DOI:10.19789/j.1004-9398.2024.01.002
文献引用:王姿婷,魏旭慧,朱一心.圆上的有理点[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,45(1):9-19. WANG Z T,WEI X H,ZHU Y X. Rational points on a circle[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2024,45(1):9-19.

圆上的有理点*

王姿婷**，魏旭慧，朱一心**
（首都师范大学数学科学学院，北京　100048）

摘要:利用初等数论的方法,系统地讨论了平面内圆上的有理点、整点的个数。得到:圆心不是有理点的圆上存在有理点充要条件;圆上整点的计数及构造方法。给出了部分例子对关键定理及推论予以阐释。

关键词:圆;有理点;整点
中图分类号:O156;O124.1;O123.1　　**文献标识码**:A

Rational points on a circle*

WANG Ziting**，WEI Xuhui，ZHU Yixin**
（School of Mathematical Sciences，Capital Normal University，Beijing　100048）

Abstract: In this paper, rational points and integer points on a circle are studied. By classifying circles with rational and irrational centers, we propose some methods for counting the number of rational or integer points on different types of circles. In addition, we illustrate some of the theorems and corollaries with examples.

Keywords: circle; rational points; integer points
CLC: O156; O124.1; O123.1　　**DC**: A

0　引　言

曲线上有理点的分布及生成公式是数学中的重要话题,其中以二次曲线最为常见[1-5],曲线上有理点的存在性问题也常作为几何模型出现在不定方程问题的求解中[6-7]。对于圆这类特殊的二次曲线,已经有一些有趣的结论:(1)以有理点为圆心的圆上若存在有理点则有无穷多个[8-9];(2)圆心为原点,半径的平方为1、2或模4余1的奇素数的圆上有无穷多个有理点[10-11];(3)圆上有理点的稠密性[12];(4)平面内存在至多含有一个整点的一类同心圆盘[9,13]。但这类讨论中尚需补充对圆心不是有理点时的分析,而在圆心是有理点时,整点的构造性以及不同构造方式得到的有理点是否可能存在重复等问题也需讨论。

本文利用初等数论、初等几何的方法,对圆上有理点、整点的问题进行较细致的讨论。

第1部分给出圆心是有理点时,圆上存在有理点的充要条件,以及圆上存在无穷个有理点的初等数论条件。第2部分给出圆心不是有理点时,圆上存在有理点的充要条件。第3部分讨论圆上存在整点的充要条件、计数和构造方法。

每一部分均有例子对各重要结论进行解释说明,包括圆上没有/恰有1个/恰有2个有理点、计算圆上所有整点、构造给定有理点数目的圆等,说明结论包含的不同情况。

收稿日期:2023-04-12
* 首都师范大学2023年研究生高水平学术创新项目
** 通信作者:wangziting@cnu.edu.cn;5074@cnu.edu.cn

本文记号、术语、符号及概念说明:

(1)称平面点(x,y)为有理点,若$x,y\in\mathbf{Q}$,记$(x,y)\in\mathbf{Q}^2$;

(2)称平面点(x,y)为整点,若$x,y\in\mathbf{Z}$,记$(x,y)\in\mathbf{Z}^2$;

(3)称$ax+by+c=0,a,b,c\in\mathbf{Q}$对应的直线为有理直线;

(4)以(α,β)为圆心,$r(r>0)$为半径的圆记为$C(\alpha,\beta,r)$,即$C(\alpha,\beta,r)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\}$;

(5)将有理数域上次数不超过2的一元多项式全体记为$\mathbf{Q}[x]_2$,其上未定元x用无理数θ代替后的所得的二次式全体记为$\mathbf{Q}[\theta]_2$;

(6)将有理数域上次数不超过2的二元多项式全体记为$\mathbf{Q}[x,y]_2$,其上未定元x,y分别用无理数θ,φ代替后的所得的二次式全体$\mathbf{Q}[\theta,\varphi]_2$。

本文涉及的2个熟知结论:

(1)(平方恒等式)[14]

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2;$$

(2)(本原勾股数)[15-16] 称满足$x^2+y^2=z^2$,$x,y,z\in\mathbf{Z}_+$且两两互质的三元数组$(x;y;z)$为本原勾股数。本原勾股数$(x;y;z)$的公式为

$$x=mn,y=\frac{m^2-n^2}{2},z=\frac{m^2+n^2}{2},$$

其中$m>n\geqslant 1,(m,n)=1$且均为奇数。

对本原勾股数不区分前两项的次序,如$(3;4;5)$与$(4;3;5)$被视作是同一组。

1 圆心为有理点的圆

命题1.1 对任意$a,b,c\in\mathbf{Q},c\neq 0$,圆$C(\alpha,\beta,r)$与圆$C(\alpha+a,\beta+b,r)$拥有相同数目的有理点;当$(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2$,圆$C(\alpha,\beta,r)$与圆$C(\alpha+a,\beta+b,cr)$拥有相同数目的有理点。特别地,圆$C(0,0,r)$与圆$C(0,0,cr)$的有理点一一对应。

证明 设(x,y)是圆$C(\alpha,\beta,r)$上的有理点,则对任意的$a,b,c\in\mathbf{Q},c\neq 0$,有:(1)$(x+a,y+b)$显然是圆$C(\alpha+a,\beta+b,r)$上的有理点;(2)当$(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2$,$(c(x-\alpha)+\alpha+a,c(y-\beta)+\beta+b)$显然也是圆$C(\alpha+a,\beta+b,cr)$上的有理点。命题得证。

命题1.1意味着将任意圆的圆心沿着以坐标原点为起始点有理点为终点的向量进行平移,或对圆心是有理点的圆,将其按有理数倍数伸缩,变化前后所得圆上有理点的个数相同。命题1.1可用以简化讨论。

先讨论圆心为有理点的圆上存在有理点的必要条件。

命题1.2 对$(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2$,圆$C(\alpha,\beta,r)$上存在有理点的必要条件是$r^2\in\mathbf{Q}_+$。

证明 由命题1.1,考虑圆$C(0,0,r)$上的有理点即可,此时结论是显然的。命题得证。

由命题1.1,圆$C(\alpha,\beta,r),(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2,r^2\in\mathbf{Q}_+$上是否存在有理点可归结为圆$C(0,0,r),r^2\in\mathbf{Z}_+$上是否存在有理点。由圆的对称性有:若$(x,y)$是圆$C(0,0,r)$,$r^2\in\mathbf{Z}_+$上的有理点,则$(\pm x,\pm y)$、$(\pm y,\pm x)$也在该圆上。

命题1.3 当$(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2,r^2\in\mathbf{Q}_+$时,若圆$C(\alpha,\beta,r)$上存在有理点,则该圆上有无穷多个有理点。

证明 (构造法)先考虑圆$C(0,0,r)$,设有理点(s,t)在圆$C(0,0,r)$上。s,t显然不可能同时为0或相等。对于s,t中恰有一个为0的情况,不妨设$s=0$,则可利用一组本原勾股数$(m;n;q)$得到圆上位于第一象限内的点$\left(\left|\frac{mt}{q}\right|,\left|\frac{nt}{q}\right|\right)$;对于$s,t$非零但存在负数的情况,则可以取点$(|s|,|t|)$代替点$(s,t)$。因此只需对$s,t\in\mathbf{Q}_+,s\neq t$的情况进行讨论。

