DOI:10.19789/j.1004-9398.2024.01.006
文献引用:滕博,王在洪.具有奇异性Duffing型p-Laplace方程的周期解[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,45(1):45-51+130. TENG B,WANG Z H. Periodic solutions of Duffing type p-Laplace equations with singularities[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2024,45(1):45-51+130.

具有奇异性Duffing型p-Laplace方程的周期解*

滕　博，王在洪**
(首都师范大学数学科学学院，北京　100048)

摘要:本文研究Duffing型p-Laplace方程$(\phi_p(x'))'+g(x)=p(t)$周期解的存在性。当g具有奇异性且满足单边非共振条件时,应用连续性引理和相平面分析的方法,证明了该方程周期解的存在性。

关键词:p-Laplace方程;连续性引理;周期解
中图分类号:O175　　**文献标识码**:A

Periodic solutions of Duffing type p−Laplace equations with singularities*

TENG Bo，WANG Zaihong**
(School of Mathematical Sciences，Capital Normal University，Beijing　100048)

Abstract: This paper studies the existence of periodic solutions of Duffing type p−Laplace equations $(\phi_p(x'))'+g(x)=p(t)$. When g has a singularity and satisfies one-sided non-resonant condition, we prove the existence of periodic solutions by using the phase plane analysis method and the continuation lemma.

Keywords:p-Laplace equation;continuation lemma;periodic solution
CLC:O175　　**DC**:A

0　引　言

本文研究具有奇异性Duffing型p-Laplace方程

$$(\phi_p(x'))'+g(x)=p(t)\tag{1}$$

周期解的存在性,其中$p>1$, $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s, s\neq 0$, $\phi_p(0)=0$, $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$连续且在$x=0$处具有奇异性,$p:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$连续且是$T$-周期的。方程(1)在非牛顿流体、非线性弹性力学等领域具有重要的应用,其周期解问题受到了众多学者的研究[1-7]。

当$p=2$时,即$(\phi_p(x'))'=x''$,方程(1)即为经典的Duffing方程

$$x''+g(x)=p(t)。\tag{2}$$

关于具有奇异性Duffing方程(2)周期解问题的研究已经取得了大量的成果[8-13]。

假设$g:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbf{R}$连续,且满足条件

$$g(x)x>0, x\neq 0,$$

和

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 0^-}g(x)=-\infty,\ \lim_{|x|\to+\infty}g(x)=0。$$

Lazer和Solimini[8]证明了方程(2)至少有一个T-周

收稿日期:2023-08-16
* 国家自然科学基金项目(10771145)
** 通信作者:zhwang@cnu.edu.cn

期解的充要条件是

$$\int_0^T p(s)\,\mathrm{d}s \neq 0。$$

Pino等[9]研究了方程

$$x'' + f(t,x) = 0 \tag{3}$$

周期解的存在性,这里$f:\mathbf{R}\times(0,+\infty)\to\mathbf{R}$连续,关于$t$是$T$-周期的。假设存在正数$c$、$c'$、$\delta$和$\gamma\geqslant 1$,使

$$\frac{c}{x^\gamma}\leqslant -f(t,x)\leqslant\frac{c'}{x^\gamma},$$

其中$t\in[0,T]$, $0<x<\delta$,且存在非负整数n使得

$$\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2<\liminf_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}\leqslant\limsup_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}<\left(\frac{(n+1)\pi}{T}\right)^2$$

关于$t\in[0,T]$一致成立,证明了方程(3)至少存在一个T-周期解。

假设$g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$连续且满足奇异性条件

$$(\mathrm{H}_1)\ \lim_{x\to 0^+}g(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 0^+}G(x)=+\infty,$$

$$(G(x)=\int_1^x g(s)\mathrm{d}s),$$

和

$$\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2<\liminf_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\leqslant\limsup_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}<\left(\frac{(n+1)\pi}{T}\right)^2,$$

其中n是一个非负整数,Wang[11]证明了方程(2)至少存在一个T-周期解。

当g在$x=0$处有奇异性时,关于方程(1)周期解方面的研究相对较少。本文考虑具有奇异性p-Laplace方程(1)的T-周期解的存在性。

假设下面的条件成立,

$$(\mathrm{H}_2)\ \frac{\mu_k}{2^p}<\liminf_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{\phi_p(x)}\leqslant\limsup_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{\phi_p(x)}<\frac{\mu_{k+1}}{2^p},$$

$$(k\in\mathbf{N}),$$

这里μ_k,μ_{k+1}是周期边值问题

$$(\phi_p(x'))'+\mu\phi_p(x)=0,$$

$$x(0)=x(T),x'(0)=x'(T)$$

的2个相邻特征值,

$$\mu_j=(\frac{2j\pi_p}{T})^p,\ j=k,k+1,$$

其中

$$\pi_p=2(p-1)^{1/p}\int_0^1(1-t^p)^{-1/p}\mathrm{d}t=\frac{2\pi(p-1)^{1/p}}{p\sin(\pi/p)}。$$

