DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.06.010

首都师范大学学报(自然科学版)
第40卷 第6期 Journal of Capital Normal University No. 6
2019年12月 (Natural Science Edition) Dec.,2019

关于多角形数的余数的研究*

王 明 军

(渭南师范学院数理学院,陕西 渭南 714000)

摘要: 对于任意的正整数 n,设 $a(n)$ 表示正整数 n 的多角形数的余数,即 $a(n)$ 是使 $n-a(n)$ 为一多角形数 $\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))$,$m\in\mathbf{N}$ 的最小的非负整数. 本文的主要目的是研究数列 $\{a(n)\}$ 的均值性质,运用初等方法给出了 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{a(n)+1}$ 和 $\sum_{n\leqslant x}\sigma(a(n))$ 的渐近公式.

关键词: 多角形数; 余数; 渐近公式

中图分类号: O156.4

1 主要结论

对任意给定的正整数 m,自然数 $\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))$,$(r\geqslant 3)$ 称为 r 角形数. 对于 r 角形数的研究,已经得到了许多有用的结论. 关于数论函数的研究,得到了许多有用结论,如文献[1-2]. 文[3]中作者定义了正整数的五边形数补数,在此定义的基础上,得到了 $\sum_{n\leqslant x}a(n)$,$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(a(n))$ 的渐近公式. 在文[4]中,作者定义了正整数的六边形数部分,得到了由 $b(n)$ 组成的一类 Dirichlet 级数的收敛性以及 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{b(n)}$ 的渐近公式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^2(n)}=\frac{5}{3}\pi^2-16\ln 2,$$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{b(n)}=\ln x+2\gamma+5\ln 2+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

在文[5]中,作者定义了正整数的下部 r 角形数部分数列和上部 r 角形数部分数列,得到了两个精确的计算公式.

文献[6]给出正整数的多角形数余数的定义:对于任意的正整数 n,$a(n)$ 是使 $n-a(n)$ 为一多角形数 $\frac{1}{2}(2m+(r-2)m(m-1))$ 的最小的非负整数,$a(n)$ 称为正整数 n 的多角数余数. 本文运用初等方法研究了多角数余数列 $\{a(n)\}$ 的性质,得到 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{a(n)+1}$ 及 $\sum_{n\leqslant x}\sigma(a(n))$ 的渐近公式,即证明了下述结论:

定理1 对于任意实数 $x>1$,$a(n)$ 表示正整数 n 的多角形数的余数,则有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{a(n)+1}=\frac{\sqrt{2(r-2)}}{2(r-2)}x^{\frac{1}{2}}\ln x+\left(\frac{1}{2}\ln 2(r-2)+C-1\right)\frac{\sqrt{2(r-2)}}{r-2}x^{\frac{1}{2}}+O(\ln x).$$

其中 C 是欧拉常数.

定理2 对于任意实数 $x>1$,$\sigma(n)$ 表示正整数 n 的约数之和,则有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(a(n))=\frac{\pi^2}{18}\sqrt{2(r-2)}x^{\frac{3}{2}}+O(x\ln x).$$

2 引 理

为了完成定理的证明,需要下面的引理.

引理1[7] 对于任意的实数 $x\geqslant 1$,有渐近公式 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\ln x+C+O\left(\frac{1}{x}\right)$,其中 C 是欧拉常数.

引理2 对于任意的正整数 $n>1$,设 $b(n)=\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))$,则有渐近公式:

$$m=\frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2}+O(1).$$

证明 对于任意的正整数 $n>1$,设 $b(n)=$

收稿日期:2019-01-23

* 陕西省教育厅专项科研计划项目(16JK1265);渭南师范学院基础数学重点学科项目

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))$，由 $b(n)$ 的定义可得

$$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2)) \leqslant n < \frac{1}{2}(2(m+1)+m(m+1)(r-2)).$$

由不等式 $\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2)) \leqslant n$ 可得

$$\frac{(r-4)-\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)n}}{2(r-2)} \leqslant m \leqslant \frac{(r-4)+\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)n}}{2(r-2)}.$$

由不等式 $n < \frac{1}{2}(2(m+1)+m(m+1)(r-2))$ 可得

$$m > \frac{-r+\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)n}}{2(r-2)},$$

或者

$$m < \frac{-r-\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)n}}{2(r-2)}.$$

由此可得 $\frac{-r+\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)n}}{2(r-2)} < m \leqslant \frac{(r-4)+\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)n}}{2(r-2)}$.

即 $m = \frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2} + O(1)$.