由平方恒等式,任取一组本原勾股数$(a;b;c)$,都有$\frac{(a^2+b^2)(s^2+t^2)}{c^2}=\left(\frac{as\pm bt}{c}\right)^2+\left(\frac{at\mp bs}{c}\right)^2=r^2$。此时$\left(\frac{as\pm bt}{c}+\alpha,\frac{at\mp bs}{c}+\beta\right)$也是圆$C(\alpha,\beta,r)$上的有理点。本原勾股数已熟知有无穷多组[17]。下面证明无穷多组本原勾股数可以产生无穷多有理点。

设$s=\frac{s'}{w},t=\frac{t'}{w}$,其中$s',t'$都是正整数,$w$是使得$w^2r^2\in\mathbf{Z}_+$且$(s',t',w^2r^2)=1$的正整数,为记号方便,记$r'=wr$。由命题1.1,有理点$\left(\frac{s'}{w},\frac{t'}{w}\right)$在圆$C(0,0,r)$上意味着整点$(s',t')$在圆$C(0,0,r')$上。

反之,由圆$C(0,0,r')$上新的有理点也可以得到圆$C(0,0,r)$上新的有理点。因此只要证明由无穷组不同的本原勾股数可得到圆$C(0,0,r')$上无穷个新的有理点即可。

假设不同的本原勾股数$(a_1;\ b_1;\ c_1)$与$(a_2;\ b_2;\ c_2)$得到圆$C(0,0,r')$上的同一有理点,由方程的对称性,只需考虑以下2种情况:

$$\begin{cases}\dfrac{a_1s'+b_1t'}{c_1}=\dfrac{a_2s'+b_2t'}{c_2},\\ \dfrac{a_1t'-b_1s'}{c_1}=\dfrac{a_2t'-b_2s'}{c_2},\end{cases}\tag{1}$$

或者

$$\begin{cases}\dfrac{a_1s'+b_1t'}{c_1}=\dfrac{a_2s'+b_2t'}{c_2},\\ \dfrac{a_1t'-b_1s'}{c_1}=-\dfrac{a_2t'-b_2s'}{c_2}。\end{cases}\tag{2}$$

对式(1)可先通分,写成s',t'的多项式,即:

$$\begin{cases}(a_1c_2-a_2c_1)s'=(b_2c_1-b_1c_2)t',\\ (b_2c_1-b_1c_2)s'=-(a_1c_2-a_2c_1)t'。\end{cases}\tag{3}$$

若式(1)中第2个方程出现$a_1t'-b_1s'=b_2s'-a_2t'=0$的情况,则有$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{s'}{t'}=\dfrac{s}{t}$。否则,式(3)中2个等式的两侧均不为0,可对其上下相比,化简得$-(a_1c_2-a_2c_1)^2=(b_2c_1-b_1c_2)^2$,即$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$。因此2组不同的本原勾股数不可能满足式(1)。

对式(2)通分可变形为

$$\begin{cases}\dfrac{a_1's'+b_1't'}{c'}=\dfrac{a_2's'+b_2't'}{c'},\\ \dfrac{a_1't'-b_1's'}{c'}=-\dfrac{a_2't'-b_2's'}{c'},\end{cases}\tag{4}$$

其中$c'=[c_1,c_2]$,$a_i'=a_i\dfrac{c'}{c_i}$,$b_i'=b_i\dfrac{c'}{c_i}$,$i=1,2$。

将式(4)看作是关于未知量a_2'、b_2'的方程,解得

$$\begin{cases}a_2'=2t'\dfrac{b_1's'-a_1't'}{r'^2}+a_1',\\ b_2'=2s'\dfrac{a_1't'-b_1's'}{r'^2}+b_1'。\end{cases}\tag{5}$$

考虑到$(s',t',r'^2)=1$,易得式(5)中解a_2'、b_2'是整数当且仅当$r'^2|2(b_1's'-a_1't')$,若进一步要求a_2'、b_2'都不为零,由式(5)可分别解得$\dfrac{a_1'}{b_1'}\neq\dfrac{2s't'}{t'^2-s'^2}$,$\dfrac{a_1'}{b_1'}\neq\dfrac{s'^2-t'^2}{2s't'}$$\left(\text{即}\dfrac{a_1}{b_1}\neq\left|\dfrac{s^2-t^2}{2st}\right|^{\pm1}\right)$。

由式(5)和(1)的解知,若要求有理点$\left(\dfrac{a_1s'+b_1t'}{c_1},\dfrac{a_1t'-b_1s'}{c_1}\right)$不在坐标轴上(不含0分量),且可由2组不同本原勾股数得到,只需$\dfrac{a_1}{b_1}\neq\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\pm1}$且$\dfrac{a_1}{b_1}\neq\left|\dfrac{s^2-t^2}{2st}\right|^{\pm1}$。

由于满足$\dfrac{a_1}{b_1}=\left|\dfrac{s^2-t^2}{2st}\right|^{\pm1}$的本原勾股数恰有一组,满足$\dfrac{a_1}{b_1}=\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\pm1}$的本原勾股数至多有一组(如$\dfrac{s}{t}=\dfrac{1}{2}$时,不存在本原勾股数$(a_1;\ b_1;\ c_1)$使得$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{1}{2}$,因此有无穷多组本原勾股数可以同时满足$\dfrac{a_1}{b_1}\neq\left|\dfrac{s^2-t^2}{2st}\right|^{\pm1}$,$\dfrac{a_1}{b_1}\neq\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\pm1}$,将这无穷多组本原勾股数构成的集合记作$M_{s,t}$。

任取$M_{s,t}$中的元素$(a;\ b;\ c)$构造的有理点$\left(\dfrac{as'+bt'}{c},\dfrac{at'-bs'}{c}\right)$坐标分量一定都非零。该有理点若还可由另一组本原勾股数$(a';\ b';\ c')$构造得到,则由式(5)可知

$$\frac{a'}{b'}=\frac{2t'\dfrac{bs'-at'}{r'^2}+a}{2s'\dfrac{at'-bs'}{r'^2}+b},$$

等号右边为a、b、s'、t'决定的定值。也就是说,这样的本原勾股数$(a';\ b';\ c')$若存在则唯一。

于是由$M_{s,t}$中的本原勾股数构造的每一个有理点都至多由2组不同的本原勾股数构造而得,由此可知圆上所有的有理点有无穷多个,否则与$M_{s,t}$有无穷多个元素矛盾。

(几何法)如图1所示,设圆$C(\alpha,\beta,r)$上的有理点为点A,过点A作一条斜率为$k(k\in\mathbf{Q})$的有理直线l(不取点A处的切线),记l交圆于另一点A'。过圆心(α,β)作直线l的垂线l',此时有理直线l与有理直线l'的交点必为有理点。该交点是点A和点A'的中点,因此点A'也是圆上的一个有理点。由$k\in\mathbf{Q}$

的任意性,这样得到的有理点A'有无穷多个(直线l平行于y轴时结论依然成立)。命题得证。

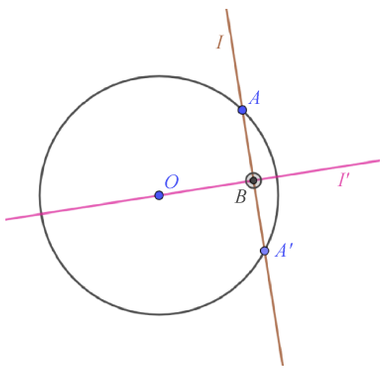


图1　几何法证明示意

下面讨论圆心为有理点的圆存在有理点的充要条件。

由命题1.1,对于$(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2$, $r^2\in\mathbf{Q}_+$,圆$C(\alpha,\beta,r)$上有理点的存在性可以转化为圆$C(0,0,r)\left(r^2\in\mathbf{Z}_+\right)$上整点的存在性。这等价于确定哪些自然数能表达为2个平方数的和,即二平方和问题。