应用连续性引理和相平面分析的方法,本文证明了以下结论:

定理 0.1 假设条件(H_1)和(H_2)成立,则方程(1)至少有一个T-周期解。

本文分别用$\mathbf{R}$、$\mathbf{N}$表示实数集、自然数集。对于任意T-周期的连续函数$x(t)$,记$\|x\|_\infty=\max\{|x(t)|:t\in[0,T]\}$。$C^1$表示$[0,T]$上的连续可微函数构成的Banach空间,其范数定义为$\|x\|=\|x\|_\infty+\|x'\|_\infty$。记

$$C_T^1=\{x\in C^1:x(t)=x(t+T),\forall t\in\mathbf{R}\}。$$

1 预备引理

考虑微分方程

$$(\phi_p(x'))'+\phi_p(x)=0,$$

其等价系统为

$$x'=\phi_q(y),y'=-\phi_p(x),\tag{4}$$

其中$q>1$,$1/p+1/q=1$。系统(4)的首次积分为

$$\frac{1}{p}|x|^p+\frac{1}{q}|y|^q=c,$$

这里c是任意一个非负常数。令$(\sin_p(t),\ \cos_p(t))$是系统(4)满足初始条件

$$(\sin_p(0),\ \cos_p(0))=(0,1)$$

的解。易知当t从0变到$2\pi_p$时,轨线$(\sin_p(t),\ \cos_p(t))$绕原点顺时针方向转动1周。

引理 1.1[2] $\sin_p(t)$和$\cos_p(t)$在$\mathbf{R}$上有定义且具有下列性质:

(1)$(1/p)|\sin_p(t)|^p+(1/q)|\cos_p(t)|^q=1/q$;

(2)$\sin_p'(t)=\phi_q(\cos_p(t)),\cos_p'(t)=-\phi_p(\sin_p(t))$;

(3)$\sin_p(t)$和$\cos_p(t)$都是$2\pi_p$-周期的;

(4)$\sin_p(t)$关于t是奇函数,$\cos_p(t)$关于t是偶函数;

(5)$\sin_p(t+\pi_p)=-\sin_p(t),\cos_p(t+\pi_p)=-\cos_p(t)$。

通常称函数$\sin_p(t)$和$\cos_p(t)$为p-正弦函数和p-余弦函数。

下面介绍本文将要用的一个连续性定理。考虑含有单参数$\lambda\in[0,1]$的方程族,

$$(\varphi_p(x'))'+g(x)=\lambda p(t),\tag{5}$$

这里$g:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$连续,$p:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$连续且是$T$-周期的。应用文献[14]中引理1的证明方法可证下面的连续性引理。