引理 3[7] 对所有的 $x \geqslant 1$，有

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(x\ln x).$$

3 定理的证明

3.1 定理 1 的证明

对于任意给定的正数 $x > 1$，设 M 是满足

$$\frac{1}{2}(2M+M(M-1)(r-2)) \leqslant x < \frac{1}{2}(2(M+1)+M(M+1)(r-2))$$

的正整数，由 $a(n)$ 的定义及引理 1 有:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{a(n)+1} = \sum_{t=1}^{M-1}\sum_{\frac{1}{2}(2t+t(t-1)(r-2))\leqslant n<\frac{1}{2}(2(t+1)+t(t+1)(r-2))}\frac{1}{a(n)+1} + \sum_{\frac{1}{2}(2M+M(M-1)(r-2))\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{a(n)+1}$$

$$= \sum_{t=1}^{M}\sum_{n\leqslant t(r-2)}\frac{1}{n} + O\Big(\sum_{n\leqslant M(r-2)}\frac{1}{n}\Big)$$

$$= \sum_{t=1}^{M}\Big(\ln t(r-2) + C + O\Big(\frac{1}{t(r-2)}\Big)\Big) + O(\ln M)$$

$$= \ln M! + (\ln(r-2)+C)M + O(\ln M)$$

$$= M\ln M + (\ln(r-2)+C-1)M + O(\ln M)$$

$$= \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}\ln\frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2} + (\ln(r-2)+C-1)\frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2} + O(\ln x)$$

$$= \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{2(r-2)}\Big(\ln\frac{\sqrt{2(r-2)}}{r-2} + \ln\sqrt{x}\Big) + (\ln(r-2)+C-1)\frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2} + O(\ln x)$$

$$= \frac{\sqrt{2(r-2)}}{2(r-2)}x^{\frac{1}{2}}\ln x + \Big(\ln\frac{\sqrt{2(r-2)}}{r-2} + \ln(r-2) + C - 1\Big)\frac{\sqrt{2(r-2)}}{r-2}x^{\frac{1}{2}} + O(\ln x)$$

$$= \frac{\sqrt{2(r-2)}}{2(r-2)}x^{\frac{1}{2}}\ln x + \Big(\frac{1}{2}\ln 2(r-2) + C - 1\Big)\frac{\sqrt{2(r-2)}}{r-2}x^{\frac{1}{2}} + O(\ln x).$$

3.2 定理 2 的证明

对于任意给定的正数 $x > 1$，设 M 是满足

$$\frac{1}{2}(2M+(r-2)M(M-1)) \leqslant x < \frac{1}{2}(2(M+1)+(r-2)M(M+1))$$

的正整数，由 $a(n)$ 的定义及引理 3 有:

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(a(n)) = \sum_{t=1}^{M-1}\sum_{\frac{1}{2}(2t+t(t-1)(r-2))\leqslant n<\frac{1}{2}(2(t+1)+t(t+1)(r-2))}\sigma(a(n)) + \sum_{\frac{1}{2}(2M+M(M-1)(r-2))\leqslant n\leqslant x}\sigma(a(n)) = \sum_{t=1}^{M-1}(\sigma(0)+\sigma(1)+\cdots+\sigma((r-2)t)) + (\sigma(0)+\sigma(1)+\cdots+\sigma\Big[x-\frac{1}{2}(2M+M(M+1)(r-2))\Big]+\cdots+\sigma(M(r-2)))$$

$$= \sum_{t=1}^{M-1}\Big(\frac{\pi^2}{12}((r-2)t)^2 + O((r-2)t)\ln((r-2)t)\Big) + \frac{\pi^2}{12}((r-2)M)^2 + O((r-2)M)\ln((r-2)M)$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$= \frac{\pi^2}{12}(r-2)^2\sum_{t=1}^{M-1}t^2 + O(M^2\ln M)$$

$$= \frac{\pi^2}{36}(r-2)^2M^3 + O(M^2\ln M)$$

$$= \frac{\pi^2}{36}\left(\frac{\sqrt{2(r-2)}}{r-2}\right)^3 x^{\frac{3}{2}}(r-2)^2 + O(x\ln x)$$

$$= \frac{\pi^2}{18}\sqrt{2(r-2)}\,x^{\frac{3}{2}} + O(x\ln x).$$

参 考 文 献

[1] 白海荣,廖群英. Smarandache 函数的一些推广[J]. 四川师范大学学报,2018,41(1):32-38.

[2] 王明军. 关于两个可乘函数的均值[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2016,37(3):11-13.

[3] 杨存典,李超,刘端森. 关于五边形数的补数及其渐近性质[J]. 西安工业学院学报,2006,26(3):287-290.

[4] 张文鹏. 关于正整数的六边形数部分[J]. 商洛师范专科学校学报,2005,19(2):6-8.

[5] 黄炜. 关于 r 角形数的部分数列及其均值[J]. 西南师范大学学报,2010,35(1):15-19.

[6] 李青. 关于多边形数余数的均值及其渐近性质[J]. 纺织高校基础科学学报,2012,25(3):343-345.

[7] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag,1976.

[8] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ House,1993.

[9] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社,1988.

Research on the Polygonal Number´s Residue

WANG Mingjun

(College of Mathematical and Physical Sciences, Weinan Teachers University, Weinan Shaanxi 714000)

Abstract: For any positive integer n, let $a(n)$ denotes the polygonal number´s residue. That is to say, for any fixed positive integer n, $a(n)$ is the smallest nonnegative integer number such that $n-a(n)$ is a polygonal number $\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))$, $m \in \mathbf{N}$. The main purpose of this paper is to study the asymptotic properties of the sequence $\{a(n)\}$, using the elementary method two asymptotic formulas about $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{a(n)+1}$ and $\sum_{n\leqslant x}\sigma(a(n))$ are obtained.

Keywords: polygonal number; residue; asymptotic formula

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net