 中的一点 a。由于 $a \notin B(R_i)$,故 $\exists \delta > 0$,使得 $B(a, \delta) \subset R_i$。则

$$\frac{1}{m} \leqslant v(f; a) \leqslant M_\delta(f) - m_\delta(f) \leqslant M_{R_i}(f) - m_{R_i}(f)。$$

于是,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{m} \left| R_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} [M_{R_i}(f) - m_{R_i}(f)] \left| R_i \right| \leqslant U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{2m}。$$

所以这些子矩形的面积总和 $< \varepsilon/2$。

3 二重积分的计算

假设二元函数 $f(x,y)$ 在矩形区域上黎曼可积,固定变量 x 后,$f(x,y)$ 作为 y 的函数在相应闭区间上的黎曼积分未必存在。请看下面的例1。

例1 设 $I = [0,1]$, $\Omega = I \times I$。定义 $f: \Omega \to \mathbf{R}$,$f(x,y) = \dfrac{1}{q}$,如果 y 是有理数并且 $x = \dfrac{p}{q}$,其中 p 与 q 是互素的正整数且 $f(x,y) = 0$,如果 (x,y) 是 Ω 中的其他点。

首先证明 f 在 Ω 上可积。给定 $\varepsilon > 0$,满足 $\dfrac{1}{q} > \varepsilon$ 的正整数只有有限个,故 $[0,1]$ 中只有有限个形如 $\dfrac{p}{q}$ (p 与 q 是互素的)的有理数 ($\dfrac{1}{q} > \varepsilon$),设为 $x_1, x_2, \cdots, x_N$。作直线 $x_i - \delta, x_i + \delta$, $i = 1, 2, \cdots, N$,则得到 N 个底为 2δ,高为1的小长方形,其中 $\delta > 0$ 并且足够小,使得 N 个小长方形互不相交,$2\delta N < \varepsilon$,即面积总和 $< \varepsilon$。闭区间 $[0,1]$ 的端点加上上述 $2N$ 个点构成 $[0,1]$ 的分割,再作矩形另一条边 $[0,1]$ 的一个分割,就得到 Ω 的一个分割 P,显然 $U(f,P) - L(f,P) < 2\varepsilon$,因此,$f$ 在 Ω 上可积。对 Ω 的任意一个分割 P,$L(f,P) = 0$,故 $\int_\Omega f = 0$。

其次证明,固定变量 x 后,$f(x,y)$ 作为 y 的函数

在[0, 1]上不是黎曼可积的。设 $x_0 = \frac{p}{q} \in [0,1]$,即 x_0 是有理数。如果 y 是有理数,则 $f(x_0, y) = \frac{1}{q}$;如果 y 是无理数,则 $f(x_0, y) = 0$。显然,$f(x_0, y)$ 作为 y 的函数在[0, 1]上不可积。f 在 Ω 上的积分不能转化为先对 y,再对 x 的二次积分。如何解决这一问题?请看下面的Fubini定理。

定理 14 (Fubini定理)设 $\Omega = [a,b] \times [c,d]$,设 $f: \Omega \to \mathbf{R}$ 是有界函数。对每个 $x \in A$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $[c,d]$ 上的下积分与上积分是存在的,分别记为 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$,如果 f 在 Ω 上可积,则 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,并且

$$\int_\Omega f = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x。$$

证明 因为 f 在 Ω 上可积,故对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 Ω 的一个分割 P,使得 $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$,其中 $P = (P_1, , P_2)$, $P_1: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 是闭区间 $[a, b]$ 的一个分割,$P_2: c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_l = d$ 是闭区间 $[c, d]$ 的一个分割,设 $I = [x_{i-1}, x_i]$, $J = [y_{j-1}, y_j]$,称矩形 $I \times J$ 是由分割 P 决定的子矩形。固定 i,考虑矩形 $R_{ij} \triangleq [x_{i-1,} x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \cdots, l$。设 f 在 R_{ij} 上的上确界为 M_{ij},下确界为 m_{ij}。

首先证明 $L(f,P) \leqslant L(\varphi, P_1)$。设 $x_0 \in [x_{i-1}, x_i]$,对 $\forall y \in [y_{j-1}, y_j]$, $m_{ij} \leqslant f(x_0, y)$。设 $f(x_0, y)$ 在 $[y_{j-1}, y_j]$ 上的下确界为 λ_j,于是 $m_{ij} \leqslant \lambda_j$,从而

$$\sum_{j=1}^{l} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{l} \lambda_j (y_j - y_{j-1}) \leqslant \varphi(x_0)。$$

