DOI:10.19789/j.1004-9398.2024.01.008
文献引用:曹彧晗,酒全森,尚璐瑶,等.定常Burgers方程的周期解[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,45(1):60-67. CAO Y H,JIU Q S,SHANG L Y,et al. Periodic solutions to the steady viscous Burgers equation[J].Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2024,45(1):60-67.

定常Burgers方程的周期解*

曹彧晗[1]，酒全森[1**]，尚璐瑶[1]，张一弘[2]

(1.首都师范大学数学科学学院，北京　100048；2.九州大学大学院数理学府，福冈　819-0395)

摘要:本文首先对Burgers方程的周期解关于粘性系数ε作幂级数展开,得到逼近函数之间的递推关系。然后,通过对逼近函数作Fourier级数展开,给出了逼近函数Fourier展开的通项形式,并证明了每个逼近函数的Fourier级数是一致且绝对收敛的。

关键词:Burgers方程;周期解;Fourier级数
中图分类号:O175.2　　**文献标识码**:A

Periodic solutions to the steady viscous Burgers equation*

CAO Yuhan[1]，JIU Quansen[1**]，SHANG Luyao[1]，ZHANG Yihong[2]

(1. School of Mathematical Sciences，Capital Normal University，Beijing　100048；2. Graduate School of Mathematics，Kyushu University，Fukuoka　819-0395)

Abstract: In this paper, the periodic solutions of the Burgers equation are expanded in a power series with respect to the viscosity coefficient ε which gives a recurrence relation among the approximate functions. Then, the general form of the Fourier expansions for the approximate functions are given by induction, and it is proved that the Fourier series of each approximate function is uniformly and absolutely convergent.

Keywords: Burgers equation; periodic solutions; Fourier series
CLC: O175.2　　**DC**: A

0　引　言

Burgers方程是一类非线性方程。在1948年,Burgers[1]发现该方程可用于描述流体力学中湍流的行为。由于Burgers方程保留了Navier-Stokes方程的流体混合特性,人们将其视为Navier-Stokes方程的一个简化逼近模型[2]。并且,Burgers方程与去掉压力项的Navier-Stokes方程非常相似,因此这个方程可以作为一维情形的简化模型。

一维粘性Burgers方程可写为

$$u_t + uu_x - \varepsilon u_{xx} = f(x,t),$$

其中$u = u(x,t)$是未知函数,$\varepsilon > 0$表示粘性系数,f是给定的关于x,t的函数。Burgers方程是一个双曲-抛物型方程,也表征了一个非线性的耗散系统,被用作描述许多物理现象的简化模型。例如,被广泛地作为用来模拟湍流、边界层行为[3-4]、冲击波形

收稿日期:2023-11-24
* 国家大学生创新创业训练计划项目
** 通信作者:jiuqs@cnu.edu.cn

成[5-6]、对流占优扩散现象[7],以及迷雾中的音波衰减和连续交通流的数学模型。对该方程的研究已有大量的结果,并且已经吸引了很多人的关注[8-9]。

本文考虑定常Burgers方程

$$uu_x - \varepsilon u_{xx} = f(x), \tag{1}$$

式中:$u = u(x)$是未知函数,$\varepsilon > 0$表示粘性系数,f是给定的关于x的函数。设方程(1)在$[-\pi,\pi]$上有周期解:

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\varepsilon \cos kx + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^\varepsilon \sin kx,$$
$$x \in [-\pi,\pi]。$$

本文的目标是对给定的$f(x)$,求解$u^\varepsilon(x)$,使得$u^\varepsilon(x)$关于ε有一致界,即存在$M > 0$,使得

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} \left| u^\varepsilon(x) \right| \leqslant M。$$

为此,对$u^\varepsilon(x)$关于ε作幂级数展开

$$u^\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \cdots + \varepsilon^n u_n(x) + \cdots 。\tag{2}$$

取$u_0(x)=\cos x+2$,取外力满足$f(x)=u_0(x)u_{0x}(x)=-\sin x\cos x-2\sin x$。接着,本文计算逼近函数的前2项$u_1$和$u_2$。考察其奇偶性,判断$u_1$为奇函数,$u_2$为偶函数。对$u_1$和$u_2$进行Fourier展开,通过对三角函数的精细处理,比较等式两边的系数得到u_1的Fourier系数之间的递推关系,进而得到了u_1的收敛的Fourier级数。

在进行与u_1类似的计算后,依然可以得到u_2的Fourier系数的关系,但关系式较为复杂,直接确定稍显困难。本文通过对关系式做迭代,得到u_2的Fourier级数。

在u_3的计算中,等式两边的系数更为复杂,本文忽略了具体的计算,将逼近函数用形式表达式表示出来,此法也方便了后续的计算以及估值。通过计算任意2项逼近函数之积u_pu_q中每一项的系数所具有的形式,进而根据逼近函数之间的递推关系通过数学归纳法得到逼近函数u_m的一般形式,并且逼近函数的Fourier级数是一致且绝对收敛的。此外,本文对$u_m(m=1,2)$进行扰动分析。事实上,若给Fourier系数的首项一个任意小的扰动,可以证明扰动后的Fourier系数组成的级数将不再收敛。

