DOI:10.19789/j.1004-9398.2024.01.003
文献引用:赵旭鹰,章歆婷,蒋文锦.数学思想与课程思政有机融合的教学研究探索[J].首都师范大学学报(自然科学版),2024,45(1):20-28.
ZHAO X Y, ZHANG X T, JIANG W J. Exploring the integration of mathematical thought with ideological and political education in teaching research[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2024,45(1):20-28.

数学思想与课程思政有机融合的教学研究探索*

赵旭鹰**, 章歆婷, 蒋文锦

(首都师范大学数学科学学院, 北京 100048)

摘要:本文旨在研究一种融合数学思想与课程思政的教学模式,并应用于高校计算数学/信息与计算科学专业课程。该模式以数学思想为纽带,通过引入与之相关的数学典故,采用探究式教学,为本科和研究生阶段数学专业课教学提供了一种创新模式,促进学生对数学概念的理解和数学思想的领悟,培养学生的综合素养、道德品质和社会责任感。

关键词:计算数学;信息与计算科学;数学思想;课程思政
中图分类号:N945.2;O13 **文献标识码**:A

Exploring the integration of mathematical thought with ideological and political education in teaching research*

ZHAO Xuying**, ZHANG Xinting, JIANG Wenjin

(School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract: This paper aims to investigate an instructional approach that integrates mathematical thinking with ideological and political education, and applies it to courses in computational mathematics/information and computer science majors. This approach serves as a bridge between mathematical thinking and pedagogical ideologies, incorporating relevant mathematical anecdotes and employing an inquiry-based teaching methodology. It provides an innovative approach to teaching undergraduate and graduate-level mathematical courses, promoting students' understanding of mathematical concepts and the grasp of mathematical thinking. Additionally, it nurtures students' comprehensive abilities, ethical qualities, and a sense of social responsibility.

Keywords: computational mathematics; information and computing science; mathematical thought; curriculum ideological and political
CLC: N945.2; O13 **DC**: A

0 引 言

在2016年12月的全国高校思想政治工作会议上,习近平总书记对课程思政工作进行了科学概括和集中阐述,指出要坚持把立德树人作为中心环节,把思想政治工作贯穿教育教学全过程,实现全

收稿日期:2023-06-25
* 国家自然科学基金项目(12071313);北京市自然科学基金项目(Z210003);首都师范大学2022年本科教学建设与改革项目
** 通信作者:6732@cnu.edu.cn

程育人、全方位育人[1]。这要求高校教育者充分发挥课堂教学在育人工作中的重要作用,将思想政治教育贯穿于学校教育教学的全过程[2]。研究课程思政是教育界在新形势下面临的新课题,是每一位教育工作者在新形势下需要勇于承担的重要任务[3]。

众所周知,大学阶段的数学专业课与人文社会科学课程有所不同,数学专业课更加注重理论推导、证明和抽象思维,强调逻辑思维和数学结构的建立[4-5]。要想学好数学专业课,不能只停留在公式、概念和定理等书面呈现的内容上,还需对数学原理和数学思想进行深刻理解,从不同角度思考概念的定义和特征,追溯其起源和发展,深入探究其在数学体系中的作用和关系。尽管本科和研究生数学专业课难度较高,但其中的数学思想与初等数学内容存在共通之处。深刻理解数学内容离不开数学思想的引导[6-7]。进一步,数学思想也是做科研的关键。

目前,课程思政已引起了许多学者的关注。对于数学专业课,常见思路是把数学文化历史与课程思政有机融合在一起[8-12]。在每一章节的数学教学中,笔者尝试将数学思想作为纽带,将典型的初等数学内容与体现相同数学思想的中国数学文化相融合。这种独特的教学方法正是探索有机融合课程思政的实践,通过数学的学习,引导学生深入思考课程思政的内涵,使其在学习数学的过程中也能够更好地理解和体会到课程思政的重要意义。这种融合模式为学生提供了更深入的学习体验,通过对比学习当前高等数学内容与学生之前学习的初等数学内容,学生能体会数学思想的共通性并加深对当前高等数学内容的理解。对一个具体的高等数学内容,其直接相关的数学典故往往不容易找到,但与其数学思想相同的数学典故相对就比较多,这种融合模式也因此能提供更丰富的数学课程思政案例,在此过程中增强学生的爱国情感,激发学生的学习兴趣,培养学生的爱国情感和责任意识。数学思想与课程思政的融合方法不仅能够拓展数学教育的教学内容,还能够促进数学教育与人文社会科学的交叉融合,推动数学学科的综合发展。此外,深入研究数学思想与课程思政的关系,可以为数学教育的改革和创新提供理论依据和实践指导,促进学生全面发展和综合素质提升。下面,举例介绍说明上述融合的方法。