φ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的下确界记为 $m_i(\varphi)$,显然 $\sum_{j=1}^{l} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqslant m_i(\varphi)$,于是 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} m_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i(\varphi)(x_i - x_{i-1})$,即 $L(f,P) \leqslant L(\varphi, P_1)$。

下证 $U(f,P) \geqslant U(\psi, P_1)$。设 $x_0 \in [x_{i-1}, x_i]$,对 $\forall y \in [y_{j-1}, y_j]$, $f(x_0, y) \leqslant M_{ij}$。设 $f(x_0, y)$ 在 $[y_{j-1}, y_j]$ 上的上确界为 τ_j,于是 $\tau_j \leqslant M_{ij}$,从而

$$\psi(x_0) \leqslant \sum_{j=1}^{l} \tau_j (y_j - y_{j-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{l} M_{ij}(y_j - y_{j-1})。$$

ψ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上确界记为 $M_i(\psi)$,显然 $M_i(\psi) \leqslant \sum_{j=1}^{l} M_{ij}(y_j - y_{j-1})$,于是 $\sum_{i=1}^{n} M_i(\psi)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} M_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1})$,即 $U(f,P) \geqslant U(\psi, P_1)$。

下面证明主要结论。对 $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$,故 $L(\varphi, P_1) \leqslant L(\psi, P_1)$, $U(\varphi, P_1) \leqslant U(\psi, P_1)$。显然,

$$L(f,P) \leqslant L(\varphi, P_1) \leqslant U(\varphi, P_1) \leqslant U(f,P),$$

$$L(f,P) \leqslant L(\psi, P_1) \leqslant U(\psi, P_1) \leqslant U(f,P)。$$

因此,$U(\varphi, P_1) - L(\varphi, P_1) < \varepsilon$, $U(\psi, P_1) - L(\psi, P_1) < \varepsilon$,从而,$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,并且 $|\int_\Omega f - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x| < \varepsilon$, $|\int_\Omega f - \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x| < \varepsilon$,所以

$$\int_\Omega f = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x。$$

推论 15 设 $\Omega = [a, b] \times [c, d]$,设 $f: \Omega \to \mathbf{R}$ 是连续函数。则 $\int_\Omega f = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$。

证明 由定理 8 及 Fubini 定理,推论显然成立。同理可得 $\int_\Omega f = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

4 有界集上的积分

定义 6 设 $S \subset \mathbf{R}^2$ 是有界集,设 $f: S \to \mathbf{R}$ 是有界函数。定义 $f_S: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 如下:$f_S(x) = \begin{cases} f(x), x \in S, \\ 0, x \in \mathbf{R}^2 \backslash S。 \end{cases}$

选择一个包含 S 的矩形 Ω,如果 $\int_\Omega f_S$ 存在,则 f 在 S 上的积分定义为 $\int_S f = \int_\Omega f_S$。

需证明 f 在 S 上的积分不依赖于对矩形 Ω 的选择,有如下引理。

引理 16 设 Ω 与 Ω' 都是平面上包含 S 的矩形,则 $\int_\Omega f_S$ 与 $\int_{\Omega'} f_S$ 中的一个存在则另一个也存在,且 $\int_\Omega f_S = \int_{\Omega'} f_S$。

证明 首先考虑 $\Omega \subset \Omega'$ 的情况。设 $E = \{x: x \in \mathrm{Int}\,\Omega, f_S$ 在点 x 处不连续$\}$, $T = \{x: x \in \Omega', f_S$ 在点 x 处不连续$\}$,则 $T = E \cup Z$,其中 $Z \subset B(\Omega)$。显然,$m^*(Z) = 0$。如果 f_S 在 Ω 上可积,则由定理 13,

$m^*(E)=0$,于是 $0\leqslant m^*(T)\leqslant m^*(E)+m^*(Z)=0$,从而 $m^*(T)=0$。由定理13,f_S 在 Ω' 上可积且 $m^*(T)=0$。于是 $m^*(E)=0$。f_S 在 Ω 上的不连续点集是 $E\cup Z_1$,其中 $Z_1\subset B(\Omega)$。$0\leqslant m^*\left(E\cup Z_1\right)\leqslant m^*(E)+m^*\left(Z_1\right)=0$。由定理13,$f_S$ 在 Ω 上可积。