本文结构如下:第1节给出逼近函数的递推关系;第2节给出逼近函数$u_i(i=1,2,3)$的计算;第3节通过数学归纳法给出一般情形的计算;最后给出小结。

1　逼近函数及其递推关系

形式上,对式(2)两边关于x求导,得

$$u_x^\varepsilon(x) = u_{0x}(x) + \varepsilon u_{1x}(x) + \cdots + \varepsilon^n u_{nx}(x) + \cdots,$$
$$u_{xx}^\varepsilon(x) = u_{0xx}(x) + \varepsilon u_{1xx}(x) + \cdots + \varepsilon^n u_{nxx}(x) + \cdots。$$

代入方程(1)可得

$$\varepsilon\left[u_0(x)u_{1x}(x) + u_1(x)u_{0x}(x) - u_{0xx}(x)\right] +$$
$$\varepsilon^2\left[u_0(x)u_{2x}(x)+u_1(x)u_{1x}(x)+u_2(x)u_{0x}(x)-u_{1xx}(x)\right]+\cdots$$
$$+\varepsilon^k\left[u_0(x)u_{kx}(x) + u_1(x)u_{(k-1)x}(x) + \cdots +$$
$$u_{k-1}(x)u_{1x}(x) + u_k(x)u_{0x}(x) - u_{(k-1)xx}(x)\right] + \cdots = 0。\tag{3}$$

根据式(3)中关于ε的次幂有

$$\begin{cases} u_0(x)u_{1x}(x) + u_1(x)u_{0x}(x) - u_{0xx}(x) = 0, \\ u_0(x)u_{2x}(x) + u_1(x)u_{1x}(x) + u_2(x)u_{0x}(x) - \\ \qquad u_{1xx}(x) = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ u_0(x)u_{kx}(x) + u_1(x)u_{(k-1)x}(x) + \cdots + \\ \qquad u_{k-1}(x)u_{1x}(x) + u_k(x)u_{0x}(x) - \\ \qquad u_{(k-1)xx}(x) = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \end{cases}$$

对每一个式子进行积分可得(注意积分的时候,常数项取0即可),

$$\begin{cases} u_0(x)u_1(x) = u_0'(x), \\ u_0(x)u_2(x) = u_1'(x) - \dfrac{1}{2}u_1^2(x), \\ \qquad \cdots\cdots \\ u_0(x)u_{2k}(x) = u_{2k-1}'(x) - [u_1(x)u_{2k-1}(x) + \\ \qquad u_2(x)u_{2k-2}(x) + \cdots + \\ \qquad u_{k-1}(x)u_{k+1}(x) + \dfrac{1}{2}u_k^2(x)], \\ u_0(x)u_{2k+1}(x) = u_{2k}'(x) - [u_1(x)u_{2k}(x) + \\ \qquad u_2(x)u_{2k-1}(x) + \cdots + \\ \qquad u_k(x)u_{k+1}(x)], \\ \qquad \cdots\cdots \end{cases}$$

也就是说,对任意的正整数i、j、k有

$$u_0(x)u_k(x) = u_{k-1}'(x) - \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} u_i(x)u_j(x)。\tag{4}$$

容易得到,若$u_0(x)$为偶函数,则对任意的正整数k,$u_{2k+1}(x)$为奇函数,$u_{2k}(x)$为偶函数。

2　$u_i(x)(i=1,2,3)$的计算

令$u_0(x)=\cos x+2$,则$u_0'(x)=-\sin x$,$f(x)=$

$-\sin x\cos x-2\sin x$。本节给出$u_i(x)(i=1,2,3)$的表达式。

2.1 u_1的计算

注意到$u_1(x)$是一个奇函数,对$u_1(x)$做Fourier展开:

$$u_1(x)=b_{1,1}\sin x+b_{1,2}\sin 2x+\cdots+b_{1,n}\sin nx+\cdots,$$

即

$$(\cos x+2)(b_{1,1}\sin x+b_{1,2}\sin 2x+\cdots+b_{1,n}\sin nx+\cdots)=-\sin x。\tag{5}$$

由积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}。$$

比较式(5)两端的系数可得

$$\begin{cases}2b_{1,1}+\dfrac{1}{2}b_{1,2}=-1,\\ \dfrac{1}{2}b_{1,1}+2b_{1,2}+\dfrac{1}{2}b_{1,3}=0,\\ \dfrac{1}{2}b_{1,2}+2b_{1,3}+\dfrac{1}{2}b_{1,4}=0,\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{1}{2}b_{1,n-1}+2b_{1,n}+\dfrac{1}{2}b_{1,n+1}=0,\\ \cdots\cdots\end{cases}\tag{6}$$

即对正整数$n\geqslant 2$有

$$b_{1,n+1}+4b_{1,n}+b_{1,n-1}=0。\tag{7}$$

对式(7)的通项作分解得

$$b_{1,n+1}-[(-2+\sqrt{3})+(-2-\sqrt{3})]b_{1,n}+[(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})]b_{1,n-1}=0。$$

令$t=-2+\sqrt{3}$,$q=-2-\sqrt{3}$,并对上式进行移项,整理得

$$b_{1,n+1}-tb_{1,n}=q[b_{1,n}-tb_{1,n-1}],n\geqslant 2。$$

令

$$b_{1,2}-tb_{1,1}=0,\tag{8}$$

并与式(6)的第一式联立可解出$b_{1,1}=2t,b_{1,n}=2t^n,n=2,3,\cdots$。

于是有$u_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2t^n\sin nx$且该级数在$[-\pi,\pi]$上绝对且一致收敛。