1 数学思想与教学融合内容

1.1 分而治之思想、等价未必等效思想与多项式插值

1.1.1 数学思想导入

《孙子算经》是公元5世纪中国南北朝时期的数学著作,包含了影响深远的“物不知数”问题,其涵盖的分而治之思想与春秋时期军事战略家孙武的《孙子兵法》中的理念相呼应[13]。在数学中,这一思想指导将复杂问题分解为相似的子问题,通过独立求解子问题,最终求得原问题的解。中国剩余定理是一个运用了“分而治之”思想的典范。对于一元线性同余方程组中的每一个方程式,中国剩余定理的思想是将复杂的问题分解为一系列简单的同余方程,然后通过独立求解每个同余方程,最后再组合起来得到原问题的解。分而治之思想不仅为解决问题提供了方法,还使求解过程更加高效。这种思想在各种领域中得到了体现,如矩阵特征值计算、稀疏线性系统求解、常微分方程初值问题数值解等[14]。

等价未必等效是冯康先生学术生涯中非常重要的思想,并于1965年发表了论文“基于变分原理的差分格式”[15],该文奠定了有限元方法严格的数学基础,为有限元方法的实际应用提供了可靠的理论保证。这一思想强调数学上的等价并不必然导致实际效果的等效。在20世纪50—60年代,冯康等学者通过解决水坝应力问题,独立于西方提出了有限元方法。与差分法直接对原微分方程进行离散逼近不同,有限元方法采用了变分形式,将原微分方程进行离散化。虽然数学上原微分方程和变分形式是等价的,却引出了2类不同的计算方法。有限元方法的灵活性更高,不受网格限制,特别在处理复杂区域和自适应计算方面表现突出。冯康先生生动地将有限元方法描述为“分整为零、裁弯取直、以简驭繁、化难为易”。

总而言之,孙子的分而治之思想和冯康的等价未必等效思想,共同为数学和计算数学领域带来了宝贵的启示与财富。

1.1.2 相关教学内容

设在区间$[a,b]$上给定$n+1$个不同的点$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$上的函数值$y_i=f(x_i),(i=0,1,\cdots,n)$,求满足这些条件的次数不超过$n$的插值多项式$L_n(x)$[16]。

首先,可以证明该问题的解的存在唯一性,设

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

使得

$$L_n(x_i) = y_i, (i = 0, 1, \cdots, n)。$$

求解该多项式只需确定其中系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 即可。故将其代入上式中,得

$$L_n(x) = (1, x, x^2, \cdots, x^n)(a_0, a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}},$$

写成矩阵形式为 $\boldsymbol{At} = \boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}。$$

该方程组为范德蒙型方程组。由范德蒙行列式计算,知

$$\det(\boldsymbol{A}) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \neq 0,$$

故方程组 $\boldsymbol{At} = \boldsymbol{b}$ 的解存在唯一,由此可以得到上述插值多项式 $L_n(x)$ 是存在唯一的。根据克拉默法则,可得插值多项式表达式为

$$L_n(x) = \frac{d_0}{d} + \frac{d_1}{d} x + \cdots + \frac{d_n}{d} x^n,$$

其中 $d = \det(\boldsymbol{A})$,

$$d_j = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{j-1} & y_0 & x_0^{j+1} & x_0^{j+2} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{j-1} & y_1 & x_1^{j+1} & x_1^{j+2} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{j-1} & y_n & x_n^{j+1} & x_n^{j+2} & x_n^n \end{vmatrix},$$

$$j = 0, 1, \cdots, n。$$

在本文中把 $L_n(x)$ 的这种表示形式称为范德蒙方程表示形式。上述表达式的计算量(指乘除法计算次数)可达 $O((n+1)!)$,显然计算量过大。如果采用高斯消去法求解上述范德蒙型方程组,其计算量将是 $O(n^3)$。

为了简化计算量,可以构造特殊的插值多项式,如拉格朗日插值多项式。该多项式通过分而治之的思想构造一组 n 次多项式基函数

$$l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x),$$

其中

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \cdots, n,$$

从而可计算得到

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}。$$

因此,要求的插值多项式为 $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$,即为拉格朗日插值多项式,其计算量(指乘除法计算次数,下同)仅为 $2n(n+1)$,相较于之前很大程度地降低了计算量。

拉格朗日插值法将一个多阶多项式拆分为多个多阶多项式的和,拉格朗日插值多项式结构紧凑,在理论分析中非常重要,但是当插值节点增加时,需要全部重新计算,比较繁琐。而牛顿插值法解决了新增节点需要重新计算的问题,其计算方式为

$$L_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}),$$

余项为 $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x)$,式中,$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 为 k 阶均差,$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$。