引理 1.2 假设存在常数$0<d_1<1,d_2>0$使得当$x\in(-1,-d_1]\cup[d_2,+\infty)$时,

$$\mathrm{sgn}(x)g(x)>\max\{|p(t)|:t\in[0,T]\};$$

并且存在常数$\mu\in[d_1,1)$,使得若$x(t)$是方程(5)的

任意T-周期解,则有

$$\min\{x(t):t\in[0,T]\}\neq-\mu。$$

则当$\lambda=1$时,方程(5)至少有一个T-周期解。

2　主要引理及证明

为方便使用相平面分析方法,作平移变换$x=1+u$将系统(1)的奇点$x=0$平移到-1。下面考虑方程

$$(\phi_p(x'))'+g(x)=p(t),\tag{6}$$

其中$g:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$连续且在点$x=-1$处满足奇异性条件,

$$(\mathrm{H}_1')\ \lim_{x\to-1^+}g(x)=-\infty,\lim_{x\to-1^+}G(x)=+\infty,$$

$$(G(x)=\int_0^x g(s)\mathrm{d}s)。$$

为了应用连续性引理1.2证明方程(6)周期解的存在性,下面把方程(6)嵌入到一个含单参数$\lambda\in[0,1]$的方程族,

$$(\phi_p(x'))'+g(x)=\lambda p(t)。\tag{7}$$

考虑方程(7)的等价平面系统

$$x'=\phi_q(y)\ ,y'=-g(x)+\lambda p(t),\tag{8}$$

其中q满足$1/p+1/q=1$。用

$$(x(t),y(t))=(x(t;x_0,y_0,\lambda),y(t;x_0,y_0,\lambda))$$

表示方程(8)满足初始条件

$$x(0;x_0,y_0,\lambda)=x_0,y(0;x_0,y_0,\lambda)=y_0$$

的解,其中$(x_0,y_0)\in D$, $D=\{(x,y):-1<x<+\infty,y\in\mathbf{R}\}$。

引理2.1　假设条件(H_1')和(H_2)成立,则方程(8)的每一个解$(x(t),y(t))$在整个t轴上有定义。

证明　由(H_1')和(H_2)可知存在常数$M>0$,使得

$$G(x)+M>0,\forall x\in(-1,+\infty)。$$

定义函数$V:D\to\mathbf{R}$,

$$V(x,y)=\frac{1}{q}|y|^q+G(x)+M,\forall(x,y)\in D。$$

易知$\lim\limits_{(x,y)\to\partial D}V(x,y)=+\infty$。令$V(t)=V(x(t),y(t))$,则有$V'(t)=\lambda\phi_q(y(t))p(t)$。若$|y(t)|\leqslant1$,则

$$V'(t)=\lambda\phi_q(y(t))p(t)\leqslant|\phi_q(y(t))|\ |p(t)|\leqslant L\leqslant L+V(t),\tag{9}$$

其中$L=\max\{|p(t)|:t\in\mathbf{R}\}$。若$|y(t)|>1$,则

$$V'(t)=\lambda\phi_q(y(t))p(t)\leqslant|\phi_q(y(t))||p(t)|\leqslant|y(t)|^qL=\frac{1}{q}|y(t)|^qqL\leqslant qL(\frac{1}{q}|y(t)|^q+G(x(t))+M)=qLV(t)。\tag{10}$$

由式(9)和(10)可得

$$V'(t)\leqslant\sigma V(t)+L,$$

其中$\sigma=\max\{qL,1\}$。因此,对任何正数τ,有

$$V(t)\leqslant V(0)\mathrm{e}^{\sigma\tau}+\frac{L}{\sigma}(\mathrm{e}^{\sigma\tau}-1),t\in[0,\tau)。$$

因此,解$(x(t),y(t))$在任意有限区间$[0,\tau)$上都不能到达区域D的边界,从而$(x(t),y(t))$在区间$[0,+\infty)$上有定义。同理可证$(x(t),y(t))$在区间$(-\infty,0]$上有定义。

为了刻画解$(x(t),y(t))$在相平面上的位置,引进函数$\xi:D\to\mathbf{R}$:

$$\xi(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{(1+x)^2}。$$

引理2.2　假设条件(H_1')和(H_2)成立,则对任意$r>0$,存在充分大的$R>0$,当$\xi(x(t_0),y(t_0))>R(t_0\in\mathbf{R})$时,有$\xi(x(t),y(t))>r,\forall t\in[t_0,t_0+T]$。

证明　沿用引理2.1的证明中定义的函数$V(x,y)$和记号。易知

$$\lim_{\xi(x,y)\to+\infty}V(x,y)=+\infty。\tag{11}$$

由于$V'(t)=\lambda\phi_q(y(t))p(t)$,故

$$V'(t)=\lambda\phi_q(y(t))p(t)\geqslant-L|y(t)|^{q-1}=-L|y(t)|^{\frac{q}{p}}。\tag{12}$$

又由

$$V(t)=\frac{1}{q}|y(t)|^q+G(x(t))+M>0,$$

可推得$|y(t)|^q<qV(t)$。从而

$$|y(t)|^{\frac{q}{p}}<(qV(t))^{\frac{1}{p}}<qV(t)^{\frac{1}{p}}。\tag{13}$$

结合式(12)和(13)可推出

$$V'(t)>-qLV(t)^{1/p}。\tag{14}$$

由式(14)可得

$$V(t)^{1/q}>V(t_0)^{1/q}-LT,t\in[t_0,t_0+T]。\tag{15}$$

对任意$r>0$,若$\xi(x,y)>r,\forall(x,y)\in D$,则结论自然成立。否则,记

$$m(r)=\max_{\xi(x,y)\leqslant r}V(x,y)。$$

由式(11)可知存在充分大的正数R,当$\xi(x,y)>R$时,有

$$V(x,y)>(m(r)^{1/q}+LT)^q。\tag{16}$$

因此,由式(15)、(16)可知当$\xi(x(t_0),y(t_0))>R$时,

$$V(x(t),y(t))^{1/q}=V(t)^{1/q}>V(t_0)^{1/q}-LT=$$
$$V(x(t_0),y(t_0))^{1/q}-LT>m(r)^{1/q},t\in[t_0,t_0+T]。$$