引理1.4[15,18-19]　费马(Fermat)二平方和定理与高斯(Gauss)二平方和定理

(1)若自然数$x\equiv 3(\mathrm{mod}4)$,则x不能表示成2个平方数的和。

(2)若质数$p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$,则p一定可以表示成2个平方数的和。

(3)一个自然数可以表示成2个平方数的和,当且仅当其素数分解中每个模4余3的素数只出现偶数次。

为表述方便,下文将1个自然数n表达成2个平方数的和的形式$n=a^2+b^2$,称为n的平方数(二)分拆,其中$a=b$的分拆称为均分分拆,$a\neq b$的分拆称为非均分分拆。

定理1.5　对于$(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2$的圆$C(\alpha,\beta,r)$,圆上存在有理点当且仅当$r^2$是一个既约分数,且其分子与分母的每一个模4余3的素因数只出现偶数次,此时圆上有无穷多个有理点。

证明　充分性:对于$r^2=\dfrac{m}{n},(m,n)=1$,由命题1.1,在$(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2$时,圆$C\left(\alpha,\beta,\sqrt{\dfrac{m}{n}}\right)$的有理点个数与圆$C\left(0,0,\sqrt{mn}\right)$的有理点个数一致,由引理1.4,$m,n$都满足模4余3的素因数只出现偶数次时,$mn$一定有平方数分拆,即圆$C\left(0,0,\sqrt{mn}\right)$上必存在有理点(此时为整点)。再由命题1.3,知圆$C(\alpha,\beta,r)$上的有理点存在且有无穷多个。

必要性:设圆$C(\alpha,\beta,r)$上存在有理点,由命题1.1和1.2,圆$C(0,0,r)$上也存在有理点,且$r^2=\dfrac{m}{n},(m,n)=1$是有理数。若m,n中至少有1个模4余3的素因数出现奇数次,由引理1.4,任给$c\neq 0$,都有c^2mn没有平方数分拆,即圆$C\left(0,0,c\sqrt{mn}\right)$上不存在整点。此时由命题1.1知圆$C\left(0,0,\sqrt{\dfrac{m}{n}}\right)$上不存在有理点,否则必存在$c\neq 0$,使得圆$C\left(0,0,c\sqrt{mn}\right)$上有整点,矛盾。故$m,n$都满足模4余3的素因数只出现偶数次。定理得证。

为表述方便,若$q\in\mathbf{Q}_+$是分子与分母的每一个模4余3的素因数只出现偶数次的既约分数,称q为可拆有理数或称q可拆。

例1.1　求圆$C\left(1,2,\sqrt{\dfrac{29}{2}}\right)$上的有理点。

解　首先通过平移圆心以及放缩半径,将问题置于圆$C\left(0,0,\sqrt{2\times 29}\right)$上考虑,并进一步化为求圆$x^2+y^2=2$和圆$x^2+y^2=29$上有理点的问题,显然$C\left(0,0,\sqrt{2}\right)$上存在有理点$(1,1)$,下面只写出圆$C\left(0,0,\sqrt{29}\right)$上有理点的方法。由$\left(\left(\dfrac{29-1}{2}\right)!\right)^2\equiv 12^2\equiv -1(\mathrm{mod}29)$得到$12^2+1^2=29\times 5$,而$12\equiv 2(\mathrm{mod}5)$,由平方恒等式$\left(2^2+1^2\right)\times\left(12^2+1^2\right)=\left(2\times 12+1\right)^2+\left(2-12\right)^2$,两边同时除以$5^2$得$29=5^2+2^2$,即$(5,2)$是$C\left(0,0,\sqrt{29}\right)$上的有理点。进一步,利用平方恒等式还可得到$C\left(0,0,\sqrt{2\times 29}\right)$上的有理点$(1\times 2+1\times 5,1\times 5-1\times 2)$,即点$(7,3)$(类似可得$(7,-3)$、$(3,7)$、$(-3,7)$)。

利用半径的伸缩和圆心的平移可对应得到圆$C\left(1,2,\sqrt{\dfrac{29}{2}}\right)$上的一个有理点$\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2}\right)$。最后,结合

命题1.3得到$\left(\dfrac{\frac{9}{2}a+\frac{7}{2}b}{c},\dfrac{\frac{7}{2}a-\frac{9}{2}b}{c}\right)$及其关于圆心、$x=1$、$y=2$的对称点均是其上的有理点,其中$(a,b,c)$为一组本原勾股数。

2　圆心为非有理点的圆

命题2.1　若$(\alpha,\beta)\notin\mathbf{Q}^2$,则圆$C(\alpha,\beta,r)$上至多有2个有理点。并且,若圆上有2个有理点,则圆心必在一条有理直线上;若圆心不在有理直线上,则圆上至多有1个有理点。

证明　利用反证法。若圆上至少有3个不同的有理点,考虑这3个点决定的三角形,其3条边的中垂线都是有理直线,而圆心是这3条中垂线的交点,因此圆心必为有理点,矛盾。若圆上有2个有理点,则圆心必位于这2个点决定的中垂线上,即圆心在一条有理直线上,是圆心为非有理点的圆有2个有理点的必要条件(并非充分条件,可见例2.3和2.4)。命题得证。

下面将圆心为非有理点的圆,按是否存在过圆心的有理直线分类,对圆上有理点的个数进行讨论。

2.1　圆心在一条有理直线上

此时,有理直线斜率k有2种情况:

(1)$k=0$或者k不存在,即直线平行于x轴或者y轴;

(2)$k\neq0$。

情况(1)意味着圆心(α,β)的坐标分量中,一个为有理数,另一个为无理数($k=0$时,$\alpha\notin\mathbf{Q},\beta\in\mathbf{Q}$;$k$不存在时,$\alpha\in\mathbf{Q},\beta\notin\mathbf{Q}$)。情况(2)意味着圆心$(\alpha,\beta)$的坐标分量满足有理关系式$\beta=k\alpha+u,k,u\in\mathbf{Q}$。

2.1.1　圆心在一条平行于x轴或者y轴的有理直线上

不妨以$k=0$为例分析,此时$\alpha\notin\mathbf{Q},\beta\in\mathbf{Q}$,于是圆上有理点的存在性可转化为是否存在有理数$u,v\in\mathbf{Q}$,使得$r^2=\alpha^2-2u\alpha+\left[u^2+(\beta-v)^2\right]$。若这样的$u,v\in\mathbf{Q}$存在,则$r^2-(\alpha-u)^2=(\beta-v)^2\in\mathbf{Q}$且由定理1.5知$u^2+(\beta-v)^2$是可拆有理数。

由前面分析,显然可以得到情况(1)下圆上存在有理点的判断条件。

定理2.2　圆$C(\alpha,\beta,r)$,其中$\alpha\notin\mathbf{Q},\beta\in\mathbf{Q}$(或$\alpha\in\mathbf{Q},\beta\notin\mathbf{Q}$),圆上存在有理点的充要条件是:$r^2\in\mathbf{Q}[\alpha]_2$(或$r^2\in\mathbf{Q}[\beta]_2$),且存在$m\in\mathbf{Q}$使得$r^2-(\alpha-m)^2$(或$r^2-(\beta-m)^2$)是有理数的平方。

