DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.04.001

首都师范大学学报(自然科学版)
第36卷 第4期 Journal of Capital Normal University No. 4
2015年8月 (Natural Science Edition) August, 2015

一类Hilbert边值问题的逆问题*

李平润

(曲阜师范大学数学科学学院,山东 曲阜 273165)

摘 要

在函数类 H 中,给出了一类 Hilbert 边值逆问题在正则型情形的数学提法与解法,并在此函数类中得到了该问题的封闭解与相应的可解条件.

关键词: Hilbert 边值逆问题,Hilbert 边值问题,封闭解,可解条件.

中图分类号: O175.5

关于解析函数边值问题,俄罗斯数学家 Musknelishvilli N. I. 以及国内数学工作者路见可、赵桢以及闻国椿等都有较系统的研究[1-4]. 近几年,路见可教授从力学背景出发提出了解析函数的边值逆问题,并对其进行了讨论与研究,给出了该逆问题在正则型和非正则型情形的提法与解法. 随后国内许多数学工作者也相继进行了讨论[5-6],由于该逆问题在实际问题中有重要的作用,比如已应用到物理学、工程力学、断裂力学等. 此类问题已经引起极大的关注. 在上述工作的基础上,本文提出了 Hilbert 边值问题的逆问题,并对正则型情况的 Hilbert 边值问题的逆问题进行了讨论,给出了在该种提法下的问题的解与可解条件. 从现有的文献看该类问题的研究尚处于起步阶段.

1 问题的提法

设 L 是复平面中的单位圆周 $|t|=1$,其内域记为 S^+,外域记为 S^-,且取定逆时针方向为其正向. 我们下面将要讨论的 Hilbert 边值逆问题简记为 $\tilde{H}$,叙述如下:

求一对函数 $(\Phi(z),\psi(t))$,其中 $\Phi(z)$ 为以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数,$\psi(t)$ 为 L 上的 H 类函数(H 类是指满足 Hölder 条件的函数类,其意义参考[1]),满足边值条件

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\{[a_1(t)+ib_1(t)]\Phi^+(t)\}=g_1(t)\psi(t)+c_1(t)\\ \mathrm{Re}\{[a_2(t)+ib_2(t)]\Phi^+(t)\}=g_2(t)\psi(t)+c_2(t)\end{cases}\quad t\in L,\quad (1)$$

其中 $a_j(t)$ 与 $b_j(t)$ 在 L 上不全为零,$g_1(t)$ 与 $g_2(t)$ 在 L 上也不全为零,它们皆为 L 上的已知函数. $\Phi(t)$,$\psi(t)$ 为 L 上的未知函数. 在问题(1)中所出现的函数都属于函数类 H.

2 问题的转化

为了求解单位圆内的 $\tilde{H}$ 问题,我们设法把它转化为 $\tilde{R}$ 问题.

类似于文献[1]中的方法,对于单位圆内的正则函数 $\Phi(z)$,用下述方法定义出其在外域 S^- 中的对称扩张,或称为对称函数:$\Phi_*(z)=\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$. 根据复分析中的解析函数延拓定理,我们可得到 $\Phi_*(z)$ 在 $|z|>1$ 内是全纯解析的. 再定义函数 $\Omega(z)$ 如下:

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z), & \text{当 } z\in S^+\\ \Phi_*(z), & \text{当 } z\in S^-\end{cases},\quad (2)$$

则 $\Omega(z)$ 是一分区全纯函数,以 L 为跳跃曲线,$\Omega(\infty)$ 有界(即在 $\tilde{H}_0$ 中求解),其在 L 上的边值满足下列条件:

$$\Omega^-(t)=\overline{\Omega^+(t)},\quad (3)$$

并且

收稿日期:2014-03-31

* 曲阜师范大学校青年基金(XJ201218)资助.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\Omega^+(t) = \Phi^+(t), \Omega^-(t) = \overline{\Phi^+}(t). \quad (4)$$

于是 $\tilde{H}$ 问题(1) 就转化为下列$\tilde{R}_0$ 问题:

$$(a_1(t) + ib_1(t))\Omega^+(t) + (a_1(t) - ib_1(t))\Omega^-(t) = 2g_1(t)\psi(t) + 2c_1(t),$$

$$(a_2(t) + ib_2(t))\Omega^+(t) + (a_2(t) - ib_2(t))\Omega^-(t) = 2g_2(t)\psi(t) + 2c_2(t), t \in L, \quad (5)$$

在(5) 中,第一式乘 $g_2(t)$,第二式乘 $g_1(t)$,然后再相减得

$$G_1(t)\Omega^+(t) = G_2(t)\Omega^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (6)$$