故有$V(x(t),y(t))>m(r),t\in[t_0,t_0+T]$。从而,

$$\xi(x(t),y(t))>r,t\in[t_0,t_0+T]。$$

由引理2.2可知,当$\xi(x_0,y_0)$充分大时,$x^2(t)+y^2(t)\neq 0,t\in[0,T]$。因此,可以取$p$-极坐标变换

$$x=\rho^{1/p}\sin_p(\theta),y=\rho^{1/q}\cos_p(\theta)。$$

在这个变换下,系统(8)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=p\rho\phi_p(\sin_p(\theta))\phi_q(\cos_p(\theta))\\ \qquad -q\rho^{1/p}(g(\rho^{1/p}\sin_p(\theta))-\lambda p(t))\phi_q(\cos_p(\theta)),\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\rho^{-1/q}(g(\rho^{1/p}\sin_p(\theta))-\\ \qquad \lambda p(t))\sin_p(\theta)。\end{cases}\tag{17}$$

用

$$(\rho(t),\theta(t))=(\rho(t;\rho_0,\theta_0,\lambda),\theta(t;\rho_0,\theta_0,\lambda))$$

表示方程(17)满足$\rho(0)=\rho_0,\theta(0)=\theta_0$的解。

引理2.3 假设条件(H_1')、(H_2)成立,则存在$R_0>0$,当$\xi(x_0,y_0)\geqslant R_0$时,

$$\theta'(t)>0,t\in[0,T]。$$

证明 由条件(H_1)、(H_2')可知,存在常数$c_1>0$,$0<c_2<1$,使得

$$g(x)-|p(t)|>0,x\in[c_1,+\infty),t\in[0,T],\tag{18}$$
$$g(x)-|p(t)|<0,x\in(-1,-c_2),t\in[0,T]。\tag{19}$$

因此,当$x(t)\geqslant c_1$或$-1<x(t)\leqslant -c_2$时,由式(17)的第2个方程可得

$$\theta'(t)=|\cos_p(\theta(t))|^q+(q/p)\rho(t)^{-1/q}\sin_p(\theta(t))\cdot$$
$$(g(\rho(t)^{1/p}\sin_p(\theta(t)))-\lambda p(t))>0。\tag{20}$$

另一方面,当$-c_2\leqslant x(t)\leqslant c_1$时,由于$g(x(t))$和$p(t)$都是有界的,并且当$\rho(t)$充分大时,$|\sin_p(\theta(t))|$充分小,故由引理1.1的第1个等式可知,存在正常数η,使得

$$|\cos_p(\theta(t))|^q\geqslant\eta。$$

由引理2.2知,当$\xi(x_0,y_0)$充分大时,$\xi(x(t),y(t))$$(t\in[0,T])$也充分大。此时,$\rho(t)$也充分大。因此,当$\xi(x_0,y_0)$充分大时,

$$\theta'(t)=|\cos_p(\theta(t))|^q+$$
$$(q/p)\rho(t)^{-1/q}\sin_p(\theta(t))(g(\rho(t)^{1/p}\sin_p(\theta(t)))-$$
$$\lambda p(t))>\frac{\eta}{2}。$$

结合式(20)可知存在$R_0>0$,当$\xi(x_0,y_0)\geqslant R_0$时,有$\theta'(t)>0,t\in[0,T]$。

引理2.4 假设条件(H_1')、(H_2)成立,则存在正常数$R_1>1$,使得对于系统(8)的任意T-周期解$(x(t),y(t))$,均有$\xi(x(t),y(t))<R_1,\forall t\in[0,T]$。