下面对$u_1(x)$进行扰动分析。若式(8)不成立,即令$b_{1,1}=2t+\varepsilon(\varepsilon\neq 0)$,设扰动项$\widetilde{b}_{1,1}=\varepsilon$,则由式(6)的第1式可知$\widetilde{b}_{1,2}=-4\varepsilon$。从而扰动项满足方程组

$$\begin{cases}\widetilde{b}_{1,n+1}+4\widetilde{b}_{1,n}+\widetilde{b}_{1,n-1}=0,\\ \widetilde{b}_{1,1}=\varepsilon,\widetilde{b}_{1,2}=-4\varepsilon。\end{cases}$$

解上述方程组得

$$\begin{cases}\widetilde{b}_{1,n+1}-t\widetilde{b}_{1,n}=-q^{n-1}(4+t)\varepsilon,\\ \widetilde{b}_{1,n+1}-q\widetilde{b}_{1,n}=-t^{n-1}(4+q)\varepsilon。\end{cases}$$

解得$\widetilde{b}_{1,n}=\dfrac{t^n-q^n}{2\sqrt{3}}\varepsilon,n=2,3,\cdots$。

注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{2\sqrt{3}}$是收敛的,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{q^n}{2\sqrt{3}}$是发散的,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{b}_{1,n}$是发散的。由$b_{1,n}=2t^n+\widetilde{b}_{1,n}$知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{1,n}$是发散的。也就是说,式(8)成立是能使$u_1(x)$的Fourier级数收敛的唯一选择,而$u_1(x)$的Fourier级数在$[-\pi,\pi]$上的绝对和一致收敛性为接下来的讨论提供了方便。

2.2 u_2的计算

由方程(4)得到$k=2$的情况为

$$u_0u_2=u_1'-\frac{1}{2}u_1^2。\tag{9}$$

对u_2作Fourier展开:

$$u_2(x)=\frac{a_{2,0}}{2}+a_{2,1}\cos x+a_{2,2}\cos 2x+\cdots+a_{2,n}\cos nx+\cdots,\tag{10}$$

代入方程(9)得

$$(\cos x+2)\left(\frac{a_{2,0}}{2}+a_{2,1}\cos x+a_{2,2}\cos 2x+\cdots+a_{2,n}\cos nx+\cdots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_{1,n}\cos nx-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}2t^n\sin nx\right)^2。\tag{11}$$

下面分别讨论式(11)等号两侧的常数项及$\cos nx$的系数。

式(11)等号左侧的系数满足:

(1)常数项为$a_{2,0}+\dfrac{a_{2,1}}{2}$;

(2)$\cos x$的系数为$\dfrac{a_{2,0}}{2}+2a_{2,1}+\dfrac{a_{2,2}}{2}$;

(3)$\cos nx$的系数为$2a_{2,n}+\dfrac{a_{2,n-1}+a_{2,n+1}}{2}$,其中$n\geqslant 2$。

式(11)等号右侧的系数满足:

(1)常数项为$-\frac{t^2}{1-t^2}$;

(2)$\cos nx$的系数为$t^n(-\frac{2t^2}{1-t^2}+3n-1)$,其中$n\geqslant 1$。

令$A_{2,n}=2t^n(-\frac{2t^2}{1-t^2}+3n-1)$,则由式(11)得到

$$\begin{cases}2a_{2,0}+a_{2,1}=-\dfrac{2t^2}{1-t^2},\\ a_{2,n-1}+4a_{2,n}+a_{2,n+1}=A_{2,n},n\geqslant 1。\end{cases}\tag{12}$$

引入$d_{2,n}$,当$n\geqslant 1$时满足

$$\begin{cases}a_{2,n+1}-ta_{2,n}-d_{2,n}=q(a_{2,n}-ta_{2,n-1}-d_{2,n-1}),\\ d_{2,n}-qd_{2,n-1}=A_{2,n}。\end{cases}\tag{13}$$

对式(13)作迭代,有

$$d_{2,n}=q^n\left(d_{2,0}+\frac{A_{2,1}}{q}+\cdots+\frac{A_{2,n}}{q^n}\right),\tag{14}$$

令

$$d_{2,0}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{2,k}}{q^k},\tag{15}$$

有

$$d_{2,n}=q^n\left(\frac{-A_{2,n+1}}{q^{n+1}}+\frac{-A_{2,n+2}}{q^{n+2}}+\cdots\right)=$$

$$\frac{-A_{2,n+1}}{q}+\frac{-A_{2,n+2}}{q^2}+\cdots+\frac{-A_{2,n+k}}{q^k}+\cdots=$$

$$t^{n+1}\left(\sqrt{3}\,n+\frac{3\sqrt{3}+2}{6}\right)。\tag{16}$$

联立方程组

$$\begin{cases}2a_{2,0}+a_{2,1}=-\dfrac{2t^2}{1-t^2},\\ a_{2,1}-ta_{2,0}=d_{2,0}。\end{cases}\tag{17}$$

解得$a_{2,0}=\frac{\sqrt{3}}{18}$。

由$a_{2,n}=ta_{2,n-1}+d_{2,n-1},n\geqslant 1$迭代得

$$a_{2,n}=ta_{2,n-1}+d_{2,n-1}=$$

$$t^na_{2,0}+t^{n-1}d_{2,0}+\cdots+d_{2,n-1}=$$

$$t^na_{2,0}+t^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n^2+\frac{n}{3}\right)=$$

$$t^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n^2+\frac{n}{3}+\frac{\sqrt{3}}{18}\right),n\geqslant 0。\tag{18}$$