牛顿插值的计算量是 $O(n^2)$,其中计算各阶差商的乘除法次数为 $\frac{1}{2} n(n+1)$,得到各阶差商后再结合秦九韶算法思想,可得牛顿插值总的乘除法次数为 $\frac{1}{2} n(n+3)$,略小于拉格朗日插值的计算量。更重要的是,牛顿插值多项式可以逐次生成,当插值节点增加一个节点,该方法可以沿用之前的插值多项式结果,在原来的牛顿插值函数的基础上,增加一个新的函数。

由于该问题的解是存在唯一性的,因此 $L_n(x)$ 的各种表示形式一定是等价的。换句话说,多项式插值问题的解有3种等价的表达形式,即范德蒙方程表示形式、拉格朗日插值形式和牛顿插值形式,但后2者的计算量会明显小于第1种形式。可以看到,求解相同的问题使用不同的方法,计算量可能会有很大的差异,这正反映了等价未必等效的观点。

从上述内容不难发现,如果要求解一个范德蒙型方程组,根据本节讲的内容,可以求等价的牛顿

插值问题,进而获得范德蒙方程组的解。事实上,当今求解范德蒙型方程组的快速算法就是通过求解其等价的牛顿插值问题而获得的,这里面蕴含的思想正是逆向使用了等价未必等效的观点。

1.2　消元思想与高斯消去法

1.2.1　数学思想导入

方程中文一词出自《九章算术》,第8卷名为方程。其中方意为并列,程意为用算筹表示竖式。《九章算术》中提出了三元一次方程组问题,并采用消元法进行求解[17]。消元法是解方程组的基本思想和方法,主要目标是通过一系列代数运算,如加减乘除和代入等,逐步消除未知数的系数,从而求得方程组的解。中学时期常运用于鸡兔同笼问题中。

大约在1 500年前,《孙子算经》中记载这个有趣的问题:“今有雉兔同笼,上有三十五头,下有九十四足,问雉兔各几何?”译文即:若干只鸡和兔在同一个笼子里,从上面数,有35只头,从下面数有94只脚,问笼中各有多少只鸡和兔[18]。中学阶段,鸡兔同笼问题作为典型的二元一次方程组问题引出了消元思想在解方程组中的运用。设笼中有鸡x只,兔y只,可根据数量关系列出方程组为

$$\begin{cases} x+y=35, & (1) \\ 2x+4y=94。 & (2) \end{cases}$$

对应解法可用《九章算术》中第8章中提出的方程术,即解线性方程组消元法:“为术之意,令少行减多行,反复相减,则头位必先尽。上无一位,则此行亦阙一物矣。然而举率以相减,不害余数之课也。”根据这种消元思想,用4×式(1)−式(2)得$2x=46$,将二元一次方程组转化为一元一次方程,求解出x,再根据等量关系求解y,即可得到该问题的解。

1.2.2　相关教学内容

消元思想,即设法把含有多个未知数的多个方程,转化为含有一个未知数的一个方程,进而求解。其本质手法是通过已知的等量关系,化多元为一元,化未知为已知,化复杂为简单。这一思想在数值分析课程中高斯消元法这一节中得到了充分体现。在数值分析课程中,高斯消元法是一种通用的求解n元线性方程组的方法。

如方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n。 \end{cases}$$

通过位于其下面的每一个方程中减去前面的方程的合适倍数的方法,可以得到形如三角形的方程组

$$\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1n}x_n=b'_1, \\ a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \cdots\cdots \\ a'_{nn}x_n=b'_n。 \end{cases}$$

进而通过代换依次解出$x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$。至此,得到了消元法解线性方程组的一般方法,而不再局限于初等数学的代入消元法、加减消元法和换元消元法等特定做法的消元。引入矩阵后,上述过程等价于矩阵的行变换,基本思想是分离系数,顺序消元,这种方法也被称为高斯消元法。

高斯消元法出现在19世纪初,以德国数学家高斯命名,是解线性方程组中利用矩阵工具的一种方法。有趣的是,这一思想与《九章算术》的方程术思想非常相似[19]。后者给出的古代解线性方程组的方法,是中国古代人民的智慧结晶,是中国数学的非凡成就之一,比欧洲数学领先1 000多年。这种相似性体现了数学思想在不同文化和历史背景中的独立发展和重要性。基于高斯消去法的基本思想而改进、变形得到的主元素消去法和三角分解法仍是目前计算机上常用的有效算法。