对于$r^2\in\mathbf{Q}[\alpha]_2$(或$r^2\in\mathbf{Q}[\beta]_2$)的圆,可通过待定系数法判断是否存在$m\in\mathbf{Q}$满足定理2.2的条件。下面给出例子。

例2.1　圆$C\left(0,\sqrt{3},\sqrt[4]{2}\right)$上不存在有理点。

证明　易判断,$r^2=\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}\left[\sqrt{3}\right]_2$,由定理2.2可得结论。

例2.2　圆$C\left(0,\sqrt{3},\sqrt{13-2\sqrt{3}}\right)$上恰有2个有理点。

证明　易判断$r^2=13-2\sqrt{3}\in\mathbf{Q}\left[\sqrt{3}\right]_2$,考虑

$$r^2-(\beta-m)^2=13-2\sqrt{3}-m^2+2\sqrt{3}\,m-3,$$

欲使该值为一个有理数,必须有$m=1$,故$r^2-(\beta-m)^2=9=3^2$。于是$(3,1)$是圆上的一个有理点,而其关于过圆心的有理直线$x=0$的对称点$(-3,1)$也是圆上的有理点,由命题2.1,这2个点是圆上所有的有理点。

例2.3　圆$C\left(0,\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right)$上恰有1个有理点。

证明　如同例2.2,考虑

$$r^2-(\beta-m)^2=4-2\sqrt{3}-m^2+2\sqrt{3}\,m-3,$$

解得$m=1$,故$r^2-(\beta-m)^2=0$,于是$(0,1)$是圆上的一个有理点,而其关于过圆心的有理直线$x=0$的对称点就是其本身,即是圆上唯一的有理点。

例2.4　圆$C\left(0,\sqrt{3},\sqrt{6-2\sqrt{3}}\right)$上没有有理点。

证明　如同例2.2,考虑

$$r^2-(\beta-m)^2=6-2\sqrt{3}-m^2+2\sqrt{3}\,m-3,$$

解得$m=1$,故$r^2-(\beta-m)^2=2$,2不是只有平方因子的有理数,因而不可能是一个有理数的平方,即圆上不存在有理点。

2.1.2　圆心在一条斜率非零的有理直线上

当圆心在一条斜率非零的有理直线上,意味着存在有理数w使得圆心(α,β)满足:$\beta=k\alpha+w,k,w\in\mathbf{Q}$。利用命题1.1,可将圆$C(\alpha,\beta,r)$上有理点的存在性问题放在圆$C(\alpha,k\alpha,r)$上讨论。

定理2.3　对于圆$C(\alpha,\beta,r)$,其中$(\alpha,\beta)\notin\mathbf{Q}^2$,

且$k\alpha + w = \beta, k, w \in \mathbf{Q}$,圆上存在有理点的充要条件是:$r^2 \in \mathbf{Q}[\alpha]_2$(或$r^2 \in \mathbf{Q}[\beta]_2$),且存在$s \in \mathbf{Q}$使得$r^2 - (k^2+1)(\alpha - s)^2$(或$r^2 - (k^2+1)(\beta - s)^2$)是可拆有理数。

证明 利用命题1.1,考虑圆$C(\alpha, k\alpha, r)$。在图1中可注意到,当点A是有理点,则过圆心的有理直线l'上必有一有理点B,记为(s, ks),使得$AB \perp l'$,且$AB^2 = r^2 - (k^2+1)(\alpha - s)^2$必为有理数。进一步地,这个有理数是以有理点为端点的线段AB的平方,因此必能表达为2个有理数的平方和,即其必是一个可拆有理数。定理得证。

故对于$r^2 \in \mathbf{Q}[\alpha]_2$的情况,可以通过检验是否存在有理数$s$使得$AB^2$是一个有理数来判断圆上有理点的存在性。

可以看到,定理2.2是定理2.3在$k = 0$时的特殊情况。

下面分别以$r^2 \notin \mathbf{Q}[\alpha]_2$、$r^2 \in \mathbf{Q}[\alpha]_2$但$s \notin \mathbf{Q}$、$r^2 \in \mathbf{Q}[\alpha]_2$,$s \in \mathbf{Q}$但$s$模4余3的素因子出现奇数次等不同类型的圆为例,给出圆$C(\alpha, \beta, r)$,其中$(\alpha, \beta) \notin \mathbf{Q}^2$上有理点的寻找过程。

例2.5 圆$C\left(\frac{1}{2} + \pi, 3\pi, \sqrt[6]{2}\right)$上不存在有理点。

证明 利用命题1.1,考虑圆$C\left(\pi, 3\pi, \sqrt[6]{2}\right)$,此圆圆心在直线$y = 3x$上。由于$r^2 = \sqrt[3]{2} \notin \mathbf{Q}[\pi]_2$,由定理2.3,圆上不存在有理点。

例2.6 圆$C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}, \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}\right)$上恰有2个有理点。

证明 先利用命题1.1,考虑圆$C\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}\right)$,此时圆心在直线$y = -x$上。由于$r^2 = 5 - 2\sqrt{2} \in \mathbf{Q}[\sqrt{2}]_2$,考虑

$$r^2 - (k^2+1)(\alpha - s)^2 = 5 - 2\sqrt{2} - 2 \times \left(2 - 2\sqrt{2}\, s + s^2\right)。$$

由于s只考虑有理数,于是该式值为有理数当且仅当$s = \frac{1}{2}$。此时$r^2 - (k^2+1)(\alpha - s)^2 = \frac{1}{2}$,对应得到图1中的点$B$坐标为$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,由$AB$所在直线的方程及$AB^2 = \frac{1}{2}$可以解得点$A$的坐标为$(0, -1)$或$(1, 0)$。由命题2.1,这2个有理点便是圆$C\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5-2\sqrt{2}}\right)$上所有的有理点。最后再对这2个有理点进行平移,得到圆$C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}, \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}\right)$上的2个有理点$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$和$\left(1, \frac{1}{2}\right)$。

例2.7 圆$C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}, \sqrt{6 - 2\sqrt{2}}\right)$上没有有理点。

证明 同例2.6,考虑圆$C\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{6-2\sqrt{2}}\right)$上的有理点。由于$r^2 = 6 - 2\sqrt{2} \in \mathbf{Q}[\sqrt{2}]_2$,考虑$r^2 - (k^2+1)(\alpha - s)^2 = 6 - 2\sqrt{2} - 2 \times \left(2 - 2s\sqrt{2} + s^2\right)$,该式的值为有理数,当且仅当$s = \frac{1}{2}$。此时$r^2 - (k^2+1)(\alpha - s)^2 = \frac{3}{2}$,而$\frac{3}{2}$不是可拆有理数,由定理2.3知圆$C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}, \sqrt{6 - 2\sqrt{2}}\right)$上不存在有理点。

例2.8 圆$C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}, \sqrt{\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}}\right)$上恰有1个有理点。

证明 同例2.6,得到当且仅当$s = \frac{1}{2}$时,

$$r^2 - (k^2+1)(\alpha - s)^2 = \frac{9}{2} - 2\sqrt{2} - 2 \times \left(2 - 2s\sqrt{2} + s^2\right)$$