证明 采用反证法。假设系统(8)存在一个T-周期解序列$\{(x_n(t),y_n(t))\}$(对应的参数$\lambda=\lambda_n\in[0,1]$)满足当$n\to\infty$时,

$$\max\xi(x_n(t),y_n(t))\to+\infty。$$

由引理2.2可知$\lim\limits_{n\to\infty}\xi(x_n(t),y_n(t))=+\infty$在$[0,T]$上一致成立。令$(x_n(t),y_n(t))$的$p$-极坐标表达式为$(\rho_n(t),\theta_n(t))$。根据引理2.3,当$n$充分大时,有

$$\theta_n'(t)>0,t\in[0,T]。$$

因此,系统(17)的解$(\rho_n(t),\theta_n(t))$在时间$[0,T]$内绕原点顺时针方向旋转了整数圈,记为k_n。易知

$$k_n=\frac{\theta_n(T)-\theta_n(0)}{2\pi_p}\geqslant 1。$$

从而存在

$$0\leqslant t_n^1<T,0\leqslant t_n^1<t_n^2<\cdots<t_n^{2k_n}<t_n^{2k_n+1}=t_n^1+T,$$

使得

$$x_n(t_n^i)=0,i=1,2,\cdots,2k_n+1,$$

和

$$x_n(t)>0,t\in(t_n^i,t_n^{i+1}),i=1,3,\cdots,2k_n-1,$$
$$x_n(t)<0,t\in(t_n^i,t_n^{i+1}),i=2,4,\cdots,2k_n。$$

下面分别估计$t_n^{i+1}-t_n^i$,$i=1,2,\cdots,2k_n$。令$\tau_i\in(t_n^i,t_n^{i+1})$使得

$$y_n(\tau_n^i)=0,i=1,2,\cdots,2k_n。$$

(1)估计$t_n^{2i}-t_n^{2i-1},i=1,2,\cdots,k_n$。由条件$(H_2)$可知,存在正常数$a$、$\alpha$、$\beta$使得当$x\geqslant a$时,

$$\frac{\mu_k}{2^p}<\alpha\leqslant\frac{g(x)}{\phi_p(x)}\leqslant\beta<\frac{\mu_{k+1}}{2^p}。\tag{21}$$

因此,存在正常数c_1、c_2使得当$x\geqslant 0$时,有

$$\alpha\phi_p(x)-c_1\leqslant g(x)\leqslant\beta\phi_p(x)+c_2。\tag{22}$$

由引理2.3可知当n充分大时,

$$\frac{\mathrm{d}\theta_n(t)}{\mathrm{d}t}=|\cos_p(\theta_n(t))|^q+$$
$$(q/p)\rho(t)^{-1/q}\sin_p(\theta_n(t))(g(\rho_n(t)^{1/p}\sin_p(\theta_n(t)))-$$
$$\lambda_n p(t))>0,t\in\mathbf{R}。$$

为简单起见,往下用$(\rho(t),\theta(t))$代替$(\rho_n(t),\theta_n(t))$。

由于$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}>0, t\in\mathbf{R}$,故$\theta=\theta(t)$存在反函数$t=t(\theta)$,　　因此,

$$\tau_n^1-t_n^1=\int_{\theta(t_n^1)}^{\theta(\tau_n^1)}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\rho^{-1/q}\sin_p(\theta)(g(\rho^{1/p}\sin_p(\theta))-\lambda_n p(t))},$$

和

$$t_n^2-\tau_n^1=\int_{\theta(\tau_n^1)}^{\theta(t_n^2)}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\rho^{-1/q}\sin_p(\theta)(g(\rho^{1/p}\sin_p(\theta))-\lambda_n p(t))}。$$

不失一般性,令$0\leqslant\theta(0)<2\pi_p$。则存在非负整数$m$,使得

$$\theta(t_n^1)=2m\pi_p,\ \theta(\tau_n^1)=2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2},\ \theta(t_n^2)=2m\pi_p+\pi_p。$$

由式(22)可知当$\sin_p(\theta)\geqslant 0$时,

$$\alpha|\sin_p(\theta)|^p-c_1\rho^{-1/q}\sin_p(\theta)\leqslant\rho^{-1/q}\sin_p(\theta)g(\rho^{1/p}\sin_p(\theta))\leqslant\beta|\sin_p(\theta)|^p+c_2\rho^{-1/q}\sin_p(\theta),$$

因此,

$$\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\beta|\sin_p(\theta)|^p+(q/p)(c_2-\lambda_n p(t))\rho^{-1/q}\sin_p(\theta)}\leqslant$$

$$\tau_n^1-t_n^1\leqslant\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\alpha|\sin_p(\theta)|^p-(q/p)(c_1+\lambda_n p(t))\rho^{-1/q}\sin_p(\theta)}。$$