1.3　降维思想与抛物型方程数值解

1.3.1　数学思想导入

降维思想是一种重要的数学思想,其中心思想是将高维空间中的数学问题转化为低维空间中的问题,以简化计算或分析的复杂度,并提取出主要的特征或信息。

在初中数学空间图形的教学中,通常利用数学变换将三维空间上的问题降为平面上的二维问题。比如在一个圆柱体面上,给出蚂蚁位置A和终点位置B,问蚂蚁爬向终点的最短距离。可以考虑把圆柱体展开成矩形,在二维平面上进一步用平面几何思维考虑问题。另外利用平面角、三视图的知识,以及根据三视图选出对应的物体,也同样运用了降维思想。该思想不仅可以运用于初等数学中的几何维度问题,也可以延伸到其他方向,如将一般化为特殊、抽象化为具体,并不拘泥于概念上对于维

度的局限。

1.3.2 相关教学内容

考虑微分方程数值解中求解条件二维热传导方程的交替方向隐格式中体现的降维思想。

交替方向隐(alternating direction implicit,ADI)格式将每一时间层的计算分成2步进行,而每一步具有一维格式的计算非常简单的特点,因而每一时间层上所需的工作计算量较少,如Peaceman-Rachford格式。1955年Peaceman和Rachford[20]提出:把从第n层到第$n+1$层的计算分成2步进行。第1步从第n层到第$n+\frac{1}{2}$层,$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$用第$n+\frac{1}{2}$层上的差商来近似,而$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$用第$n$层上的差商近似;为了保持对称性,第2步从第$n+\frac{1}{2}$层到第$n+1$层,$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$用第$n+\frac{1}{2}$层上的差商来近似,而$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$用第$n+1$层上的差商近似。因此有

$$\begin{cases}\dfrac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}-u_{jk}^{n}}{\tau/2}=\dfrac{1}{h^2}\left(\delta_x^2 u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+\delta_y^2 u_{jk}^{n}\right),\\ \dfrac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2}=\dfrac{1}{h^2}\left(\delta_x^2 u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}+\delta_y^2 u_{jk}^{n+1}\right)。\end{cases}$$

上述格式一般称为Peaceman-Rachford交替方隐式格式,简称P-R格式。显然,从第n层到第$n+1$层,P-R格式分2步进行,每步仅是单方向上的隐式,是一维问题,其方程组为3对角线性方程组,故可使用追赶法快速求解,所以计算量较少。P-R格式本质上就是将二维问题转化成多个一维问题交替求解,且每个一维问题都使用追赶法快速求解。

1.4 外推思想与数值积分

1.4.1 数学思想导入

外推法是一种数值计算方法,用于根据已知的数据点或近似值推测出更精确的数值结果。林群院士在外推法的研究中提出了许多重要的理论和算法,建立了包括超收敛、校正和外推在内的高精度算法的系统理论。本文通过理查森外推算法计算π的近似值来详细阐述外推的思想。由sin$x$的Taylor展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,$$

得

$$n\sin\frac{\pi}{n}=\pi-\frac{\pi^3}{3!\,n^2}+\frac{\pi^5}{5!\,n^4}-\cdots,$$

设步长$h=\frac{\pi}{6}$,$F(h)=6\sin(\frac{\pi}{6})$,则有

$$F(h)=\pi-\frac{\pi}{6}h^2+\frac{\pi}{120}h^4-\cdots,$$

$$F(\frac{h}{2})=\pi-\frac{\pi}{6}(\frac{h}{2})^2+\frac{\pi}{120}(\frac{h}{2})^4-\cdots。$$

由此构造新的表达式

$$F_1(h)=\frac{4F(\frac{h}{2})-F(h)}{3}=\pi-\frac{\pi}{120}\frac{1}{4}h^4+\cdots。$$

可见计算π的近似值的算法$F(h)$的截断误差是$O(h^2)$,而近似值的算法$F_1(h)$的截断误差是$O(h^4)$。通过使用外推法不断折半步长h,进一步细化计算,从而提高计算的精度,得到计算π的算法序列。每一次外推都可以提供更高阶的截断误差控制,从而得到更精确的结果。