的值为有理数,此时可得$r^2 - (k^2+1)(\alpha - s)^2 = 0$,从而得到有理点$A$的坐标为$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,这是过圆心的有理直线$y = -x$与圆的交点,平移后可得所求圆$C\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}, \sqrt{\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}}\right)$上的有理点$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$。由命题2.1,点$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$是该圆上唯一的有理点。

推论2.4 对于圆$C(\alpha, \beta, r)$,其中$(\alpha, \beta) \notin \mathbf{Q}^2$,且$k\alpha + w = \beta, k, w \in \mathbf{Q}$,圆上恰有1个有理点,当且仅当存在$s \in \mathbf{Q}$,使得$r^2 - (k^2+1)(\alpha - s)^2 = 0$(或$r^2 - (k^2+1)(\beta - s)^2 = 0$),此时该有理点就是$(s, ks + w)$。

2.2　圆心不在有理直线上

当圆心不在有理直线上,由命题 2.1 知,圆上至多有 1 个有理点。

圆$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$上存在有理点$(u,v)$,意味着$r^2$可以表达为$\alpha^2+u\alpha+\beta^2+v\beta+\frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{4}$的形式。

定理 2.5　对于圆心不在有理直线上的圆$C(\alpha,\beta,r)$,若$r^2\notin\mathbf{Q}[\alpha,\beta]_2$,则圆上不存在有理点;若圆上存在(唯一)有理点,则$r^2\in\mathbf{Q}[\alpha,\beta]_2$,且$r^2$关于$\alpha$、$\beta$的二次式表达中,$\alpha^2$、$\beta^2$的系数都为 1,$\alpha\beta$的系数为 0,常数项恰好等于$\alpha$、$\beta$一次项系数的平方和的$\frac{1}{4}$。

定理 2.5 可用以证明圆上不存在有理点。

例 2.9　圆$C\left(\pi,\sqrt{2},\sqrt{1+\sqrt{7}}\right)$上不存在有理点。

证明　此圆圆心不在有理直线上,由于

$$r^2=1+\sqrt{7}\notin\mathbf{Q}\left[\pi,\sqrt{2}\right]_2,$$

由定理 2.5,圆上不存在有理点。

例 2.10　圆$C\left(\pi,\sqrt{2},\sqrt{\pi^2+9}\right)$上不存在有理点。

证明　此圆圆心不在有理直线上,由于

$$r^2=\pi^2+9=\pi^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+7\in\mathbf{Q}\left[\pi,\sqrt{2}\right]_2,$$

而$7\equiv 3(\mathrm{mod}4)$,由定理 2.5,圆上不存在有理点。

例 2.11　圆$C\left(\pi,\sqrt{2},\sqrt{\pi^2+11}\right)$上不存在有理点。

证明　此圆圆心不在有理直线上,由于

$$r^2=\pi^2+11=\pi^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+9\in\mathbf{Q}\left[\pi,\sqrt{2}\right]_2,$$

而$\pi,\sqrt{2}$的系数平方和的$\frac{1}{4}$为$0\neq 9$,由定理 2.5,圆上不存在有理点。

例 2.12　圆$C\left(\pi,\sqrt{2},\sqrt{\pi^2+2\pi-6\sqrt{2}+12}\right)$上恰有一个有理点。

证明　此圆圆心不在有理直线上,由于

$$r^2=\pi^2+2\pi-6\sqrt{2}+12=(\pi+1)^2+\left(\sqrt{2}-3\right)^2\in\mathbf{Q}\left[\pi,\sqrt{2}\right]_2,$$

故$(-1,3)$是该圆上的有理点,且由命题 2.1 知,圆上再无其他有理点。

一般地,判断圆上有理点的个数可依循图 2 步骤。

3　圆上的整点

3.1　圆心为整点的圆

由命题 1.1,对于圆$C(\alpha,\beta,r),(\alpha,\beta)\in\mathbf{Z}^2,r^2\in\mathbf{Q}_+$,圆上的整点存在性可归结为圆$C(0,0,r),r^2\in\mathbf{Q}_+$上的整点存在性,由引理 1.4 易得推论 3.1。

推论 3.1　对于圆$C(\alpha,\beta,r),(\alpha,\beta)\in\mathbf{Z}^2,r^2\in\mathbf{Q}_+$,

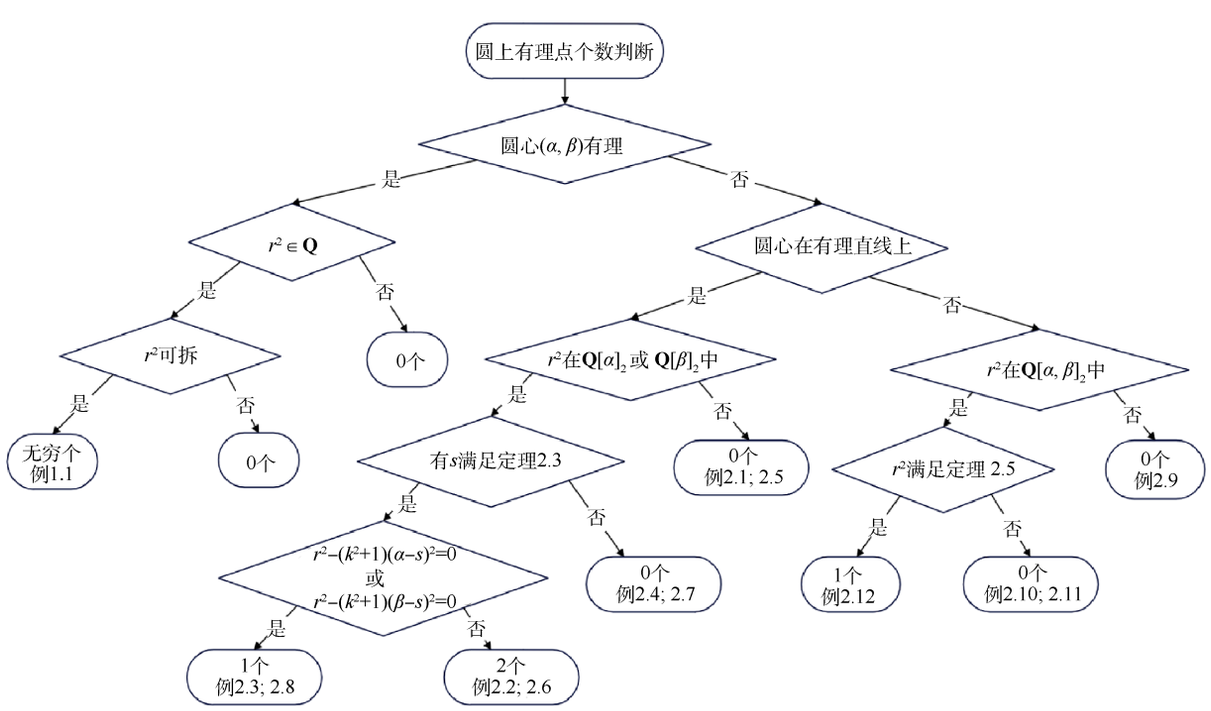


图 2　判断圆上有理点个数流程

圆上存在整点,当且仅当r^2是正整数,且其素数分解中每个模4余3的素数只出现偶数次。

由圆的对称性,圆$C(0,0,r)$上若存在整点(x,y),则$(\pm x,\pm y)$、$(\pm y,\pm x)$都是其上的整点,因此可先就$x,y\in\mathbf{Z}_+$进行考虑,再由对称性求得其他整点。