其中

$$G_1(t) = \begin{vmatrix} a_1(t) + ib_1(t) & a_2(t) + ib_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix},$$

$$G_2(t) = -\begin{vmatrix} a_1(t) - ib_1(t) & a_2(t) - ib_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix},$$

$$g(t) = 2\begin{vmatrix} c_1(t) & c_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix},$$

显然 $G_1(t)$,$G_2(t)$,$g(t)$ 都是 L 上的 H 类函数,在 L 上当 $G_1(t) \neq 0$,$G_2(t) \neq 0$ 时,(6) 是正则型的 Riemann 边值问题,且此时设 $K = \frac{1}{2\pi i}\left[\log\frac{G_2(t)}{G_1(t)}\right]_L$ 为 $\tilde{H}$ 问题的指标. 当 $G_1(t)$ 或 $G_2(t)$ 在 L 上有零点时,称(6) 是非正则型的 Riemann 边值问题,关于非正则型情况将在另文考虑.

3 边值问题(6) 的正则型情况的解法

在问题(6) 中,如果 $G_1(t) \neq 0$,$G_2(t) \neq 0$,$t \in L$,这时问题(6) 就称为正则型的 Riemann 边值问题. 令

$$G(t) = \frac{G_2(t)}{G_1(t)}, \qquad \tilde{g}(t) = \frac{g(t)}{G_1(t)},$$

很显然在 L 上有 $G(t) \neq 0$,且 $G(t)$ 和 $\tilde{g}(t)$ 在 L 上皆属于函数类 H. 那么问题(4) 就化为

$$\Omega^+(t) = G(t)\Omega^-(t) + \tilde{g}(t), \quad (7)$$

很显然问题(6) 是 Riemann 边值问题.

由于要求 $\Phi(\infty)$ 有限,那么 $\Omega(z)$ 在 ∞ 处也取有限值,因此在这里我们所讨论的问题(7) 是 $\Omega(\infty)$ 为常数,我们把它记做 R_0. 其它情况如 $\Omega(\infty) = 0$ 或 $\Omega(z)$ 在 $z = \infty$ 有 m 阶极点,也可类似讨论.

由于问题(7) 是在 R_0 中求解,由文献[1] 与[2],当指标 $K \geqslant 0$ 时,问题(7) 无条件可解,其一般解为

$$\Omega(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\tilde{g}(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}d\tau + P_K(z)X(z). \quad (8)$$

其中 $P_K(z)$ 为不高于 K 次的任意多项式,而

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z \in S^+, \\ z^{-K}e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z \in S^-, \end{cases} \quad (9)$$

称为问题(7) 的典则函数,其中

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G(\tau)}{\tau - z}d\tau. \quad (10)$$

而当 $K < 0$ 时,当且仅当下列 $-K$ 个条件满足:

$$\int_L \frac{\tilde{g}(\tau)\tau^k}{X^+(\tau)}d\tau = 0, k = 0, 1, \cdots, -K-1, \quad (11)$$

这时问题(7) 才可解,且有唯一解(8)(这时 $P_K(z) \equiv 0$).

在问题(5) 中,第一式乘 $a_2(t) + ib_2(t)$,第二式乘 $a_1(t) + ib_1(t)$,然后相减,即可求得 $\psi(t)$

$$\psi(t) = \frac{ia_1(t)b_2(t)}{D_1(t)}\Omega^-(t) + \frac{D_2(t)}{D_1(t)}, \quad (12)$$

其中

$$D_1(t) = \begin{vmatrix} a_2(t) + ib_2(t) & a_1(t) + ib_1(t) \\ g_2(t) & g_1(t) \end{vmatrix},$$

$$D_2(t) = \begin{vmatrix} a_1(t) + ib_1(t) & a_2(t) + ib_2(t) \\ c_1(t) & c_2(t) \end{vmatrix}.$$

按上述方法求出的问题(7) 的解,还不是我们所要求的解 $\Omega(z)$,因为 $\Omega(z)$ 还不满足 $\Omega^-(t) = \overline{\Omega^+(t)}$,根据方程理论解的结构和文献[1],这时问题(7) 在 R_0 有一个特解

$$\psi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\tilde{g}(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}d\tau,$$

因此 $\Omega_0(z) = \frac{1}{2}(\psi(z) + \psi_*(z))$ 就是问题(7) 的一个特解. 这时 $\Omega_0(z)$ 就满足 $\Omega_0^-(t) = \overline{\Omega_0^+(t)}$,而问题(7) 的齐次方程的通解为

$$\Omega(z) = X(z)P_K(z),$$

其中 $P_K(z)$ 为任意 K(当 $K \geqslant 0$) 次多项式,或 $P_K(z) \equiv 0$(当 $K < 0$). 我们取 $\Phi_0(z) = \Omega_0(z)$,因此 $\Phi_0(z)$ 就是满足问题(1) 的一个特解. 根据上面的讨论,问题(1) 的一般解是