1.4.2 相关教学内容

考虑通过外推思想构造高精度的数值积分格式[21]。将外推思想推广到一般情况,设$F(h)$是计算$F(0)$的一种算式,带截断误差的表达式为

$$F(h)=F(0)+a_p h^p+O(h^s),\ s>p。$$

式中,a_p与h无关。如果用h和$\frac{h}{q}(q>1)$2种步长分别计算$F(h)$和$F\left(\frac{h}{q}\right)$,则有

$$F\left(\frac{h}{q}\right)=F(0)+a_p\left(\frac{h}{q}\right)^p+O(h^s),$$

消去h^p,有

$$F_1(h)=\frac{q^p F\left(\frac{h}{q}\right)-F(h)}{q^p-1}=F(0)+O(h^s)。$$

该计算过程即为理查森外推算法。只要知道$F(h)$的更加完整的关于h幂的展开式,就能重复使用理查森外推算法,直到截断误差达到容许误差。

考虑计算定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值,把区间$[a,b]$等分成n个小区间$[x_i,x_{i+1}]$,$h=\frac{b-a}{n}$,则复合梯形公式为

$$T_n=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]=$$

$$\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right];$$

把区间$[a,b]$作$2n$等分,记$[x_i,x_{i+1}]$的中点$x_{i+\frac{1}{2}}=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$,则复合梯形公式为

$$T_{2n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)\left[f(x_i)+2f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)+f(x_{i+1})\right]=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{h}{2}\right)\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]+\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=$$

$$\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)。$$

此时,可以计算二者的误差分别为

$$I-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta_1),$$

$$I-T_{2n}=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2f''(\eta_2),$$

可知T_n的截断误差大致与h^2成正比。

当n充分大时,$f''(\eta_1)\approx f''(\eta_2)$,则$\frac{I-T_n}{I-T_{2n}}\approx 4$。

即当步长再二等分后,截断误差将减至原有误差的$\frac{1}{4}$,移项整理可得

$$I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n),$$

则可得到更高精度的求积公式

$$T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n,$$

即为复化辛普森公式:$S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$。

同理,根据复化辛普森公式的误差余项

$$I-S_n=-\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(\eta),\eta\in[a,b]。$$

又可推出

$$I-S_{2n}\approx\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n)。$$

进一步,可得到更高精度的复化科特斯公式

$$C_n=S_{2n}+\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n)=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n。$$

类似地,还可以推出更高精度的龙贝格求积公式

$$R_n=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n。$$

1.5 归纳思想与常微分方程数值解的绝对稳定性

1.5.1 数学思想导入

刘徽(约225—295年),魏晋时期伟大的数学家,是中国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人,在《九章算术注》中多次运用归纳推理法。

哥德巴赫猜想最初也是通过归纳法得出的。1742年,德国数学家哥德巴赫对一些奇数作了如下分解

$$79=53+19+7,25=13+7+5,$$

$$461=449+7+5,15=3+5+7,\cdots。$$

于是大胆提出猜想:所有>5的奇数都可以分解为3个素数的和,他将此猜想告诉了欧拉,欧拉肯定了他的猜想,并进一步将此猜想叙述为:4以后的每个偶数都可以分解为2个素数的和。

华罗庚是中国最早从事哥德巴赫猜想的数学家,于1936—1938年赴英留学,师从哈代研究数论,并开始研究哥德巴赫猜想,验证了对于几乎所有的偶数猜想。1950年,华罗庚从美国回国,在中国科学院数学研究所组织数论研究讨论班,选择哥德巴赫猜想作为讨论的主题。参加讨论班的学生,如王元、潘承洞和陈景润等均在哥德巴赫猜想的证明上取得了相当好的成绩。1956年,王元证明了“3+4”;同年,前苏联数学家阿·维诺格拉朵夫证明了“3+3”;1957年,王元又进一步证明了“2+3”;潘承洞于1962年证明了“1+5”;1963年,潘承洞、巴尔巴恩与王元又都证明了“1+4”;1966年,陈景润在对筛法作了新的重要改进后,证明了“1+2”,即他证明了任何一个充分大的偶数,都可以表示为2个数之和,其中一个是素数,另一个或为素数,或为2个素数的乘积,被称为陈氏定理。

1.5.2 相关教学内容

考虑常微分方程数值解中的Taylor级数法和显式Runge-Kutta法的绝对稳定性。先看几个例子[22]:

一阶的显式Runge-Kutta法就是向前Euler法,绝对稳定区域为

$$|1+\bar{h}|<1。$$

一阶Taylor级数法的绝对稳定区域也具有上述形式。

对于2阶的显式Runge-Kutta法,通过计算可知,改进Euler法的绝对稳定区域为

$$\left|1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2\right|<1。$$

2阶的Taylor级数法的绝对稳定区域也具有上述形式。为此猜测Taylor级数法和显式Runge-Kutta法的绝对稳定区域是否都具有下述形式

$$\left|1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{p!}\bar{h}^p\right|<1。$$

很多教材都写到显式Runge-Kutta法的绝对稳定区域具有上述形式。笔者发现这种表述不够准确。p阶Taylor级数法一定具有上述形式的绝对稳定区域,但是对于显式Runge-Kutta法不一定,只有$p=1,2,3,4$时的p级p阶显式Runge-Kutta法的才具有上述形式的绝对稳定区域。