易证$\sum_{n=0}^{\infty}a_{2,n}\cos nx$在$[-\pi,\pi]$上绝对且一致收敛。

下面对$u_2(x)$进行扰动分析:若式(15)不成立,即令$d_{2,0}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{2,k}}{q^k}+\varepsilon(\varepsilon\neq 0)$,设扰动项$\tilde{d}_{2,0}=\varepsilon$,在方程组(12)第1式中,取$n=1$,与方程组(13)中第1式联立,得方程组

$$\begin{aligned}&2\tilde{a}_{2,0}+\tilde{a}_{2,1}=0,\\ &\tilde{a}_{2,1}-t\tilde{a}_{2,0}=\tilde{d}_{2,0}。\end{aligned}\tag{19}$$

解上述方程组得

$$\begin{cases}\tilde{a}_{2,0}=-\dfrac{\varepsilon}{2+t},\\ \tilde{a}_{2,1}=\dfrac{2\varepsilon}{2+t}。\end{cases}\tag{20}$$

再由式(13)对$\tilde{d}_{2,n}$进行迭代得

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{2,0}&=\varepsilon,\\ \tilde{d}_{2,1}&=q\varepsilon,\\ \tilde{d}_{2,2}&=q^2\varepsilon,\\ &\cdots\cdots\\ \tilde{d}_{2,n}&=q^n\varepsilon。\end{aligned}$$

由$a_{2,n}=ta_{2,n-1}+d_{2,n-1},n\geqslant 1$迭代得

$$\tilde{a}_{2,n}=\frac{2t^{n-1}}{2+t}\varepsilon+qt^{n-2}\varepsilon+q^2t^{n-3}\varepsilon+\cdots+q^{n-2}t\varepsilon+q^{n-1}\varepsilon。$$

即$\tilde{a}_{2,n}=q\frac{q^{n-1}-t^{n-1}}{q-t}\varepsilon+\frac{2t^{n-1}}{2+t}\varepsilon$。

注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2\sqrt{3}}$是收敛的,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{2\sqrt{3}}$是发散的,故$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{2,n}$是发散的。即式(15)是能使$u_2(x)$的Fourier级数收敛的唯一选择。

2.3 u_3的计算

由方程(4)得到$k=3$的情况

$$u_0u_3=u_2'-u_1u_2。\tag{21}$$

由于u_{2k-1}是奇函数,因此可以设

$$u_3=\sum_{n=1}^{\infty}b_{3,n}\sin nx。\tag{22}$$

为方便计算,以及考察$\sum_{n=1}^{\infty}b_{3,n}\sin nx$的收敛性问题,将$u_1$及$u_2$形式化,根据前面的结论,设

$$u_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t^nC_{1,0}\sin nx,$$

$$u_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(C_{2,2}n^2+C_{2,1}n+C_{2,0}\right)\cos nx。$$

将上述u_1、u_2以及式(22),$u_0=\cos x+2$代入式(21)

可得

$$\left(\cos x+2\right)\left(b_{3,1}\sin x+b_{3,2}\sin 2x+b_{3,3}\sin 3x+\cdots\right)=$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(C_{2,2}n^3+C_{2,1}n^2+C_{2,0}n\right)\sin nx-$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^nC_{1,0}\sin nx\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(C_{2,2}n^2+C_{2,1}n+C_{2,0}\right)\cos nx\right]。\tag{23}$$

下面用比较系数法确定式(23)左右两边系数关系。通过积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},\tag{24}$$

得到式(23)等号左侧部分系数满足:

(1) $\sin x$的系数为$2b_{3,1}+\dfrac{b_{3,2}}{2}$;

(2) $\sin nx$的系数为$2b_{3,n}+\dfrac{b_{3,n+1}+b_{3,n-1}}{2}$,其中$n\geqslant 2$。

对于式(23)等号的右侧,用计算u_2的方法类似地进行计算,可以得到结论:对于式(23)等号右侧的系数可设为$t^n(D_{3,3}n^3+D_{3,2}n^2+D_{3,1}n+D_{3,0})$。为方便计算,设

$$A_{3,n}:=2t^n(D_{3,3}n^3+D_{3,2}n^2+D_{3,1}n+D_{3,0})。$$

比较系数得

$$4b_{3,1}+b_{3,2}=A_{3,1},\tag{25}$$
$$b_{3,n+1}+4b_{3,n}+b_{3,n-1}=A_{3,n},\ n\geqslant 2。\tag{26}$$

将式(26)等号右端做分解

$$d_{3,n}-qd_{3,n-1}=A_{3,n},\ n\geqslant 2。\tag{27}$$

可以写成

$$b_{3,n+1}-tb_{3,n}-d_{3,n}=q\left(b_{3,n}-tb_{3,n-1}-d_{3,n-1}\right),n\geqslant 2。\tag{28}$$