由于$\sin_p(\theta),\cos_p(\theta)$均为连续的周期函数,故存在正常数$A$,使得

$$|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\beta|\sin_p(\theta)|^p\geqslant A,\forall\theta\in\mathbf{R}。$$

因此,当$\rho(t)\to+\infty$时,有

$$\frac{1}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\beta|\sin_p(\theta)|^p+(q/p)(c_2-\lambda_n p(t))\rho^{-1/q}\sin_p(\theta)}=$$

$$\frac{1}{(|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\beta|\sin_p(\theta)|^p)\left(1+\frac{(q/p)(c_2-\lambda_n p(t))\sin_p(\theta)}{(|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\beta|\sin_p(\theta)|^p)\rho^{1/q}}\right)}=$$

$$\frac{1}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\beta|\sin_p(\theta)|^p}+o(1)。$$

故有

$$\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\beta|\sin_p(\theta)|^p+(q/p)(c_2-\lambda_n p(t))\rho^{-1/q}\sin_p(\theta)}=$$

$$\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\beta|\sin_p(\theta)|^p}+o(1),$$

这里$o(1)$表示$\rho(t)\to+\infty$时的一个无穷小量,下同。　　同理,

$$\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\alpha|\sin_p(\theta)|^p-(q/p)(c_1+\lambda_n p(t))\rho^{-1/q}\sin_p(\theta)}=$$

$$\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\alpha|\sin_p(\theta)|^p}+o(1)。$$

因此,

$$\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\beta|\sin_p(\theta)|^p}+o(1)\leqslant\tau_n^1-t_n^1\leqslant\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\alpha|\sin_p(\theta)|^p}+o(1)。$$

积分可得

$$\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q\beta/p)|\sin_p(\theta)|^p}=\int_0^{\frac{\pi_p}{2}}\frac{(\cos_p(\theta))^{-q}\mathrm{d}\theta}{1+(\beta q/p)(\sin_p(\theta)/((\cos_p(\theta))^{q/p}))^p}=$$

$$\int_0^{\frac{\pi_p}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin_p(\theta)/(\cos_p(\theta))^{q/p})}{1+(\beta q/p)(\sin_p(\theta)/((\cos_p(\theta))^{q/p})^p} =$$

$$(\beta q/p)^{-1/p}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\frac{\pi_p}{2\beta^{1/p}}。$$

以及

$$\int_{2m\pi_p}^{2m\pi_p+\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\cos_p(\theta)|^q+(q/p)\alpha|\sin_p(\theta)|^p}=\frac{\pi_p}{2\alpha^{1/p}}。$$

于是,

$$\pi_p/(2\beta^{1/p})+o(1)\leqslant\tau_n^1-t_n^1\leqslant\pi_p/(2\alpha^{1/p})+o(1)。\tag{23}$$

类似可得

$$\pi_p/(2\beta^{1/p})+o(1)\leqslant t_n^2-\tau_n^1\leqslant\pi_p/(2\alpha^{1/p})+o(1)。\tag{24}$$

结合式(23)和(24)得到

$$\pi_p/\beta^{1/p}+o(1)\leqslant t_n^2-t_n^1\leqslant\pi_p/\alpha^{1/p}+o(1)。\tag{25}$$

同理可证,当$i=2,\cdots,k_n$时,有

$$\pi_p/\beta^{1/p}+o(1)\leqslant t_n^{2i}-t_n^{2i-1}\leqslant\pi_p/\alpha^{1/p}+o(1)。\tag{26}$$

(2)估计$t_n^{2i+1}-t_n^{2i}$, $i=1,2,\cdots,k_n$。取常数$L>0$,使得$|p(t)|\leqslant L$, $t\in\mathbf{R}$。定义

$$W(x,y)=\frac{1}{q}|y|^q+G(x)+Lx。$$

令

$$W_n(t)=W(x_n(t),y_n(t))=$$

$$\frac{1}{q}|y_n(t)|^q+G(x_n(t))+Lx_n(t)。$$

由于当$t\in[t_n^2,\tau_n^2]$时,$y_n(t)\leqslant 0$, 故

$$W_n'(t)=\lambda_n\phi_q(y_n(t))p(t)+L\phi_q(y_n(t))=$$

$$\phi_q(y_n(t))(\lambda_n p(t)+L)\leqslant 0,\forall t\in[t_n^2,\tau_n^2]。$$

这说明$W_n(t)$在区间$[t_n^2,\tau_n^2]$上单调递减。为简单起见,下面用$(x(t),y(t))$代替$(x_n(t),y_n(t))$。因此,对于$t\in[t_n^2,\tau_n^2]$,有