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + X(z)P_K(z), \quad (13)$$

而相应的有

$$\psi(t) = \frac{ia_1(t)b_2(t)}{D_1(t)}\Omega_0^-(t) + \frac{D_2(t)}{D_1(t)}. \quad (14)$$

综上所述,我们得到关于 Hilbert 边值问题的逆

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

问题的可解性定理:

定理 3.1　正则型的 $\tilde{H}$ 问题, 如果在 $\tilde{H}_0$(即 $\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 有界) 中求解,则当指标 $K\geqslant 0$ 时,问题无条件可解,其一解为 $(\Phi(z),\psi(t))$,其中 $\Phi(z)$ 及 $\psi(t)$ 分别由(13),(14) 给出;而当 $K<0$ 时,当且仅当 $-K$ 个条件(11) 满足时问题才可解,且有唯一解 $(\Phi(z),\psi(t))$,其中 $\Phi(z)$,$\psi(t)$ 仍分别由(13),(14) 给出(只不过这时(13) 中的 $p_K(z)\equiv 0$). 总之,$\tilde{H}$ 问题在 $\tilde{H}_0$ 中的一般解有 $K+1$ 个自由度.

在问题(1) 中,如果 $c_1(t)=c_2(t)=0$,则称它为齐次 Hilbert 边值逆问题或齐次 $\tilde{H}$ 问题. 容易看出,齐次 $\tilde{H}$ 问题有如下可解性定理:

定理 3.2　正则型的齐次 $\tilde{H}$ 问题,如果在 $\tilde{H}_0$ 中求解,则当指标 $K\geqslant 0$ 时,问题有 $K+1$ 个线性无关的解 $\left(z^kX(z),\frac{ia_1(t)\,b_2(t)}{D_1(t)}X_0^-(t)\right)$ $(k=0,1,\cdots K)$. 而当 $K<0$ 时,问题只有平凡解(即零解).

用类似的方法,也可讨论 $\tilde{H}$ 问题与齐次 $\tilde{H}$ 问题在 $\tilde{H}_m$(m 是整数) 中的求解,本文不再赘述.

参 考 文 献

[1] 路见可. 解析函数边值问题[M]. 第 2 版,武汉: 武汉大学出版社,2004.

[2] Musknelishvilli N. I. Singular integral equations[M]. Nauka,Moscow press,1986.

[3] Zhao zhen, Integral equations and boundary value problems[J]. World Scientific,Singapore,1991(1): 281-289.

[4] 闻国椿. 共形映射与边值问题[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[5] 温小琴. 李明忠. 一类广义解析函数的 Riemann 边值逆问题[J]. 数学杂志,2004,24(4):457-464.

[6] 王明华. Riemann 边值逆问题与奇异积分方程组[J]. 数学杂志,1999,19(2): 175~180.

[7] 李平润. 具有余割核与卷积核的奇异积分方程的求解[J]. 曲阜师范大学学报,2007(2): 55-58.

[8] 李平润. 具周期性的含卷积核与余割核混合的积分方程[J]. 系统科学与数学,2010,30(8):1148-1155.

[9] 李平润, 曹丽霞. 关于平行直线上的 Riemann 边值问题的求解[J]. 曲阜师范大学学报,2012(2):29-32.

[10] 李平润. 一类含卷积核与 Cauchy 核的奇异积分微分方程的非正则型解法[J]. 系统科学与数学,2014,34(3): 352-361.

[11] 李平润. 含有调和奇异算子的卷积型方程组的解法[J]. 系统科学与数学,2013,33(7): 854-861.

[12] 许永甲. 开口曲线上奇异积分算子的一些性质[J],中国科学 A 辑: 数学,2007, 37(2):229-248.

[13] Li Pingrun. On method of solution for two kinds of singular integral equations of convolution type with reflection[J]. Annals of Differential Equation, 2013,29(2): 159-166.

One Class of Inverse Hilbert Boundary Value Problem

Li Pingrun

(School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165)

Abstract

This paper proposes a class of inverse Hilbert boundary value problem, whose solution in the normal case obtained. The closed solutions as well as the solutions of solvability are firstly obtained in class *H*.

Key words: Inverse Hilbert boundary value problem, Hilbert boundary value problem, closed form solutions, conditions of solvability.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net