引理 3.2[18,20]　设正整数$n=2^u\prod_h p_h^{2u_h+1}\prod_s q_s^{2v_s}\prod_t g_t^{2w_t}$,其中$p_i$、$q_j$都是模4余1的素数,$g_k$都是模4余3的素数,$u$、$u_i$、$v_j$、$g_k$、$s$、$t$都是非负整数,则$n$的不同平方数分拆个数$M$为

$$M(n)=\begin{cases}1, & h=s=0,\\ \sum_{k=1}^{s}2^{k-1}\Delta_k+1, & h=0,s\geqslant 1,\\ 2^{h-1}\prod_{i=1}^{h}(u_i+1), & h\geqslant 1,s=0,\\ 2^{h-1}\prod_{i=1}^{h}(u_i+1)\left(\sum_{k=1}^{s}2^k\Delta_k+1\right), & h\geqslant 1,s\geqslant 1,\end{cases}$$

其中Δ_k是k个不同的v_j乘积的和,即$v_1,\cdots,v_s$的k次基本对称多项式。

推论 3.3　对于圆$C(\alpha,\beta,r)$,其中$(\alpha,\beta)\in\mathbf{Z}^2$,$r^2=2^u\prod_h p_h^{2u_h+1}\prod_s q_s^{2v_s}\prod_j g_t^{2w_t}$,$p_i$、$q_j$都是模4余1的素数,$g_k$都是模4余3的素数,$u$、$u_i$、$v_j$、$g_k$、$s$、$t$都是非负整数,圆上的整点$(x,y)$数目$N$为

$$N=\begin{cases}4, & h=s=0,\\ \sum_{k=1}^{s}2^{k+2}\Delta_k+4, & h=0,s\geqslant 1,\\ 2^{h+2}\prod_{i=1}^{h}(u_i+1), & h\geqslant 1,s=0,\\ 2^{h+2}\prod_{i=1}^{h}(u_i+1)\left(\sum_{k=1}^{s}2^k\Delta_k+1\right), & h\geqslant 1,s\geqslant 1,\end{cases}$$

其中Δ_k是k个不同的v_j乘积的和,即$v_1,\cdots,v_s$的k次基本对称多项式。

证明　对于r^2的每一种不含零或非均分平方数分拆$r^2=a^2+b^2$,$a\neq b$,可对应圆上互不相同的8个整点$(\pm a,\pm b)$、$(\pm b,\pm a)$;对于r^2的含零或均分平方数分拆$r^2=a^2$(此时r^2本身就是一个平方数)或$r^2=2a^2$,则由对称性,这2种分拆每一种都可对应圆上4个整点,前者为$(\pm a,0)$,$(0,\pm a)$,后者为$(\pm a,\pm a)$。

下面分情况讨论:

(1)$h=s=0$。

当$2\mid u$,此时r^2只有唯一的平方数分拆:$r^2=\left(2^{\frac{u}{2}}\prod_j g_t^{w_t}\right)^2+0^2$。故圆$C(0,0,r)$上只有$\left(\pm 2^{\frac{u}{2}}\prod_j g_t^{w_t},0\right)$和$\left(0,\pm 2^{\frac{u}{2}}\prod_j g_t^{w_t}\right)$这4个位于坐标轴上的整点,由命题1.1知圆$C(\alpha,\beta,r)$上的整点数目$N=4$。

当$2\nmid u$,此时r^2只有唯一的平方数分拆$r^2=2\left(2^{\frac{u-1}{2}}\prod_j g_t^{w_t}\right)^2$。故圆$C(0,0,r)$上只有$\left(\pm 2^{\frac{u-1}{2}}\prod_j g_t^{w_t},\pm 2^{\frac{u-1}{2}}\prod_j g_t^{w_t}\right)$这4个位于$y=\pm x$上的整点,由命题1.1知圆$C(\alpha,\beta,r)$上的整点数目$N=4$。

(2)$h=0,s\geqslant 1$。

因$\prod_s q_s^{2v_s}\prod_j g_t^{2w_t}$本身为平方数,有$\left(\prod_s q_s^{v_s}\prod_j g_t^{w_t}\right)^2+0^2$这一含零平方数分拆。

若$2\nmid u$则r^2存在$2\left(2^{\frac{u-1}{2}}\prod_s q_s^{v_s}\prod_j g_t^{w_t}\right)^2$这一均分平方数分拆,除此以外都是不含零的非均分平方数分拆。由引理3.2此时圆上的整点数目$N=8M(r^2)-4=\sum_{k=1}^{s}2^{k+2}\Delta_k+4$。

若$2\mid u$,则r^2共有$M(r^2)$个非均分平方数分拆,其中$\left(2^{\frac{u-1}{2}}\prod_s q_s^{v_s}\prod_j g_t^{w_t}\right)^2+0^2$是含零平方数分拆。此时圆上的整点数目$N=8M(r^2)-4=\sum_{k=1}^{s}2^{k+2}\Delta_k+4$。

(3)$h\geqslant 1,s=0$。

此时r^2只有不含零的非均分平方数分拆,共有$M(r^2)$个。由引理3.2,圆上的整点数目$N=8M(r^2)=2^{h+2}\prod_{i=1}^{h}(u_i+1)$。

(4)$h\geqslant 1,s\geqslant 1$。

与情况(3)类似,由引理3.2,此时$N=8M(r^2)=2^{h+2}\prod_{i=1}^{h}(u_i+1)\left(\sum_{k=1}^{s}2^k\Delta_k+1\right)$。推论得证。

对于圆心为整点的圆,利用推论3.3可计算出其上的整点数。下面利用恒等式拆分平方数以及引理3.2的结论,给出确定圆上所有的整点的示例,其中整数的平方分拆过程详见文献[20]。

例 3.1　分别求圆$C(2,-1,22)$、圆

$C\left(2,-1,\sqrt{1568}\right)$、圆 $C\left(2,-1,\sqrt{1800}\right)$、圆 $C\left(2,-1,\sqrt{2205}\right)$、圆 $C\left(2,-1,\sqrt{43454125}\right)$上所有的整点。

解 (1)因 $22^2=2^2\times11^2$,由推论3.3知圆 $C(2,-1,22)$ 上共有4个整点:$(\pm22+2,-1)$,$(2,\pm22-1)$。

(2)因 $1568=2^5\times7^2$,由推论3.3知圆 $C\left(2,-1,\sqrt{1568}\right)$上共有4个整点:$(\pm28+2,\pm28-1)$。

(3)因 $1800=2^3\times3^2\times5^2$,由推论3.3知圆 $C\left(2,-1,\sqrt{1800}\right)$上共有12个整点,分析如下:

因 $5^2=4^2+3^2=5^2+0^2$,知 $2^2\times3^2\times5^2=(2\times3\times4)^2+(2\times3\times3)^2=(2\times3\times5)^2+0^2$是其所有的平方数分拆,$2^3\times3^2\times5^2=(2\times3\times4+2\times3\times3)^2+(2\times3\times4-2\times3\times3)^2=(2\times3\times5)^2+(2\times3\times5)^2$是其所有的平方数分拆。故点 $(\pm42+2,\pm6-1),(\pm6+2,\pm42-1)$,$(\pm30+2,\pm30-1)$是圆 $C\left(2,-1,\sqrt{1800}\right)$ 上所有的整点。