对于p阶Taylor级数法,其形式为

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\cdots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_n),$$

将试验方程代入,有

$$y(x_{n+1})=\left(1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{p!}\bar{h}^p\right)y(x_n),$$

所以p阶Taylor级数法的稳定区域为

$$\left|1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{p!}\bar{h}^p\right|<1。$$

对于一般的m级p阶的显式Runge-Kutta法,代入试验方程$y'=\lambda y$,有:

$$\begin{aligned}
&K_1=\lambda y_n,\\
&K_2=\lambda\left(y_n+b_{21}\lambda h y_n\right)=\lambda P_1(\lambda h)\,y_n,\\
&K_3=\lambda\left(y_n+h\sum_{j=1}^{2}b_{3j}K_j\right)=\\
&\qquad\lambda\left(y_n+b_{31}\lambda h y_n+b_{32}\lambda h P_1(\lambda h)\,y_n\right)=\\
&\qquad\lambda P_2(\lambda h)\,y_n,\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&K_m=\lambda P_{m-1}(\lambda h)\,y_n。
\end{aligned}$$

式中,$P_i(\lambda h)$是i次多项式,$b_{ij}(i=2,3,\cdots,m;\ 1\leqslant j<i)$为待定系数。记$\bar{h}=\lambda h$,从而

$$\begin{aligned}
&y_{n+1}=y_n+h\varphi\left(x_n,y_n,h\right)=\\
&y_n+\lambda h\left(\sum_{i=1}^{m}c_iP_{i-1}(\lambda h)\right)y_n=\\
&\left(\sum_{i=0}^{m}c_i^*\cdot\left(\bar{h}\right)^i\right)y_n\triangleq P_m\left(\bar{h}\right)y_n。
\end{aligned}$$

式中,$c_i(i=1,2,\cdots,m)$为待定系数。所以,一般的m级p阶的显式Runge-Kutta法的绝对稳定区域为$\left|P_m(\bar{h})\right|<1$。因为是$p$阶的Runge-Kutta,其局部截断误差是$O(h^{p+1})$,即

$$\begin{aligned}
&y(x_{n+1})=y(x_n)+h\varphi(x_n,y(x_n),h)+O(h^{p+1})=\\
&\qquad P_m(\bar{h})\,y(x_n)+O(h^{p+1})。
\end{aligned}$$

将$y(x_{n+1})$在x_n处展开,并将试验方程$y'=\lambda y$的解$y(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}$代入上式,有

$$y(x_{n+1})=\left(1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{p!}\bar{h}^p\right)y(x_n)+O(h^{p+1}),$$

所以有

$$P_m(\bar{h})=1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{p!}\bar{h}^p+O(h^{p+1})。$$

而$\bar{h}$任意,故$m\geqslant p$,说明m级显式Runge-Kutta方法的级数一定不超过m,且

$$P_m\left(\bar{h}\right)=1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{p!}\bar{h}^p+\sum_{i=p+1}^{m}c_i^*\left(\bar{h}\right)^i。$$

因此,m级p阶的显式Runge-Kutta法的绝对稳定区域为

$$\left|1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{p!}\bar{h}^p+\sum_{i=p+1}^{m}c_i^*\left(\bar{h}\right)^i\right|<1。$$

取$m=p$,即得p级p阶的显式Runge-Kutta法的绝对稳定区域为

$$\left|1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{p!}\bar{h}^p\right|<1。$$

又因为当$p>5$时,不存在p级p阶的显式Runge-Kutta公式,因此,只在$p=1,2,3,4$时,才会存在p级p阶的显式Runge-Kutta公式,此时其绝对稳定区域才有形如上式。

综上所述,只有p阶Taylor级数法和$p=1,2,3,4$时的p级p阶的显式Runge-Kutta公式才具有之前猜测的形式。

1.6 化归思想与可约/不可约矩阵的判定

1.6.1 数学思想导入

七桥问题及简化后形式如图1所示,18世纪初普鲁士的哥尼斯堡有一条河穿过,河上有2个小岛,有7座桥把2个岛与河岸联系起来。问一个步行者怎样才能不重复、不遗漏地1次性走完7座桥,最后回到出发点[23]。

著名数学家欧拉把每一块陆地考虑成一个点,连接2块陆地的桥以线表示如图。即对此采用了化归的思想,将具象的场景抽象转化成图的一笔画问题(图1)。他不仅解决了此问题,还给出了连通图可以一笔画的充要条件:图中连到一点的边数如果是奇数条,就称为奇点;如果是偶数条,就称为偶点。而要想一笔画成,必须中间点均是偶点,即要有来路则必有一条去路,奇点只可能在两端。因此任何图能一笔画成,要么没有奇点,要么奇点在两端,即奇