$$\frac{1}{q}|y(t)|^q+G(x(t))+Lx(t)\geqslant\frac{1}{q}|y(\tau_n^2)|^q+$$

$$G(x(\tau_n^2))+Lx(\tau_n^2)。$$

即

$$|y(t)|^q=(-y(t))^q\geqslant$$

$$q(G(x(\tau_n^2))-G(x(t))+L(x(\tau_n^2)-x(t)))。$$

故

$$-x'(t)=-\phi_q(y)\geqslant$$

$$(q(G(x(\tau_n^2))-G(x(t))+L(x(\tau_n^2)-x(t)))^{1/p}。$$

因此,

$$-\frac{x'(t)}{(q(G(x(\tau_n^2))-G(x(t))+L(x(\tau_n^2)-x(t)))^{1/p}}\geqslant 1。\tag{27}$$

对式(27)两边从t_n^2到τ_n^2积分可得

$$-\int_{t_n^2}^{\tau_n^2}\frac{x'(t)}{(q(G(x(\tau_n^2))-G(x(t))+L(x(\tau_n^2)-x(t)))^{1/p}}\mathrm{d}t\geqslant\tau_n^2-t_n^2。$$

即

$$\tau_n^2-t_n^2\leqslant\int_s^0\frac{\mathrm{d}x}{(q(G(s)-G(x)+L(s-x)))^{1/p}},$$

其中$s=x(\tau_n^2)$。由$\lim\limits_{n\to\infty}\xi(x_n(t),y_n(t))=+\infty$可推出$\lim\limits_{n\to\infty}x(\tau_n^2)=-1$。

断言 $\lim\limits_{s\to-1^+}\int_s^0\frac{\mathrm{d}x}{(q(G(s)-G(x)+L(s-x)))^{1/p}}=0$。

证明 取足够小的常数$0<\eta<1$。记

$$\int_s^0\frac{\mathrm{d}x}{(q(G(s)-G(x)+L(s-x)))^{1/p}}=$$

$$\int_s^{s+\eta}\frac{\mathrm{d}x}{(q(G(s)-G(x)+L(s-x)))^{1/p}}+$$

$$\int_{s+\eta}^0\frac{\mathrm{d}x}{(q(G(s)-G(x)+L(s-x)))^{1/p}}=:I_1+I_2。$$

如果$x\in(s,s+\eta)$,则

$$G(s)-G(x)=\int_x^s g(u)\mathrm{d}u=g(\zeta)(s-x)=$$

$$-g(\zeta)(x-s),$$

其中$\zeta\in(s,x)\subset(s,s+\eta)$。定义

$$\mu(s,\eta)=\inf\{-g(x)|x\in(s,s+\eta)\}。$$

显然,当$|1+s|$, η充分小时,有$G(s)-G(x)\geqslant\mu(s,\eta)(x-s)$。另外,当$s\to-1^+$, $\eta\to0^+$时,$\mu(s,\eta)\to+\infty$。因此

$$I_1\leqslant\int_s^{s+\eta}\frac{\mathrm{d}x}{(q(\mu(s,\eta)(x-s)-L(x-s)))^{1/p}}=$$

$$\frac{q^{1/q}\eta^{1/q}}{(\mu(s,\eta)-L)^{1/p}}。$$

这意味着当$s\to-1^+$, $\eta\to0^+$时,$I_1\to0$。为了估计I_2,注意到由(H_1')可知

$$\lim_{s\to-1^+}(G(s)-G(x))=+\infty。$$

对于$x\in(-1+\eta,0)$一致成立。因此,

$$\lim_{s\to-1^+}(G(s)-G(x)+L(s-x))=+\infty。\tag{28}$$

对于$x\in(-1+\eta,0)$一致成立。由式(28)可以推出对于充分小的$0<\eta<1$,当$s\to-1^+$时,$I_2\to0$。因此,当$n\to+\infty$时,有

$$\tau_n^2-t_n^2=o(1)。\tag{29}$$

对于$t_n^3 - \tau_n^2$，定义

$$\widetilde{W}(x,y) = \frac{1}{q}|y|^q + G(x) - Lx。$$

类似可证当$n \to +\infty$时，

$$t_n^3 - \tau_n^2 = o(1)。 \tag{30}$$

结合式(29)和(30)可知，当$n \to +\infty$时，有

$$t_n^3 - t_n^2 = o(1)。 \tag{31}$$

同理可证，当$n \to +\infty$时，有

$$t_n^{2i+1} - t_n^{2i} = o(1), i = 2, \cdots, k_n。 \tag{32}$$

将式(25)、(26)、(31)和(32)相加可得

$$\frac{k_n\pi_p}{\beta^{1/p}} + o(1) \leqslant T =$$

$$\sum_{i=1}^{k_n}(t_n^{2i} - t_n^{2i-1}) + \sum_{i=1}^{k_n}(t^{2i+1} - t^{2i}) \leqslant \frac{k_n\pi_p}{\alpha^{1/p}} + o(1)。$$