(4)因 $2205=3^2\times5\times7^2$,由推论3.3知圆 $C\left(2,-1,\sqrt{2205}\right)$上共有8个整点,分析如下:

由 $5=2^2+1^2$,知 $2205=(2\times3\times7)^2+(3\times7)^2$是其唯一的平方数分拆。于是$(\pm42+2,\pm21-1)$,$(\pm21+2,\pm42-1)$是 $C\left(2,-1,\sqrt{2205}\right)$上所有的整点。

(5)因 $43454125=5^3\times13^2\times17\times11^2$,由推论3.3知圆 $C\left(2,-1,\sqrt{43454125}\right)$上共有 $8\times12=96$ 个整点。分析如下:

43454125模4余1且重数为奇数的素数为 $5=1^2+2^2$ 和 $17=1^2+4^2$,而 $5^2=5^2+0^2=3^2+4^2$,模4余1且重数为偶数的素数为 $13=2^2+3^2$。

利用引理3.2,$5^3\times13^2\times17\times11^2$ 共有12种平方数分拆,可按下述方法确定:

$5^3=(5\times2+0\times1)^2+(5\times1-0\times2)^2=10^2+5^2$;

$5^3=(3\times2+4\times1)^2+(3\times1-4\times2)^2=10^2+5^2$;

$5^3=(3\times2-4\times1)^2+(3\times1+4\times2)^2=2^2+11^2$。

去除重复表示可得到 5^3 的所有平方数分拆:

$$5^3=10^2+5^2=2^2+11^2。$$

于是,有如下分析(参见文献[20])。

$$5^3\times17=(10\times1+5\times4)^2+(10\times4-5\times1)^2=30^2+35^2;$$

$$5^3\times17=(10\times1-5\times4)^2+(10\times4+5\times1)^2=10^2+45^2;$$

$$5^3\times17=(2\times1+11\times4)^2+(2\times4-11\times1)^2=46^2+3^2;$$

$$5^3\times17=(2\times1-11\times4)^2+(2\times4+11\times1)^2=42^2+19^2。$$

因 $13^2=13^2+0^2=12^2+5^2$,则有

$$5^3\times17\times13^2=(13\times30+0\times35)^2+(13\times35-0\times30)^2=390^2+455^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(13\times10+0\times45)^2+(13\times45-0\times10)^2=130^2+585^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(13\times46+0\times3)^2+(13\times3-0\times46)^2=598^2+39^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(13\times42+0\times19)^2+(13\times19-0\times42)^2=546^2+247^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(12\times30+5\times35)^2+(12\times35-5\times30)^2=535^2+270^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(12\times30-5\times35)^2+(12\times35+5\times30)^2=185^2+570^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(12\times10+5\times45)^2+(12\times45-5\times10)^2=345^2+490^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(12\times10-5\times45)^2+(12\times45+5\times10)^2=105^2+590^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(12\times46+5\times3)^2+(12\times3-5\times46)^2=567^2+194^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(12\times46-5\times3)^2+(12\times3+5\times46)^2=537^2+266^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(12\times42+5\times19)^2+(12\times19-5\times42)^2=599^2+18^2;$$

$$5^3\times17\times13^2=(12\times42-5\times19)^2+(12\times19+5\times42)^2=409^2+438^2。$$

由引理3.2知上述便为 $5^3\times17\times13^2$ 的所有12种平方数分拆,并且每一种各扩大11倍即为 $5^3\times13^2\times17\times11^2$ 的全体平方数分拆。由这些平方数分拆可对应得到圆 $C\left(2,-1,\sqrt{43454125}\right)$ 上的全体整点,

由于这些整点全是不含零的非均分分拆,每种分拆可对应8个圆上的整点,故圆上共有整点$8\times12=96$个。

3.2 圆心为非整有理点的圆

由命题1.1,可以将圆沿着原点为起始点终点为整点的向量平移而不改变圆上的整点数,即圆$C(\alpha,\beta,r),(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2\setminus\mathbf{Z}^2$与圆心坐标分量不超过1的圆$C\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c},r\right),a\leqslant b\leqslant c$,两个圆上整点的存在性等价,其中$a$、$b$、$c$不全相等且$(a,b,c)=1$。因$\left(x-\frac{a}{c}\right)^2+\left(y-\frac{b}{c}\right)^2=r^2$有整数解等价于$(cx-a)^2+(cy-b)^2=c^2r^2$有整数解,令

$$cx-a=\pm X,cx-b=\pm Y,c^2r^2=T,$$

易知若后者有整数解则$c|(a^2+b^2-T)$。于是问题转化为求圆$X^2+Y^2=T$上的整点(X,Y),其中$X\equiv\pm a(\mathrm{mod}c),Y\equiv\pm b(\mathrm{mod}c),T>0,T\equiv a^2+b^2(\mathrm{mod}c)$。

由上述分析易得圆心为非整有理点的圆上存在整点的必要条件。

推论3.4 对于圆心$(\alpha,\beta)\in\mathbf{Q}^2\setminus\mathbf{Z}^2$的圆$C(\alpha,\beta,r),\frac{a}{c},\frac{b}{c}$分别为$\alpha$、$\beta$的小数部分,圆上存在整点的必要条件为$c^2r^2$是可拆的正整数,且$c^2r^2-(a^2+b^2)\equiv0(\mathrm{mod}c)$。

对于满足上述必要条件的圆,可利用引理3.2和推论3.3先确定圆$C(X,Y,cr)$上的所有整点,再在其中选取满足$X\equiv\pm a(\mathrm{mod}c),Y\equiv\pm b(\mathrm{mod}c)$的整点。

例3.2 判断圆$C\left(\frac{3}{10},\frac{25}{10},\sqrt{\frac{13}{100}}\right)$、圆$C\left(\frac{3}{10},\frac{25}{10},\sqrt{\frac{884}{100}}\right)$、圆$C\left(\frac{3}{10},\frac{25}{10},\sqrt{\frac{754}{100}}\right)$、圆$C\left(\frac{1}{10},\frac{2}{10},\sqrt{\frac{469\,625}{100}}\right)$上是否存在整点,存在则给出该圆上所有的整点。

解 前3个圆中,$\frac{3}{10}$、$\frac{5}{2}$的小数部分通分后分别为$\frac{3}{10}$、$\frac{5}{10}$,而$3^2+5^2=34,34\equiv4(\mathrm{mod}10)$。

(1) $13\equiv3(\mathrm{mod}10)$,由推论3.4知圆$C\left(\frac{3}{10},\frac{5}{2},\sqrt{\frac{13}{100}}\right)$上不存在整点。

(2) $884\equiv4(\mathrm{mod}10)$,由引理3.2知$884=2^2\times13\times17$有$884=22^2+20^2=28^2+10^2$共2种平方数分拆,但这2种分拆都无法得到模10余$\pm3$和$\pm5$的组合,故圆$C\left(\frac{3}{10},\frac{25}{10},\sqrt{\frac{884}{100}}\right)$上不存在整点。