假设2个积分都存在。设 P 是 Ω' 的一个分割,把 Ω 的分支区间的端点添加到 P 之中,得到 P 的加细 P''。显而易见,Ω 是由 P'' 决定的部分子矩形的并集。如果 R 是由 P'' 决定的子矩形且不在 Ω 之中,则 $m_R\left(f_S\right)\leqslant 0$。因此,

$$L\left(f_S,P\right)\leqslant L\left(f_S,P''\right)\leqslant m_R\left(f_S\right)|R|\leqslant\int_{\Omega}f_S。$$

$$\int_{\Omega'}f_S=\sup\left\{L\left(f_S,P\right):P\text{是矩形}\ \Omega'\text{的一个分割}\right\},$$

故 $\int_{\Omega'}f_S\leqslant\int_{\Omega}f_S$。同理可得

$$\int_{\Omega}f_S\leqslant\sum_{R\subset\Omega}M_R\left(f_S\right)|R|\leqslant U\left(f_S,P''\right)\leqslant U\left(f_S,P\right)。$$

$$\int_{\Omega'}f_S=\inf\left\{U(f,P):P\text{是矩形}\Omega'\text{的一个分割}\right\},$$

故 $\int_{\Omega'}f_S\geqslant\int_{\Omega}f_S$。于是 $\int_{\Omega'}f_S=\int_{\Omega}f_S$。

任意给定平面上包含 S 的矩形 Ω 与 Ω'。存在较大的矩形 Ω'',满足 $\Omega''\supset\Omega\cup\Omega'$。由前面证明,如果 f_S 在 Ω 上可积,则 f_S 在 Ω'' 上可积并且 $\int_{\Omega''}f_S=\int_{\Omega}f_S$。因为 f_S 在 Ω'' 上可积,故 f_S 在 Ω' 上可积并且 $\int_{\Omega''}f_S=\int_{\Omega'}f_S$。从而 $\int_{\Omega'}f_S=\int_{\Omega}f_S$。同理可证,如果 f_S 在 Ω' 上可积,则 f_S 在 Ω 上可积并且 $\int_{\Omega'}f_S=\int_{\Omega}f_S$。

定义7 设 φ 与 ψ 在 $[a,b]$ 上连续且对 $\forall x\in[a,b],\varphi(x)\leqslant\psi(x)$。称区域 $S=\{(x,y):x\in[a,b],\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}$ 为 x-型区域。

假设 f 是定义在 S 上的连续函数,设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值是 c,$\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值是 d,$\Omega=[a,b]\times[c,d]$。$\Omega\supset S$ 是矩形。f_S 在 Ω 上的不连续点集是 $B(S)$ 的子集,而 $B(S)$ 由以下4个部分组成:

$$\{a\}\times\left[\varphi(a),\psi(a)\right],\{b\}\times\left[\varphi(b),\psi(b)\right],$$
$$\left\{\left(x,\varphi(x)\right):x\in[a,b]\right\},\left\{\left(x,\psi(x)\right):x\in[a,b]\right\}。$$

由引理10及11,上述每个集合皆为零测集。因此,f_S 在 Ω 上的不连续点集是零测集,由定理13知 f_S 在 Ω 上可积。由Fubini定理,$\int_{\Omega}f_S=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$。根据定义17,$\int_S f=\int_{\Omega}f_S=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$。

于是得到下面的定理。

定理17 如果 f 是定义在 x-型区域 S 上的连续函数,则

$$\int_S f=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y。$$

定义8 设 g 与 h 在 $[c,d]$ 上连续且对 $\forall y\in[c,d],g(y)\leqslant h(y)$。称区域 $T=\{(x,y):y\in[c,d],g(y)\leqslant x\leqslant h(y)\}$ 为 y-型区域。

同理可得如下定理。

定理18 如果 f 是定义在 y-型区域 T 上的连续函数,则

$$\int_T f=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{g(y)}^{h(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x。$$

5 二重积分的应用

定理19 设 $A\subset\mathbf{R}^2$ 是开集;$f:A\to\mathbf{R}$ 具有二阶连续偏导数。设 $\Omega\subset A$ 是矩形,其中 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$。则

(1) $\int_{\Omega}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\Omega}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