对式(27)做迭代,令$d_{3,0}=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_{3,n}}{q^n}$,可以得出

$$d_{3,n}=q^n\left(-\frac{A_{3,n+1}}{q^{n+1}}-\frac{A_{3,n+2}}{q^{n+2}}-\cdots\right)=$$
$$-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2t^{n+i}[D_{3,3}(n+i)^3+D_{3,2}(n+i)^2+D_{3,1}(n+i)+D_{3,0}]}{q^i}=$$
$$-2t^n\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{t}{q}\right)^i[D_{3,3}(n+i)^3+D_{3,2}(n+i)^2+$$
$$D_{3,1}(n+i)+D_{3,0}]=:$$
$$2t^n\left(D'_{3,3}n^3+D'_{3,2}n^2+D'_{3,1}n+D'_{3,0}\right)。\tag{29}$$

令$b_{3,n+1}-tb_{3,n}-d_{3,n}=0$,并取$n=1$的情形与式(25)联立得

$$\begin{cases}4b_{3,1}+b_{3,2}=A_{3,1},\\ b_{3,2}-tb_{3,1}=d_{3,1}。\end{cases}\tag{30}$$

容易看出方程组(30)的系数行列式$\neq 0$。方程组(30)可以解出唯一的解$b_{3,1}$。再由$b_{3,n+1}-tb_{3,n}-d_{3,n}=0$,可得

$$b_{3,n}=tb_{3,n-1}+d_{3,n-1}=$$
$$t^{n-1}b_{3,1}+t^{n-2}d_{3,1}+t^{n-3}d_{3,2}+\cdots+d_{3,n-1}=$$
$$t^{n-1}b_{3,1}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(t^{n-1-i}d_{3,i}\right)=$$
$$t^{n-1}b_{3,1}+\sum_{i=1}^{n-1}\left[t^{n-1-i}2t^i\left(D'_{3,3}i^3+D'_{3,2}i^2+D'_{3,1}i+D'_{3,0}\right)\right]=$$
$$t^{n-1}b_{3,1}+2t^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(D'_{3,3}i^3+D'_{3,2}i^2+D'_{3,1}i+D'_{3,0}\right)。\tag{31}$$

为了对式(31)进行化简,引出如下引理。

引理1 设$P(z)$是n次多项式,则在区间$[1,N)$上有

$$\sum_{k=1}^{N-1}P(k)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{B_k}{k!}\left[P^{(k-1)}(N)-P^{(k-1)}(1)\right],$$

其中B_k是由发生函数$\dfrac{t}{\mathrm{e}^t-1}$产生的Bernoulli数,$N$是大于1的整数,$P^{-1}(z)$表示$P(z)$的不定积分。

引理的证明详见文献[10]。注意到右侧是1个$n+1$次的多项式,由引理1将式(31)转化成

$$b_{3,n}=t^{n-1}b_{3,1}+$$
$$2t^{n-1}\left(D''_{3,4}n^4+D''_{3,3}n^3+D''_{3,2}n^2+D''_{3,1}n+D''_{3,0}\right)=:$$
$$t^n\left(C_{3,4}n^4+C_{3,3}n^3+C_{3,2}n^2+C_{3,1}n+C_{3,0}\right)。\tag{32}$$

由式(32)定义的$b_{3,n}$可得到$u_3(x)\sum_{n=1}^{\infty}b_{3,n}\sin nx$在$[-\pi,\pi]$上绝对且一致收敛。

对于$u_3(x)$的扰动分析和$u_2(x)$类似,这里从略。根据以上计算得到的u_1、u_2、u_3以及计算过程中引入的$A_{2,n}$、$A_{3,n}$的形式表达结果列于表1。

$u_i(x)$的Fourier系数与$A_{i,n}$的因式中,多项式的部分n的次数是交替上升的。下面计算一般情形。

3 $u_i(x)(i>3)$的计算

本节利用数学归纳法给出一般情形$u_i(x)(i>3)$的计算。

表1　$A_{m,n}$和u_m的Fourier系数的表达式

表达式	$A_{m,n}$	u_m的Fourier系数
$m=1$	—	$2t^n$
$m=2$	$2t^n(3n-1-\frac{2t^2}{1-t^2})$	$t^n(\frac{\sqrt{3}}{2}n^2+\frac{n}{3}+\frac{\sqrt{3}}{18})$
$m=3$	$2t^n(D_{3,3}n^3+D_{3,2}n^2+D_{3,1}n+D_{3,0})$	$t^n(C_{3,4}n^4+C_{3,3}n^3+C_{3,2}n^2+C_{3,1}n+C_{3,0})$

注:—指m=1时,u_1的Fourier系数计算见2.1节,无需引入$A_{m,n}$。

定理1　设$p+q=m$,其中p、q、m都是正整数,假设对于任意的$k\in\mathbf{N}^+$,$k\leqslant m-1$都有

$$u_k=\frac{1+(-1)^k}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}t^n(C_{k,2k-2}n^{2k-2}+C_{k,2k-3}n^{2k-3}+\cdots+C_{k,0})\cos nx\right]+\frac{1-(-1)^k}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}t^n(C_{k,2k-2}n^{2k-2}+C_{k,2k-3}n^{2k-3}+\cdots+C_{k,0})\sin nx\right] \tag{33}$$