(3) $754\equiv4(\mathrm{mod}10)$,由引理3.2知$754=2\times13\times29$有$754=27^2+5^2=23^2+15^2$共2种平方数分拆,而这2种分拆都是模10余$\pm3$和$\pm5$的组合。因$27=3\times10-3,5=1\times10-5;-23=-2\times10-3,15=2\times10-5$,由此得到圆$C\left(\frac{3}{10},\frac{25}{10},\sqrt{\frac{754}{100}}\right)$上的所有整点:$(3,1+2),(-2,2+2)$即$(3,3),(-2,4)$。

(4) $359\,125\equiv5(\mathrm{mod}10),1^2+2^2=5$。由例3.1知$359\,125=5^3\times17\times13^2$共有以下12种平方数分拆:

$$5^3\times17\times13^2=390^2+455^2=130^2+585^2;$$
$$5^3\times17\times13^2=598^2+39^2=546^2+247^2;$$
$$5^3\times17\times13^2=535^2+270^2=185^2+570^2;$$
$$5^3\times17\times13^2=345^2+490^2=105^2+590^2;$$
$$5^3\times17\times13^2=567^2+194^2=537^2+266^2;$$
$$5^3\times17\times13^2=599^2+18^2=409^2+438^2。$$

而这12种分拆中满足模10余±1和±2的组合为$598^2+39^2,599^2+18^2,409^2+438^2$这3种。因$39=4\times10-1$,$598=60\times10-2$;$599=60\times10-1$,$18=2\times10-2$;$409=41\times10-1,438=44\times10-2$,故圆$C\left(\frac{1}{10},\frac{2}{10},\sqrt{\frac{359\,125}{100}}\right)$上的所有整点为:$(4,60),(60,2),(41,44)$。

3.3 圆心为非有理点的圆

圆心是有理点的圆上若存在有理点,则有无穷多个有理点,在这些有理点中寻找整点的困难是显见的。但对于圆心是非有理点的圆,在有理点中寻找整点却是可行的:由命题2.1,需要判断的有理点至多有2个,因此通过定理2.2、定理2.3、推论2.4、定理2.5等先确定圆上的有理点再判断这些有理点是否为整点。

值得一提的是,利用某些圆上至多有1个有理点或者圆上的2个有理点不可能同时为整点的结论,可以得到推论3.5。

推论3.5 存在一个同心圆的集合K,使得

(1)集合K中任一圆的圆周上恰有1个整点;

(2)对于任意的正整数n,集合K中都恰有一个圆,其内部有且只有n个整点。

证明　设圆的圆心为(α,β),对于任意的正整数n,集合K可按如下方式取圆心并构造集合中的同心圆:

(1)令$(\alpha,\beta)\notin\mathbf{Q}^2$是平行于坐标轴的有理直线上的非有理点,且有理坐标分量$\alpha\neq\frac{k}{2},k\in\mathbf{Z}$(或$\beta\neq\frac{k}{2},k\in\mathbf{Z}$)。由于对任意2个整点,其中点的坐标分量必为$\frac{k}{2},k\in\mathbf{Z}$的形式,故此时无论$r$如何取值,圆$C(\alpha,\beta,r)$上至多有一个整点;

(2)令$(\alpha,\beta)\notin\mathbf{Q}^2$不在有理直线上。此时由命题2.1知无论$r$如何取值,圆$C(\alpha,\beta,r)$上至多有1个整点。

依循上述2种方式构造的同心圆,平面内所有的整点到其圆心的距离均不相同。于是取这些距离的增序排列为半径,便可依次确定圆上恰有一点且内部恰有n个整点的圆集合$K(n=1,2,3,\cdots)$。推论得证。

注　证明中的第1种构造方法亦见文献[9],同时,文献[13]以$\left(\sqrt{2},\frac{1}{3}\right)$为圆心给出了第2种构造方法的一个特例,本文的证明更具一般性。

4　结束语

本文通过以圆心是否为有理点、是否在有理直线上、半径的平方是否可拆等指标作为分类条件,系统地讨论了圆上有理点和整点的个数问题。命题1.3利用本原勾股数及几何法得到了圆心有理时,圆上有理点若存在则有无穷多个。定理1.5给出了圆心为有理点的圆上有(无穷多个)有理点的充要条件。

定理2.2、2.3、推论2.4给出了圆心不是有理点但位于一条有理直线上时,圆上至多有2个有理点,并给出了判断圆上没有/恰有1个/恰有2个有理点的方法。定理2.5给出了圆心不在有理直线上时,圆上恰有1个有理点的充要条件。

推论3.1、3.3给出了圆心为整点时,圆上整点的个数的计数方法——由半径平方的平方数分拆的种数决定,具体依r^2的素因数分解而定,进一步地可根据圆的对称性判断圆上整点的个数。对于圆心为非整有理点的圆,推论3.4给出了圆上存在整点的必要条件,利用上述结论可从圆的无穷多个有理点中迅速找出整点。推论3.5得到了构造圆上恰有1个整点且内部恰有n个整点同心圆的集合的一般性方法($n=1,2,3,\cdots$)。

参 考 文 献

[1] 李斐.一类无非平凡有理整点的椭圆曲线$y^2=x(x-p)(x-q)$[J].首都师范大学学报(自然科学版),2014,35(2):5-11.

[2] 管训贵.椭圆曲线$y^2=x^3+(p-4)x-2p$的整数点[J].数学进展,2014,43(4):521-526.

[3] 罗文俊,晏才全.关于不定方程$ax^2+by^2=cz^2$的整数解[J].贵州农学院学报,1993,12(2):98-99.

[4] 戴中林.求一类不定方程$x^2+y^2=z^m$的正整数解[J].大学数学,2022,38(5):108-112.

[5] 管训贵.椭圆曲线$y^2=x(x-p)(x-q)$的整数点(Ⅱ)[J].数学的实践与认识,2018,48(4):272-279.

[6] 柯召,孙琦.不定方程中的代数数论方法[J].数学通报,1983,7:23-26.

[7] 吕登峰.一类含不定非线性项奇异椭圆方程的正解[J].山西大学学报(自然科学版),2010,33(3):321-325.

[8] 卢爽.直线上整点个数及圆上有理点个数问题[J].中学生数学,2011,23:30-32.

[9] 刘凯年.圆周上有理点的分布:全国数学竞赛一道试题的推广[J].数学通报,1998,10:18-20.

[10] 吴朝阳.圆周上的有理点[J].中国科技教育,2017,1:74-75.

[11] 吴朝阳.圆周上的有理点(续)[J].中国科技教育,2017,11:74-75.

[12] 饶明贵,邢家省.单位圆上有理点的稠密性和圆周率是无理数的证明[J].河南工程学院学报(自然科学版),2008,20(4):68-72.

[13] HAVIL J. The irrationals [M]. Princeton: Princeton University Press,2012.

[14] PAUL J N. An imaginary tale: the story of $\sqrt{-1}$[M]. Princeton:Princeton University Press,1998.

[15] 闵嗣鹤,严士健.初等数论[M].北京:高等教育出版社,2003.

[16] DOUGLAS W M. An alternative characterisation of all primitive Pythagorean triples [J]. The Mathematical Gazette,2001,85(503):273-275.

[17] 潘承洞,潘承彪.初等数论[M].北京:北京大学出版社,2013.

[18] 冯克勤.代数数论[M].北京:科学出版社,2000.

[19] 柯召,孙琦.数论讲义[M].北京:高等教育出版社,1986.

[20] 朱一心.一个整数表示成两个整数平方和的唯一性[J].首都师范大学学报(自然科学版),2015,36(6):1-5+10.

(责任编辑:马田田)