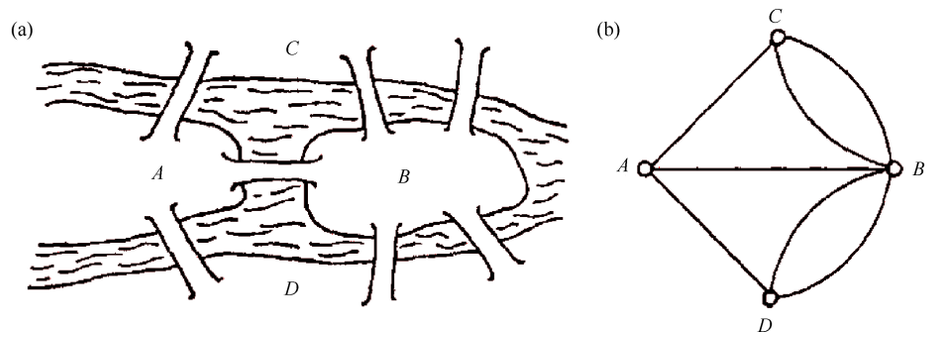


图1　七桥问题
(a)简化前;(b)简化后

点的数目不是0就是2个。七桥所成之图形中,没有一点含有偶数条数,因此上述的题目无法完成。

1.6.2　相关教学内容

判断矩阵是否可约。对于n阶方阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$而言,如果存在一个排列阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$为一个分块上三角阵,称矩阵$\boldsymbol{A}$是可约的,否则就称该矩阵是不可约的。不可约矩阵这个概念在判定求解线性方程组的迭代法是否收敛时非常重要。然而,直接根据上述定义去判定一个矩阵是否可约或不可约是比较困难的。为此,通过将此问题转化到一个强连通图中去判断,即$n(n>1)$阶复数方阵$\boldsymbol{A}$是不可约的,当且仅当与矩阵$\boldsymbol{A}$对应的有向图$S(\boldsymbol{A})$是强连通的。其中$S(\boldsymbol{A})$强连通是指图中任意2个节点i和j,从i到j和从j到i都存在有向路径。构造有向图的方式为:若$a_{ij}\neq 0$,则从节点i到节点j画一条有向线段(或有向曲线);若$a_{ij}=0$,则不画。

不可约矩阵不能分解成$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix}$的形式,其中$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_3$为方阵,$\boldsymbol{O}$为零矩阵。不可约矩阵的任意次幂总是不可约的,因此其右上角有一个零块。这个零块表明在$\boldsymbol{A}_1$所对应的顶点与$\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}_3$所对应的顶点之间无通路。

反之,如果一个有向图不是强连通的,则有1个不可达的顶点所对应的子块,经过适当的置换之后,对应的矩阵可以化为上面提到的形式。例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&1\\1&3&2&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},$$

经过矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

作变换得到

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\3&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}。$$

其中$\boldsymbol{A}$矩阵对应的有向图并非强连通,故这个矩阵是可约的。其对应有向图如图2所示。

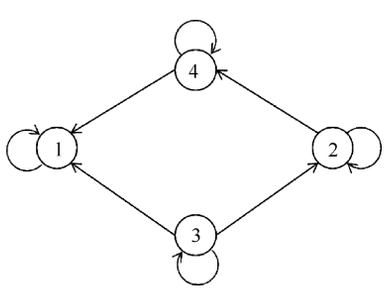


图2　矩阵A对应的有向图

2　课堂教学试点情况

文中提出的教学改革方案在微分方程数值解(本科生)和高等数值分析(研究生)的2个班级中进行了教学试点。这2门课程均是由学生根据自己的学习情况,自主进行选择。本次试点在授课过程中,尽可能先介绍知识的产生背景和背后蕴含的数学思想,并融入中国数学文化故事,共同讨论数学的实际应用、数学对于科技进步和社会发展的贡献等,激发学生对数学的兴趣和认知,增强学生的民族自豪感。

本次试点的课程部分内容需要软件实现以帮助学生更好地感受理论结果与实验结果之间的相同与不同之处。课程的教学过程中,尽量避免使用

Matlab,因为该软件的自主权并不在国内,容易面临一些限制。推广使用的是北太天元数值计算通用软件,该软件是国内计算数学同行最近几年开始研发的软件,其功能正在一点点变强大,为我国科研工作者提供具有国产自主知识产权的软件支撑。该软件瞄准替换,逐步解决科学计算软件面临的"卡脖子"问题,夯实我国通用型科学计算软件的基础。学生在使用该软件过程中,既能体会软件开发的艰辛,又能体会程序调试中不断纠错、发现bug的乐趣。