成立。那么当$k=m$时式(33)也成立。

证明　方程(4)即

$$u_0u_m=u'_{m-1}-\frac{1}{2}\sum_{p+q=m}u_pu_q。 \tag{34}$$

下面对m分奇偶讨论,主要考察u_pu_q的Fourier系数。

(1)当m为偶数时,p、q同奇偶。下面主要叙述p、q同为偶数时,计算u_pu_q具体过程。

对p、q同为偶数的情形,由于$p,q\leqslant m-1$,可以设

$$u_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n(C_{p,2p-2}n^{2p-2}+C_{p,2p-3}n^{2p-3}+\cdots+C_{p,0})\cos nx, \tag{35}$$

$$u_q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(C_{q,2q-2}n^{2q-2}+C_{q,2q-3}n^{2q-3}+\cdots+C_{q,0}\right)\cos nx。 \tag{36}$$

记

$$a_{p,n}=t^n(C_{p,2p-2}n^{2p-2}+C_{p,2p-3}n^{2p-3}+\cdots+C_{p,0}), \tag{37}$$

$$a_{q,n}=t^n(C_{q,2q-2}n^{2q-2}+C_{q,2q-3}n^{2q-3}+\cdots+C_{q,0})。 \tag{38}$$

由假设,式(35)和(36)分别一致收敛于$u_p(x)$和$u_q(x)$,则cosnx的系数为:

①cos0x的系数为$\frac{a_{p,0}a_{q,0}}{2}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_{p,j}a_{q,j}}{2}$;

②cosnx的系数为$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(a_{p,j}a_{q,j+n}+a_{p,j+n}a_{q,j})+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}(a_{p,j}a_{q,n-j})$。

将式(36)、(38)代入上式,可得cosnx的系数为

$$\frac{1}{2}t^n\sum_{j=0}^{\infty}t^{2j}[(C_{p,2p-2}j^{2p-2}+C_{p,2p-3}j^{2p-3}+\cdots+C_{p,0})(C_{q,2q-2}(j+n)^{2q-2}+C_{q,2q-3}(j+n)^{2q-3}+\cdots+C_{q,0})+(C_{p,2p-2}(j+n)^{2p-2}+C_{p,2p-3}(j+n)^{2p-3}+\cdots+C_{p,0})(C_{q,2q-2}j^{2q-2}+C_{q,2q-3}j^{2q-3}+\cdots+C_{q,0})]+\frac{1}{2}t^n\sum_{j=0}^{n-1}(C_{p,2p-2}j^{2p-2}+C_{p,2p-3}j^{2p-3}+\cdots+C_{p,0})\cdot(C_{q,2q-2}(n-j)^{2q-2}+C_{q,2q-3}(n-j)^{2q-3}+\cdots+C_{q,0})。 \tag{39}$$

对p、q同为奇数的情形,同理可得cosnx的系数为

$$\frac{1}{2}t^n\sum_{j=1}^{\infty}t^{2j}[(C_{p,2p-2}j^{2p-2}+C_{p,2p-3}j^{2p-3}+\cdots+C_{p,0})\cdot(C_{q,2q-2}(j+n)^{2q-2}+C_{q,2q-3}(j+n)^{2q-3}+\cdots+C_{q,0})+(C_{p,2p-2}(j+n)^{2p-2}+C_{p,2p-3}(j+n)^{2p-3}+\cdots+C_{p,0})(C_{q,2q-2}j^{2q-2}+C_{q,2q-3}j^{2q-3}+\cdots+C_{q,0})]-\frac{1}{2}t^n\sum_{j=0}^{n}(C_{p,2p-2}j^{2p-2}+C_{p,2p-3}j^{2p-3}+\cdots+C_{p,0})\cdot(C_{q,2q-2}(n-j)^{2q-2}+C_{q,2q-3}(n-j)^{2q-3}+\cdots+C_{q,0})。 \tag{40}$$

再考察式(34)中u'_{m-1}项

$$u'_{m-1}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n(C_{m-1,2m-4}n^{2m-3}+\cdots+C_{m-1,0}n)\cos nx。$$

显然,cosnx的系数为$t^n(C_{m-1,2m-4}n^{2m-3}+\cdots+C_{m-1,0}n)$。再由引理1可知,$\sum_{p+q=m}u_p(x)u_q(x)$中cos$nx$的系数是关于$n$的$2m-3$次多项式。设方程右侧cos$nx$的系数为$t^n(D_{m,2m-3}n^{2m-3}+\cdots+D_{m,0})$。设$A_{m,n}=2t^n(D_{m,2m-3}n^{2m-3}+\cdots+D_{m,0}),n\geqslant 1$。等号左侧cos$nx$的系数为$2a_{m,n}+\frac{a_{m,n-1}}{2}+\frac{a_{m,n+1}}{2},n\geqslant 1$。

当$n=0$时,等号右侧会出现常数项,记

$$A_{m,0}:=\frac{1}{2}\sum_{p+q=m}(\sum_{j=0}^{\infty}a_{p,j}a_{q,j}+\sum_{j=1}^{\infty}b_{p,j}b_{q,j}+a_{p,0}a_{q,0})。$$

因为m为偶数,故$u_m(x)$有Fourier展开$u_m(x)=$

$\frac{a_{m,0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}\cos nx$。故有

$$4a_{m,n}+a_{m,n-1}+a_{m,n+1}=A_{m,n},$$

其中$n\geqslant 1$。引入$d_{m,n}$满足

$$\begin{cases}a_{m,n+1}-ta_{m,n}-d_{m,n}=q(a_{m,n}-ta_{m,n-1}-d_{m,n-1}),\\ d_{m,n}-qd_{m,n-1}=A_{m,n},\quad n\geqslant 1。\end{cases}\tag{41}$$