(2) 对 $\forall(x,y)\in A,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$。

证明 (1) 由Fubini定理,

$$\int_{\Omega}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y=$$
$$\int_a^b\left(f_x(x,d)-f_x(x,c)\right)\mathrm{d}x=$$
$$f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c)。$$

$$\int_{\Omega}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x=$$
$$\int_c^d\left(f_y(b,y)-f_y(a,y)\right)\mathrm{d}y=$$
$$f(b,d)-f(b,c)-f(a,d)+f(a,c)。$$

因此,等式(1)成立。

(2) 假设 $\exists\left(x_0,y_0\right)\in A$,使得 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right)$。不妨设 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x_0,y_0\right)>\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right)$。

A 中存在以 (x_0, y_0) 为中心的闭的正方形 Ω,使得对 $\forall (x,y) \in \Omega$,有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) > \lambda$,其中 $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)\right)$。由式(1)得 $0 = \int_{\Omega}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \lambda|\Omega|$,矛盾。故式(2)成立。

定理 20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$。

证明 设 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$。

$$I = \iint_{\Omega}\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint_{\Omega}\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty}\iint_{\Omega}(xy)^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}。$$

考虑正交变换 $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)。 \end{cases}$ 则

$$xy = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),\ 1 - xy = \frac{2 - u^2 + v^2}{2}。$$

可以把 I 写成如下形式:

$$I = 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{d}u\int_0^{u}\frac{1}{2-u^2+v^2}\mathrm{d}v +$$

$$4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}u\int_0^{\sqrt{2}-u}\frac{1}{2-u^2+v^2}\mathrm{d}v \triangleq I_1 + I_2。$$

$$I_1 = 4\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\mathrm{d}u \underset{u=\sqrt{2}\sin\theta}{\Rightarrow}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/6}4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{18}。$$

$$I_2 = 4\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\mathrm{d}u \underset{u=\sqrt{2}\sin\theta}{\Rightarrow}$$

$$I_2 = 4\int_{\pi/6}^{\pi/2}\arctan\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta。$$

$$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} =$$

$$\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)。$$

$I_2 = 4\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{9}$。因此,$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{6}$。

参 考 文 献

[1] 同济大学数学系.高等数学(上册)[M].6版.北京:高等教育出版社,2018.

[2] 同济大学数学系.高等数学(下册)[M].6版.北京:高等教育出版社,2018.

[3] MUNKRES J R. Analysis on manifolds [M]. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

[4] 华东师范大学数学系.数学分析(上册)[M].4版.北京:高等教育出版社,2010.

[5] 华东师范大学数学系.数学分析(下册)[M].4版.北京:高等教育出版社,2010.

[6] 卓里奇.数学分析(第一卷)[M].蒋铎,钱佩玲,周美珂,等,译.4版.北京:高等教育出版社,2006.

[7] 卓里奇.数学分析(第二卷)[M].蒋铎,钱佩玲,周美珂,等,译.4版.北京:高等教育出版社,2006.

[8] APOSTOL T M. Mathematical analysis [M]. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 2013.

[9] CHURCHILL R V, BROWN J W. Complex variables and applications [M]. New York: McGraw-Hill Education, 2012.

[10] SIMMONS G F. Calculus with analytic geometry[M]. New York: McGraw-Hill Education, 2016.

[11] SWOKOWSKI E W, COLE J A. Precalculus: functions and graphs[M]. Boston: Cengage Learning, 2011.

[12] ZILL D G, WRIGHT W S. Calculus: early transcendentals [M]. Burlington: Jones & Bartlett Learning, 2016.

[13] GHORPADE S R, LIMAYE B V. A course in multivariable calculus and analysis [M]. New York: Springer, 2017.

[14] И П那汤松.实变函数论 [M].5版.徐瑞云,译.北京:高等教育出版社,2010.

[15] А Н柯尔莫戈洛夫,С В 佛明.函数论与泛函分析初步[M].7版.段虞荣,郑淇深,郭思旭,译.北京:高等教育出版社,2006.

[16] 周民强.实变函数论[M].2版.北京:北京大学出版社,2012.

[17] 罗伊登 H L,菲茨帕特里克 P M.实分析[M].4版.叶培新,李雪华,译.北京:机械工业出版社,2010.

[18] STEIN E M, SHAKARCHI R. Real analysis: measure theory, integration, and hilbert spaces [M]. Princeton: Princeton University Press, 2005.

[19] FOLLAND G B. Real Analysis: modern techniques and their applications[M]. 2nd Ed. New York: Wiley, 1999.

[20] RIESZ F, NAGY B. Functional Analysis [M]. New York: Ungar, 1955.

(责任编辑:马田田)