由于$\alpha > \frac{\mu_k}{2^p}, \beta < \frac{\mu_{k+1}}{2^p}$，故

$$\frac{\pi_p}{\alpha^{1/p}} < \frac{T}{k}, \frac{\pi_p}{\beta^{1/p}} > \frac{T}{1+k}。$$

从而，当n充分大时，有

$$\frac{T}{1+k} < \frac{T}{k_n} < \frac{T}{k}。$$

于是，$k < k_n < 1 + k$。这与k_n是正整数相矛盾。因此，存在正常数$R_1 > 1$，使得系统(8)的任意T-周期解$(x(t), y(t))$均满足$\xi(x(t), y(t)) < R_1$，$\forall t \in [0, T]$。

3　定理0.1的证明

下面利用连续性引理1.2证明方程(6)周期解的存在性。

定理3.1　假设条件(H_1')和(H_2)成立，则方程(6)至少有1个T-周期解。

证明　由条件(H_2)可以推得$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$。结合$(H_1')$可知存在常数$0 < d_1 < 1$，$d_2 > 0$，使得当$x \in (-1, -d_1] \cup [d_2, +\infty)$时，

$$\operatorname{sgn}(x)g(x) > \max\{|p(t)|: t \in [0, T]\}。$$

根据引理2.4，方程(8)的任意T-周期解$(x(t), y(t))$均满足

$$-1 + \frac{1}{\sqrt{R_1}} < x(t) < R_1,$$

$$|y(t)| < R_1, \forall t \in [0, T],$$

其中$R_1 > 1$是引理2.4中确定的常数。因此，方程(7)的任意T-周期解$x(t)$都满足

$$-1 + \frac{1}{\sqrt{R_1}} < x(t), \forall t \in [0, T]。 \tag{33}$$

令$\mu = \max\left\{d_1, 1 - \frac{1}{\sqrt{R_1}}\right\}$。则

$$d_1 \leqslant \mu < 1, 1 - \frac{1}{\sqrt{R_1}} \leqslant \mu < 1。$$

由式(33)可知，对于方程(7)的任意T-周期解$x(t)$都满足$\min\{x(t): t \in [0, T]\} \neq -\mu$。根据引理1.2，方程(6)至少存在一个$T$-周期解。

定理0.1的证明　首先对方程(1)作平移变换$x = 1 + u$可得

$$u'' + g(1 + u) = p(t)。$$

为方便起见，考虑方程

$$x'' + \tilde{g}(x) = p(t), \tag{34}$$

其中$\tilde{g}(x) = g(1 + x)$。易知当函数$g(x)$在点$x = 0$具有奇异性，且条件(H_1)和(H_2)成立时，$\tilde{g}(x)$在$x = -1$具有奇异性，且满足条件(H_1')和(H_2)。故由定理3.1可知方程(34)至少存在一个T-周期解，从而方程(1)至少存在一个T-周期解。

4　结束语

本文研究了具有奇异性p-Laplace方程$(\phi_p(x'))' + g(x) = p(t)$周期解的存在性。当$g$满足单边非共振条件时，应用连续性引理证明了方程至少存在一个周期解。当g满足单边共振条件时，该方程周期解的存在性问题有待进一步研究。

参 考 文 献

[1] PINO M D, MANÁSEVICH R, MUŕUA A. Existence and multiplicity of solutions with prescribed period for a second order quasilinear O. D. E.[J]. Nonlinear Analysis, 1992, 18(1): 79-92.

[2] LIU B. Multiplicity results for periodic solutions of a second order quasilinear ODE with asymmetric nonlinearities[J]. Nonlinear Analysis, 1998, 33(2): 139-160.

[3] LIU W, LI Y. Existence of periodic solutions for p-Laplacian equation under the frame of Fučik spectrum[J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2011, 27(3): 545-554.

(下转第130页)