在试点课程结束后,学生们对课程内容和授课方式评价较高,2022和2023年春季学期信息与计算科学专业本科生必修课微分方程数值解课程评估分数分别为99.60和99.85分。

3 结 论

本文探讨了数学思想与课程思政融合的教学模式,用以创新计算数学/信息与计算科学专业教学。将数学思想与课程思政相结合,既培养了学生的学科素养,又激发了他们的创新思维和实践能力。同时,这一研究不仅展现了东西方数学思想的差异,还为日常教学提供了深远的启示。在实践中,认识到数学思想不仅是学科知识,更是抽象思维、逻辑推理和问题解决能力的体现,学生在这一融合模式下表现出更高的参与度和学习效果,与中国古代数学强调实际运用和亲身体验的精神不谋而合。

综上,本研究为数学与思政教育的融合提供了有益的实践示范,并对古代数学智慧在现代教育中的应用提供了新的思考框架,进而能够更好地传承和发扬中华民族的数学文化。通过该融合,不仅培养了学科素养,还为培养优秀人才提供了有力支持。然而,仍需要进一步的研究和实践,以不断完善这一教学模式,为我国数学教育事业的发展注入新的活力。

参 考 文 献

[1] 张烁,鞠鹏.习近平在全国高校思想政治工作会议上强调:把思想政治工作贯穿教育教学全过程开创我国高等教育事业发展新局面[N].人民日报,2016-12-09(1).

[2] 高德毅,宗爱东.从思政课程到课程思政:从战略高度构建高校思想政治教育课程体系[J].中国高等教育,2017,578(1):43-46.

[3] 张大良.课程思政:新时期立德树人的根本遵循[J].中国高教研究,2021,329(1):5-9.

[4] 冯淑霞,黎景辉,梁志斌,等.中学数学和大学数学的本质区别对学习和教学的影响[J].数学通报,2020,59(3):1-6.

[5] 冯淑霞,黎景辉,梁志斌,等.中学数学和大学数学的本质区别对学习和教学的影响(续)[J].数学通报,2020,59(4):7-10+17.

[6] 赖诗评,谢有为.数学思想方法在高等数学教育中的作用分析[J].吉林广播电视大学学报,2020,227(11):97-98.

[7] 吴增生.数学思想方法及其教学策略初探[J].数学教育学报,2014,23(3):11-15.

[8] 吴珞.大学数学课程思政推进方法初探[J].高教学刊,2020,126(4):72-74.

[9] 郑奕.大学数学"课程思政"的思考与实践[J].宁波教育学院学报,2019,21(1):59-61.

[10] 蒲淑萍,汪晓勤.数学史怎样融入数学教材:以中、法初中数学教材为例[J].课程·教材·教法,2012,32(8):63-68.

[11] 覃淋,姚芳.数学史与数学教育研究现状及展望[J].首都师范大学学报(自然科学版),2018,39(3):9-15.

[12] 吕亚男.从数学文化视角探讨高等数学与课程思政的有机融合[J].西部学刊,2019,85(4):97-100.

[13] 孔国平.中国数学思想史[M].南京:南京大学出版社,2015.

[14] 马俊杰."数值分析"课程教学中的"分而治之"思想[J].科技风,2022,493(17):100-102.

[15] 冯康.基于变分原理的差分格式[J].应用数学和计算数学,1965,2(4):238-262.

[16] 黄铎,陈兰平,王风.数值分析[M].北京:科学出版社,2000.

[17] 张天姿,韩祥临.《九章算术》融入初中数学课堂的教学设计:以二元一次方程组"加减消元法"为例[J].理科考试研究,2022,29(22):24-28.

[18] 郜舒竹.鸡兔同笼问题中的辩证思维[J].课程·教材·教法,2019,39(9):88-93.

[19] 李文汉.高斯消元法是中国古法[J].教材通讯,1992(1):30-32.

[20] PEACEMAN D W, RACHFORD H H. The numerical solution of parabolic and eliptic diferential equations[J]. Joural of the Society for Industrial & Applied Mathematics,1955,3(1):28-41.

[21] 李庆扬,王能超,易大义.数值分析[M].5版.武汉:华中科技大学出版社,2018.

[22] 焦宝聪,王在洪,时红廷.常微分方程[M].北京:清华大学出版社,2008.

[23] 郜舒竹.欧拉究竟是怎样解决"七桥问题"的[J].数学通报,2009,48(7):56-58.

(责任编辑:马田田)