由式(41)中的第2式可得

$$d_{m,n}=qd_{m,n-1}+A_{m,n}=q^2d_{m,n-2}+qA_{m,n-1}+A_{m,n}=q^nd_{m,0}+q^{n-1}A_{m,1}+q^{n-2}A_{m,2}+\cdots+qA_{m,n-1}+A_{m,n}=q^n\left[d_{m,0}+\frac{A_{m,1}}{q}+\frac{A_{m,2}}{q^2}+\cdots+\frac{A_{m,n}}{q^n}\right]。$$

令$d_{m,0}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{m,k}}{q^k}$,得

$$d_{m,n}=-q^n\left[\frac{A_{m,n+1}}{q^{n+1}}+\cdots+\frac{A_{m,n+k}}{q^{n+k}}+\cdots\right]=-\left[\frac{A_{m,n+1}}{q}+\cdots+\frac{A_{m,n+k}}{q^k}+\cdots\right]=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{n+k}[D_{m,2m-3}(n+k)^{2m-3}+\cdots+D_{m,0}]}{q^k}=-t^n\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{t}{q})^k[D_{m,2m-3}(n+k)^{2m-3}+\cdots+D_{m,0}]=:t^n\left[D'_{m,2m-3}n^{2m-3}+D'_{m,2m-4}n^{2m-4}+\cdots+D'_{m,0}\right]。$$

由

$$\begin{cases}2a_{m,0}+a_{m,1}=2A_{m,0},\\ a_{m,1}-ta_{m,0}=d_{m,0}。\end{cases}$$

解出唯一的解$a_{m,0}$。进而由$a_{m,n}-ta_{m,n-1}=d_{m,n-1}$可得

$$a_{m,n}=ta_{m,n-1}+d_{m,n-1}=t^na_{m,0}+t^{n-1}d_{m,0}+t^{n-2}d_{m,1}+\cdots+td_{m,n-2}+d_{m,n-1}=t^na_{m,0}+t^{n-1}D'_{m,2m-3}[1^{2m-3}+2^{2m-3}+\cdots+(n-1)^{2m-3}]+t^{n-2}D'_{m,2m-4}\left[1^{2m-4}+2^{2m-4}+\cdots+\left(n-1\right)^{2m-4}\right]+\cdots+D'_{m,0}n。\tag{42}$$

类似地,化简式(42)的最后一式,由引理1得

$$a_{m,n}=t^na_{m,0}+t^{n-1}D'_{m,2m-3}[1^{2m-3}+2^{2m-3}+\cdots+(n-1)^{2m-3}]+t^{n-2}D'_{m,2m-4}\left[1^{2m-4}+2^{2m-4}+\cdots+\left(n-1\right)^{2m-4}\right]+\cdots+D'_{m,0}n=:t^n\left(C_{m,2m-2}n^{2m-2}+C_{m,2m-3}n^{2m-3}+\cdots+C_{m,1}n+C_{m,0}\right)。$$

定理结论成立。

(2)当m为奇数时,则p、q不能有相同的奇偶性。不妨设p为奇数,q为偶数,那么计算可得

①$\sin x$的系数为$\frac{1}{2}$ $[2a_{p,1}a_{q,0}+a_{p,2}a_{q,1}+a_{p,3}a_{q,2}+\cdots-(a_{p,1}a_{q,2}+a_{p,2}a_{q,3}+\cdots)]$;

②$\sin nx$的系数为

$$\frac{1}{2}\left(2a_{p,n}a_{q,0}+\sum_{j=1}^{n-1}a_{p,j}a_{q,n-j}+\sum_{j=n}^{\infty}a_{p,j+n}a_{q,j}-\sum_{j=1}^{\infty}a_{p,j}a_{q,j+n}\right)=\frac{1}{2}[2t^n(C_{p,2q-2}n^{2q-2}+\cdots+C_{p,0})C_{q,0}+\sum_{j=1}^{n-1}t^j(C_{p,2p-2}j^{2p-2}+\cdots+C_{p,0})t^{n-j}\cdot(C_{q,2q-2}(n-j)^{2q-2}+\cdots+C_{q,0})+\sum_{j=n}^{\infty}t^{n+j}(C_{p,2p-2}(n+j)^{2p-2}+\cdots+C_{p,0})t^j\cdot(C_{q,2q-2}j^{2q-2}+\cdots+C_{q,0})-\sum_{j=1}^{\infty}t^j(C_{p,2p-2}j^{2p-2}+\cdots+C_{p,0})t^{n+j}\cdot(C_{q,2q-2}(n+j)^{2q-2}+\cdots+C_{q,0}),n\geqslant 2。\tag{43}$$

另外,$u'_{m-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}t^n(C_{m-1,2m-4}n^{2m-3}+\cdots+C_{m-1,0}n)\sin nx$。由引理1可知,$\sum_{p+q=m}u_p(x)u_q(x)$中$\sin nx$的系数是关于$n$的$2m-3$次多项式。故可设方程(43)右侧$\sin nx$的系数为$t^n(D_{m,2m-3}n^{2m-3}+\cdots+D_{m,0})$。设$A_{m,n}=2t^n(D_{m,2m-3}n^{2m-3}+\cdots+D_{m,0}),n\geqslant 1$,则式(34)等号左侧的系数满足:

①$\sin x$的系数为$2b_{m,1}+\frac{b_{m,2}}{2}$;

②$\sin nx$的系数为$2b_{m,n}+\frac{b_{m,n-1}+b_{m,n+1}}{2}$。

由于m为奇数,故$u_m(x)$有Fourier展开:$u_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{m,n}\sin nx$。比较式(43)等号两侧系数,有

$$\begin{cases}4b_{m,1}+b_{m,2}=A_{m,1},\\ 4b_{m,n}+b_{m,n-1}+b_{m,n+1}=A_{m,n},n\geqslant 2。\end{cases}\tag{44}$$

引入$d_{m,n}$,满足

$$\begin{cases}b_{m,n+1}-tb_{m,n}-d_{m,n}=q\left[b_{m,n}-tb_{m,n-1}-d_{m,n-1}\right],\\ d_{m,n}-qd_{m,n-1}=A_{m,n}。\end{cases}\tag{45}$$

由式(45)得

$$d_{m,n}=qd_{m,n-1}+A_{m,n}=q^2d_{m,n-2}+qA_{m,n-1}+A_{m,n}=q^{n-1}d_{m,1}+q^{n-2}A_{m,2}+\cdots+qA_{m,n-1}+A_{m,n}=$$

$$q^{n-1}\left(d_{m,1}+\frac{A_{m,2}}{q}+\cdots+\frac{A_{m,n}}{q^n}\right)。\tag{46}$$

令 $d_{m,1}=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_{m,k}}{q^{k-1}}$,得

$$d_{m,n}=q^{n-1}\left(\frac{-A_{m,n+1}}{q^n}+\frac{-A_{m,n+2}}{q^{n+1}}+\cdots\right)=$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2t^{n+k}[D_{m,2m-3}(n+k)^{2m-3}+\cdots+D_{m,0}]}{q^k}=:$$

$$t^n\left(D'_{m,2m-3}n^{2m-3}+D'_{m,2m-4}n^{2m-4}+\cdots+D'_{m,0}\right)。\tag{47}$$

由

$$\begin{cases}4b_{m,1}+b_{m,2}=A_{m,1},\\ b_{m,2}-tb_{m,1}=d_{m,1}。\end{cases}\tag{48}$$

解出唯一的$b_{m,1}$作为启动项。由$b_{m,2}=tb_{m,1}+d_{m,1}$, $n\geqslant 2$,迭代得

$$b_{m,n}=tb_{m,n-1}+d_{m,n-1}=$$

$$t^{n-1}b_{m,1}+t^{n-2}d_{m,1}+\cdots+td_{m,n-2}+d_{m,n-1}=t^{n-1}b_{m,1}+$$

$$t^{n-2}D'_{m,2m-3}[1^{2m-3}+2^{2m-3}+\cdots+(n-1)^{2m-3}]+$$

$$t^{n-3}D'_{m,2m-4}\left[1^{2m-4}+2^{2m-4}+\cdots+(n-1)^{2m-4}\right]+\cdots+D'_{m,0}n=$$

$$t^n(C_{m,2m-2}n^{2m-2}+C_{m,2m-3}n^{2m-3}+\cdots+C_{m,1}n+C_{m.0})。\tag{49}$$

因此对于任意的$m\geqslant 2$,式(33)都成立。证毕。

利用定理1,可以得到式(4)中一般情形$u_i(i>3)$的表达式。

4 结束语

本文通过选择一个特殊的函数作为启动,给出了一种寻找一维定常Burgers方程周期解的方法。在得到$A_{m,n}$后$d_{m,n}$的引入和初始项的选取是十分巧妙的,$d_{m,n}$的唯一选取为得到Fourier系数的首项的确定提供了必不可少的条件。

下一步的工作是对各项逼近函数的界进行估值,期望得到周期解关于粘性系数的幂级数展开式是有界的,即周期解关于变量x和粘性系数ε的一致界。

参 考 文 献

[1] BURGERS J M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence [J]. Advances in Applied Mechanics, 1948, 1:171-199.

[2] MAJDA A, BERTOZZI A. Vorticity and incompressible flow[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[3] CHOI J, HONG Y, JUNG C, et al. Viscosity approximation of the solution to Burgers' equations with shock layers[J]. Applicable Anallysis, 2023, 1: 288-314.

[4] MARBACH F. Small time global null controllability for a viscous Burgers' equation despite the presence of a boundary layer[J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2014,102(2):364-384.

[5] CONTRERAS H , LAMY X. On the L^2-stability of shock waves for finite-entropy solutions of Burgers[J]. Differential Equations, 2021,301(15): 236-265.

[6] MARIA G, NICOLA N, ALEXANDER K, et al. Long-time convergence of a nonlocal Burgers' equation towards the local N-wave[J]. Nonlinearity, 2023, 36 (11):5998-6019.

[7] VARUN S, VEDANT P, RAMESH B, et al. Differentiable physics-enabled closure modeling for Burgers' turbulence[J]. Machine Learning (Science and Technology), 2023,4(1):19.

[8] HOPE E. The partial differential equation $u_t+uu_x=u_{xx}$ [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1950, 3:201-230.

[9] COLE J. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1951, 9:225-236.

[10] 陈晓旻,强永霞.形如$\sum P(k)t^k$的有限和的一类求和公式[J].高等学校计算数学学报, 2004, 4:358-364.

(责任编辑:马田田)